NON RATIONALITÉ STABLE SUR LES CORPS QUELCONQUES
NOTES POUR L'ÉCOLE "BIRATIONAL GEOMETRY OF HYPERSURFACES"
PALAZZO FELTRINELLI, GARGAGNO DEL GARDA
19–23 MARS 2018
VERSION RÉVISÉE, 4 AOÛT 2018

par

J.-L. Colliot-Thélène

1. Introduction

Le texte ci-dessous a été écrit à l'occasion de l'École "Birational geometry of hypersurfaces". Il s'agit d'un rapport de synthèse.

Après les articles initiaux de C. Voisin [**46**] et de Colliot-Thélène et Pirutka [**19**], les divers articles qui ont établi la non rationalité stable de divers types de variétés classiques ont utilisé la spécialisation de Fulton du groupe de Chow des zéro-cycles. Je développe dans ce texte une remarque de [**19**] : on peut remplacer la spécialisation du groupe de Chow des zéro-cycles par la spécialisation de la R-équivalence. On comparera ainsi les propositions 3.29 et 3.30 et le théorème 6.8 du présent texte avec les résultats de Totaro [**45**].

La proposition 3.20 (c) est nouvelle. La proposition 5.1 améliore un énoncé publié dans [**11**]. La proposition 7.2 est nouvelle.

2. Entre rationalité et unirationalité

Lemme 2.1. — *Soit k un corps. Soit X une k-variété géométriquement intègre de dimension d. Considérons les propriétés suivantes.*

(i) La k-variété X est k-rationnelle, i.e. k-birationnelle à $\mathbf{P}^d_k$.

(ii) La k-variété X est stablement k-rationnelle, i.e. il existe un entier $n \geq 0$ tel que $X \times_k \mathbf{P}^n_k$ est k-birationnelle à $\mathbf{P}^{n+d}_k$.

(iii) La k-variété X est facteur direct d'une variété k-rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe une k-variété Y géométriquement intègre telle que $X \times_k Y$ est k-birationnelle à un espace projectif.

(iv) La k-variété X est rétractilement k-rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $U \subset X$, un ouvert de Zariski $V \subset \mathbf{P}^n_k$, et des

k-morphismes $f : U \to V$ et $g : V \to U$ dont le composé $g \circ f$ est l'identité de U.

(v) La k-variété X est k-unirationnelle, c'est-à-dire qu'il existe $m \geq n$ et une k-application rationnelle dominante $\mathbf{P}^m_k$ vers X.

On a : (i) implique (ii) qui implique (iii), et (iv) implique (v). Si k est infini, (iii) implique (iv).

On sait que (ii) n'implique pas (i), même sur $k = \mathbb{C}$ (Beauville, CT, Sansuc, Swinnerton-Dyer [**5**]). Sur un corps k non algébriquement clos convenable, on sait montrer que (iii) n'implique pas (ii). On ne sait pas ce qu'il en est sur $k = \mathbb{C}$. On ne sait pas si une variété rétractilement rationnelle est facteur direct d'une variété rationnelle, même sur le corps des complexes. Pour p un nombre premier, et $PGL_p \subset GL_N$ un plongement de groupes, Saltman a montré que le quotient GL_N/PGL_p est rétractilement rationnel. On ne sait pas si cette variété est facteur direct d'une variété rationnelle. Pour $H \subset G$ des groupes réductifs connexes sur $\mathbb{C}$, on ne sait pas si G/H est rétractilement rationnel.

Exercice : Si k est infini, l'hypothèse de (v) implique la même hypothèse avec $m = n$.

Remarque 2.2. — Supposons le corps k algébriquement clos de caractéristique quelconque. Une k-variété projective et lisse X rétractilement rationnelle est rationnellement connexe par chaînes, comme est d'ailleurs toute k-variété unirationnelle. En caractéristique zéro, elle est donc séparablement rationnellement connexe, i.e. il existe un k-morphisme $f : \mathbf{P}^1 \to X$ tel que f^*T_X soit un fibré vectoriel ample. Pour ces notions, voir [**31**].

3. Invariants birationnels stables

3.1. R-équivalence. —

Définition 3.1. — (Manin [**34**]) Soient k un corps et X une k-variété. On dit que deux k-points $A, B \in X(k)$ sont élémentairement R-liés s'il existe un ouvert $U \subset \mathbf{P}^1_k$ et un k-morphisme $h : U \to X$ tel que A, B soient dans $h(U(k))$. On dit que deux points $A, B \in X(k)$ sont R-équivalents s'il existe une chaîne $A = A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ de k-points avec A_i et A_{i+1} élémentairement R-liés. On note $X(k)/\mathrm{R}$ le quotient de $X(k)$ par cette relation d'équivalence.

Si X est propre sur k, dans la définition ci-dessus, on peut prendre simplement $U = \mathbf{P}^1_k$.

Si $f : X \to Y$ est un k-morphisme, on a une application induite $X(k)/\mathrm{R} \to Y(k)/\mathrm{R}$.

Si X est un ouvert d'un espace projectif $\mathbf{P}^n_k$, comme par deux k-points il passe une droite $\mathbf{P}^1_k$, deux k-points quelconques de X sont élémentairement R-liés, et $X(k)/\mathrm{R}$ a au plus un élément.

Définition 3.2. — Soient k un corps et X une k-variété intègre.

(i) On dit que X est R-triviale si, pour tout corps F contenant k, le quotient $X(F)/\mathrm{R}$ est d'ordre 1.

(ii) On dit que X est presque R-triviale s'il existe un ouvert de Zariski dense $U \subset X$ tel que, pour tout corps F contenant k, l'image de $U(F)$ dans $X(F)/\mathrm{R}$ est d'ordre 1.

Proposition 3.3. — *Soient k un corps et X une k-variété intègre, de corps des fonctions $F = k(X)$ et de point générique η. Si X est presque* R*-triviale, alors il existe un k-point $m \in X(k)$ tel que, sur X_F, le point générique $\eta \in X(F)$ et le point $m_F \in X(F)$ soient* R*-équivalents.* □

Remarque 3.4. — Dans la suite de ce texte on sera intéressé à la notion de presque R-trivialité dans une situation où U est lisse connexe mais où X n'est pas nécessairement lisse. On prendra garde qu'en l'absence de lissité de X la condition de presque R-trivialité n'est a priori pas très forte. Soit $Y \subset \mathbf{P}^n_k$ une k-variété quelconque et $X \subset \mathbf{P}^{n+1}_k$ le cône sur Y. Alors $X(k)/\mathrm{R} = 1$ car tout k-point de X est élémentairement R-lié au sommet $O \in X(k)$ du cône. Soit $U \subset X$ le complémentaire du sommet du cône. Si par exemple $k = \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ est une courbe elliptique E, alors $U(\mathbb{C})/\mathrm{R}$ est en bijection avec $E(\mathbb{C})/\mathrm{R} = E(\mathbb{C})$, mais l'application $U(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})/\mathrm{R}$ a pour image un point. Les $\mathbb{C}$-variétés U et X ne sont pas rétractilement rationnelles.

Définition 3.5. — Soient k un corps et $f : X \to Y$ un k-morphisme. On dit que f est R-trivial si pour tout corps F contenant k, l'application induite $X_F(F)/\mathrm{R} \to Y_F(F)/\mathrm{R}$ est une bijection.

Un exemple est fourni par l'éclatement $X \to Y$ d'une sous-k-variété fermée lisse dans une k-variété lisse Y.

On a l'énoncé simple mais efficace suivant.

Proposition 3.6. — *Soient k un corps et X une k-variété intègre. Si X est rétractilement rationnelle, alors il existe un ouvert non vide $U \subset X$ tel que, pour tout corps F contenant k, tout couple de points $A, B \in U(F)$ est élémentairement* R*-lié dans $U(F)$, et a fortiori dans $X(F)$. Si de plus k est infini, alors X est presque* R*-triviale.* □

Théorème 3.7. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soient Y et X deux k-variétés projectives et lisses géométriquement intègres. S'il existe un ouvert $Y' \subset Y$, un k-morphisme dominant $Y' \to X$ et une k-section rationnelle de $Y' \to X$, alors il existe une application surjective $Y(k)/\mathrm{R} \to X(k)/\mathrm{R}$.*

En particulier, si X est rétractilement rationnelle, par exemple si X est stablement k-rationnelle, alors X est R*-triviale.*

Démonstration. — On commence par établir que, si $Y \to X$ est l'éclaté d'une sous-k-variété lisse Z dans une k-variété projective et lisse X, alors l'application induite $Y(k)/\mathrm{R} \to X(k)/\mathrm{R}$ est une bijection.

Soit $Y \dashrightarrow X$ une k-application rationnelle dominante possédant une section rationnelle. D'après Hironaka, par éclatements successifs au-dessus de Y le long de sous-k-variétés fermées lisses, on peut obtenir un k-morphisme $W \to X$ qui couvre l'application rationnelle $Y \dashrightarrow X$. L'application induite $W(k)/\mathrm{R} \to Y(k)/\mathrm{R}$ est une bijection. Le k-morphisme $W \to X$ admet une section k-rationnelle. Appliquant le théorème de Hironaka à cette section, par éclatements successifs au-dessus de X le long de sous-k-variétés fermées lisses, on obtient une k-variété Z muni d'une application k-birationnelle $f : Z \to X$ et d'un k-morphisme $Z \to W$ tel que le composé $Z \to W \to X$ soit f. L'application composée induite $Z(k)/\mathrm{R} \to W(k)/\mathrm{R} \to X(k)/\mathrm{R}$ est surjective, donc aussi $W(k)/\mathrm{R} \to X(k)/\mathrm{R}$, et l'application $W(k)/\mathrm{R} \to Y(k)/\mathrm{R}$ est une bijection. □

Comparer avec [**21**, Prop. 10]. Kahn et Sujatha [**30**] ont établi des extensions de ces résultas au-dessus d'un corps de caractéristique quelconque.

Remarque 3.8. — C'est une question ouverte si une k-variété projective, lisse, connexe, R-triviale est rétractilement rationnelle, et même si elle est facteur direct d'une k-variété k-rationnelle.

Le cas particulier suivant est déjà très intéressant. Soit G un k-groupe algébrique (linéaire) réductif connexe. L'ensemble $G(k)/\mathrm{R}$ est alors naturellement muni d'une structure de groupe. Si k est algébriquement clos, G est une variété rationnelle. Sur un corps k quelconque, un k-groupe algébrique réductif connexe G est k-unirationnel.

Pour un tel k-groupe G, les questions suivantes sont ouvertes. Sous des hypothèses particulières sur k ou sur G, elles ont fait l'objet de nombreux travaux [**26**].

(a) Le groupe $G(k)/\mathrm{R}$ est-il commutatif ?

(b) Si G est R-trivial, G est-il rétractilement rationnel ?

(c) Si k est un corps de type fini sur le corps premier, le groupe $G(k)/\mathrm{R}$ est-il fini ?

Remarque 3.9. — Une k-variété X propre, lisse, connexe, presque R-triviale est géométriquement rationnellement connexe par chaînes (au sens de Kollár, Miyaoka, Mori [**31**]). Si k est de caractéristique zéro, elle est donc géométriquement séparablement rationnellement connexe : après extension du corps de base, il existe un morphisme $f : \mathbf{P}^1 \to X$ tel que f^*T_X soit un fibré vectoriel ample.

3.2. Groupe de Chow des zéro-cycles. — Soit X une k-variété algébrique. On note $Z_0(X)$ le groupe abélien libre sur les points fermés de X. Pour P un tel point, de corps résiduel $k(P)$, on note $[k(P):k]$ le degré de l'exension finie $k(P)/k$. Par linéarité, on obtient l'application degré $deg_k : Z_0(X) \to \mathbb{Z}$ envoyant $\sum_i n_i P_i$ sur $\sum_i n_i[k(P_i):k]$. Pour tout k-morphisme $f : Y \to X$ de k-variétés, on dispose d'une application induite $f_* : Z_0(X) \to Z_0(Y)$ qui est additive et envoie le point fermé $P \in X$ d'image le point fermé Q de Y sur $[k(P):k(Q)]Q$. Cette application préserve le degré.

Si $C \to X$ est un k-morphisme propre de source une k-courbe normale intègre C, et si $g \in k(C)^*$ est une fonction rationnelle sur C, on dispose du zéro-cycle $f_*(div_C(g))$. On définit $CH_0(X)$ comme le quotient de $Z_0(X)$ par le sous-groupe engendré par tous les $f_*(div_C(g))$ pour tous les C, g, f comme ci-dessus.

Si la k-variété X est propre, le degré $deg_k : Z_0(X) \to \mathbb{Z}$, induit un homomorphisme $deg_k : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$, car le degré du diviseur des zéros d'une fonction rationnelle sur une courbe propre est zéro.

Plus généralement, pour $f : Y \to X$ un k-morphisme propre, l'application $f_* : Z_0(Y) \to Z_0(X)$ induit une application $f_* : CH_0(Y) \to CH_0(X)$.

Définition 3.10. — Soit X une k-variété propre. On dit que X est (universellement) CH_0-triviale si pour tout corps F contenant k, le degré

$$deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme.

Proposition 3.11. — *(Merkurjev)* [**36**, Thm. 2.11] *Soit X une k-variété propre, lisse, géométriquement intègre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La k-variété X est CH_0-triviale.

(ii) X possède un zéro-cycle de degré 1 et, pour $F = k(X)$ le corps des fonctions de X, l'application $deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

(iii) La classe du point générique de X dans $CH_0(X_{k(X)})$ est dans l'image de l'application image réciproque $CH_0(X) \to CH_0(X_{k(X)})$.

Définition 3.12. — Soit $f : Y \to X$ un k-morphisme propre de k-variétés. On dit que f est un CH_0-isomorphisme (universel) si, pour tout corps F contenant k, l'application induite

$$f_{F,*} : CH_0(Y_F) \to CH_0(X_F)$$

est un isomorphisme.

Lemme 3.13. — [**25**, Cor. 6.7] *Soit X une variété quasi-projective régulière connexe sur un corps k. Étant donné un zéro-cycle z sur X et un ouvert de Zariski non vide $U \subset X$, il existe un zéro-cycle z' sur X dont le support est dans U et qui est rationnellement équivalent à z sur X.*

Lemme 3.14. — *Soient k un corps et X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre. Si X est presque* R*-triviale, alors X est CH_0-triviale.* □

Démonstration. — Ceci résulte du lemme 3.13 (voir la démonstration de [**19**, Lemme 1.5]). □

Proposition 3.15. — [**19**, Lemme 1.5] *Soit k un corps. Soit X une k-variété projective et lisse géométriquement intègre. Si X est rétractilement rationnelle, alors X est CH_0-triviale.*

Démonstration. — Pour k un corps infini, ceci résulte immédiatement de la proposition 3.6 et du lemme 3.14. Le cas d'un corps fini s'établit par un argument de normes. □

Remarque 3.16. — On prendra garde qu'il existe des surfaces connexes projectives et lisses sur $\mathbb{C}$ qui sont CH_0-triviales mais sont de type général, et donc ne sont pas rationnellement connexes, et donc pas R-triviales (Voisin ; [**4**, Prop. 1.9]). De telles surfaces satisfont $H^0(X, \Omega^i) = 0$ pour $i = 1, 2$ (Prop. 3.28 ci-dessous) mais ne satisfont pas $H^0(X, (\Omega^2)^{\otimes 2}) = 0$.

3.3. Action du groupe de Galois sur le groupe de Picard. — Soit X une variété projective lisse, connexe, géométriquement rationnellement connexe sur un corps k. Si k est algébriquement clos de caractéristique zéro, tout revêtement fini galoisien étale connexe est trivial (Kollár, Miyaoka, Mori). Le groupe $Pic(X) = H^1_{Zar}(X, \mathbb{G}_m) = H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ est donc un groupe abélien libre de type fini. Il n'y a pas là d'invariant qui détecterait la non rationalité. Si k n'est pas algébriquement clos, la situation change.

Les invariants suivants ont tout d'abord été étudiés par Shafarevich, Manin [**34**], Iskovskikh, Voskresenskiĭ.

Théorème 3.17. — *Soient k un corps, k^s une clôture séparable, et $g =$ $\mathrm{Gal}(k^s/k)$. On note $X^s = X \times_k k^s$. Soient X et Y deux k-variétés propres, lisses, géométriquement intègres.*

(a) Si X est k-birationnelle à Y, alors il existe des g-modules de permutation de type fini P_1 et P_2 et un isomorphisme de modules galoisiens

$$\mathrm{Pic}(X^s) \oplus P_1 \simeq \mathrm{Pic}(Y^s) \oplus P_2,$$

et l'on a $H^1(k, \mathrm{Pic}(X^s)) \simeq H^1(k, \mathrm{Pic}(Y^s))$.

(b) Supposons $\mathrm{car.}(k) = 0$*. Si X est CH_0-triviale, alors le module galoisien* $\mathrm{Pic}(X^s)$ *est un facteur direct d'un g-module de permutation de type fini, et, pour tout corps F contenant k, on a $H^1(F, \mathrm{Pic}(X \times_F F^s)) = 0$.*

(c) Supposons $\mathrm{car.}(k) = 0$*. Si X est rétractilement rationnelle, alors le module galoisien* $\mathrm{Pic}(X^s)$ *est un facteur direct d'un g-module de permutation de type fini, et, pour tout corps F contenant k, on a $H^1(F, \mathrm{Pic}(X \times_F F^s)) = 0$.*

Démonstration. — Un g-module de permutation de type fini est un g-module qui est libre sur $\mathbb{Z}$ et admet une $\mathbb{Z}$-base globalement respectée par g. Pour l'élégante démonstration de (a) due à L. Moret-Bailly, voir [**22**, Prop. 2A1, p. 461]. Pour (b), voir CT, Appendice à un article de S. Gille (J. Algebra 440 (2015) 443–463). On en déduit alors (c). □

Voici un exemple d'application.

Proposition 3.18. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 3. Soient $a, b, c, d \in k^*$. Si aucun des quotients $ab/cd, ac/bd, ad/bc$ n'est un cube dans k^*, alors la k-surface cubique $X \subset \mathbf{P}^3_k$ d'équation*

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$$

n'est pas stablement k-rationnelle, et si de plus k est de caractéristique zéro, elle n'est pas rétractilement rationnelle.

Le cas $a = b = c = 1$ est traité dans le livre de Manin [**34**] et dans [**22**]. Le cas général est fait dans un article de CT-Kanevsky-Sansuc.

On a une réciproque : si ab/cd est un cube, et X possède un k-point, alors X est k-birationnelle à $\mathbf{P}^2_k$.

Comme on verra plus bas, l'invariant discuté ici est très intéressant pour certaines classes de variétés géométriquement rationnelles, par exemple les surfaces. Mais si X est une hypersurface lisse de degré $d \leq n$ dans $\mathbf{P}^n_k$ avec $n \geq 4$, alors $\mathbb{Z} = \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^n_{k^s}) \overset{\simeq}{\to} \mathrm{Pic}(X^s)$ et ceci ne donne aucune information sur l'éventuelle non k-rationalité de X.

3.4. Groupe de Brauer. — Soit F un corps, F^s une clôture séparable, $g = \mathrm{Gal}(F^s/F)$. On note $\mathrm{Br}(F) = H^2(g, F^*_s)$ le groupe de Brauer de F. Soit k un corps et X une k-variété. On note $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ le groupe de Brauer de X [**29**]. Si X est lisse et intègre, de corps des fonctions $k(X)$, on a une injection $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow Br(k(X))$ (Auslander-Goldman, Grothendieck).

Le groupe $\mathrm{Br}(X)$ est un invariant k-birationnel des k-variétés propres et lisses, réduit à $\mathrm{Br}(k)$ pour $X = \mathbf{P}^n_k$ (Grothendieck [**29**] pour la torsion première à la caractéristique ; Hoobler, Gabber, Česnavičius en général).

Rappelons l'énoncé bien connu [**22**, (1.5.0)] :

Proposition 3.19. — *Soient k un corps, k^s une clôture séparable, et $g =$* $\mathrm{Gal}(k_s/k)$. *Pour toute k-variété projective, lisse, géométriquement connexe X on a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X^s)^g \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X^s)] \to H^1(k, \mathrm{Pic}(X^s)) \to H^3(k, k_s^*).$$

Si $X(k) \neq \emptyset$, on a $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X^s)^g$ et on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X^s)] \to H^1(k, \mathrm{Pic}(X^s)) \to 0.$$

On voit donc que l'invariant "module galoisien $\mathrm{Pic}(X^s)$ à addition près de module de permutation" du théorème 3.17 raffine le sous-groupe "algébrique" $\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X^s)]$ du groupe de Brauer de X.

La question du calcul du groupe des invariants $\mathrm{Br}(X \times_k \overline{k})^g$ est délicate, c'est un problème "arithmétique", nous n'en parlerons pas ici.

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective, lisse, connexe, de dimension d. Si X est rationnellement connexe, on a $H^1_{\text{ét}}(X, \mu_{\ell^n}) = \mathrm{Pic}(X)[\ell^n] = 0$ pour tout entier $n > 0$. On a donc $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(1)) = 0$. La suite de Kummer en cohomologie étale (où $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ est donné par $x \mapsto x^{\ell^n}$) :

$$1 \to \mu_{\ell^n} \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1$$

donne d'abord que $\mathrm{Pic}(X)$ est sans torsion, donc égal au groupe de Néron-Severi $NS(X)$, qui est donc lui-même sans torsion. Elle donne ensuite des suites exactes courtes compatibles (en n) :

$$0 \to \mathrm{Pic}(X)/\ell^n \to H^2_{\text{ét}}(X, \mu_{\ell^n}) \to \mathrm{Br}(X)[\ell^n] \to 0.$$

En passant à la limite on obtient une suite exacte

$$0 \to NS(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(1)) \to T_\ell(\mathrm{Br}(X)) \to 0.$$

Un module de Tate $T_\ell(A) = \mathrm{limproj}_n A[\ell^n]$ est toujours sans torsion. Ainsi $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$ est sans torsion. Si $k = \mathbb{C}$, les théorèmes de comparaison donnent alors $H^1_{Betti}(X, \mathbb{Z}) = 0$ et $H^2_{Betti}(X, \mathbb{Z})_{tors} = 0$.

Proposition 3.20. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et soit X une k-variété projective et lisse rationnellement connexe.*

(a) Si $k = \mathbb{C}$, alors $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\simeq} H^3_{Betti}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{tors}$.

(b) En général, $\mathrm{Br}(X)$ *est un groupe fini isomorphe à* $\oplus_\ell H^3_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$.

(c) Si F est un corps qui contient k, l'application naturelle $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_F)/\mathrm{Br}(F)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — En utilisant les suites exactes

$$0 \to \mathrm{Pic}(X)/\ell^n \to H^2_{\text{ét}}(X, \mu_{\ell^n}) \to \mathrm{Br}(X)[\ell^n] \to 0,$$

on montre que pour toute k-variété projective lisse connexe, le groupe de Brauer de X est une extension du groupe fini $\oplus_\ell H^3_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$ par un groupe divisible (Grothendieck [**29**]). Si X est rationnellement connexe, on montre qu'il existe un entier $N > 0$ qui annule $A_0(X_F)$ pour tout corps F contenant k. Ceci implique que le groupe divisible est annulé par N, donc est nul. Ceci établit (a) et (b). Pour (c), considérons les inclusions $k \subset F \subset \overline{F}$. On a les applications naturelles

$$\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_F) \to \mathrm{Br}(X_{\overline{F}}).$$

Fixons un k-point P de $X(k)$, et considérons les sous-groupes de ces divers groupes formés des éléments nuls en P. On a alors les applications

$$\mathrm{Br}^P(X) \to \mathrm{Br}^P(X_F) \to \mathrm{Br}^P(X_{\overline{F}}).$$

D'après (b), la composée est un isomorphisme. Pour X/k projective, lisse, rationnellement connexe, la variété de Picard est triviale. On a donc $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_F) = \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})$, et la proposition 3.19 donne

$$\mathrm{Br}(F) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X_F) \to \mathrm{Br}(X_{\overline{F}})]$$

et donc $\mathrm{Br}^P(X_F) \hookrightarrow \mathrm{Br}^P(X_{\overline{F}})$. On a donc $\mathrm{Br}^P(X) = \mathrm{Br}^P(X_F)$. □

Remarque 3.21. — Soit $X/\mathbb{C}$ une variété projective et lisse de dimension d. Si X est rétractilement rationnelle ou R-triviale, on a $\mathrm{Br}(X) = 0$. Comme on va voir au paragraphe 3.5, ceci vaut sous l'hypothèse plus générale que X est CH_0-triviale. Pour une telle variété, on a donc $H^1_{Betti}(X, \mathbb{Z}) = 0$, $H^2_{Betti}(X, \mathbb{Z})_{tors} = 0$ et $H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z})_{tors} = 0$. Par diverses dualités, ceci implique $H^{2d-1}_{Betti}(X, \mathbb{Z}) = 0$. En utilisant la décomposition de la diagonale, un argument de correspondance et des désingularisations, C. Voisin établit ces résultats. Elle établit aussi $H^{2d-2}_{Betti}(X, \mathbb{Z})_{tors} = 0$.

3.5. Cohomologie non ramifiée. — Références : [**17**], [**9**], [**27**], [**40**].

Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, κ_A son corps résiduel. Soit $n > 1$ un entier inversible dans κ_A. Pour tous entiers $j \in \mathbb{Z}$ et $i \geq 1$, on dispose d'une application résidu entre groupes de cohomologie galoisienne

$$\partial_A : H^i(K, \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(\kappa_A, \mu_n^{\otimes j-1}).$$

Pour k un corps, X une k-variété lisse connexe de corps des fonctions $k(X)$ et $n > 0$ entier premier à la caractéristique de k, on définit

$$H^i_{nr}(X/k, \mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} [\mathrm{Ker}\partial_x : H^i(k(X), \mu_n^{\otimes j}) \to H^{i-1}(k(x), \mu_n^{\otimes j-1})].$$

Ici x parcourt les points de codimension 1 de X et $k(x)$ est le corps résiduel en x.

Soit $\mathcal{H}^i_X(\mu_n^{\otimes j})$ le faisceau Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^i_{\text{ét}}(U, \mu_n^{\otimes j})$.

La conjecture de Gersten pour la cohomologie étale (théorème de Bloch–Ogus–Gabber, voir [**16**]) implique :

• Le faisceau Zariski $\mathcal{H}^i_X(\mu_n^{\otimes j})$ est un sous-faisceau du faisceau constant défini par $H^i(k(X), \mu_n^{\otimes j})$. C'est un foncteur contravariant sur la catégorie des k-variétés propres, lisses, connexes.

• On a $H^0(X, \mathcal{H}^i_X(\mu_n^{\otimes j})) = H^i_{nr}(X/k, \mu_n^{\otimes j})$.

• Si X est propre, lisse, connexe, le groupe $H^i_{nr}(X/k,\mu_n^{\otimes j})$ coïncide avec

$$H^0(X,\mathcal{H}^i_X(\mu_n^{\otimes j}))\subset H^i_{nr}(X/k,\mu_n^{\otimes j}).$$

• Si X est propre, lisse, connexe, ce groupe coïncide avec

$$\bigcap_A [\mathrm{Ker}\partial_A : H^i(k(X),\mu_n^{\otimes j})\to H^{i-1}(\kappa_A),\mu_n^{\otimes j-1})],$$

où A parcourt tous les anneaux de valuation discrète contenant k et de corps des fractions $k(X)$. Ceci peut aussi s'écrire :

$$\bigcap_A H^i_{\text{ét}}(A,\mu_n^{\otimes j})\subset H^i(k(X),\mu_n^{\otimes j}).$$

Sans restriction sur la caractéristique de k, on définit aussi

$$\mathrm{Br}_{nr}(X)=\bigcap_A \mathrm{Br}(A)\subset \mathrm{Br}(k(X)).$$

Un résultat de pureté assure $\mathrm{Br}(X)=\mathrm{Br}_{nr}(X)\subset \mathrm{Br}(k(X))$.

• Pour tout entier $m\geq 1$, on a

$$H^i(k,\mu_n^{\otimes j})\xrightarrow{\simeq} H^i_{nr}(k(\mathbf{P}^m_k)/k,\mu_n^{\otimes j}).$$

On a les propriétés suivantes :

$$H^1_{nr}(k(X)/k,\mathbb{Z}/n)=H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}/n).$$

$$H^2_{nr}(k(X)/k,\mu_n)=\mathrm{Br}(X)[n],$$

où $\mathrm{Br}(X)[n]$ est le sous-groupe de n-torsion du groupe de Brauer de X.

Les groupes $H^i_{nr}(X/k,\mu_n^{\otimes j})$ sont fonctoriels contravariants pour les k-morphismes quelconques de k-variétés propres, lisses, connexes. Ceci résulte de la formule

$$H^i_{nr}(X/k,\mu_n^{\otimes j})=H^0(X,\mathcal{H}^i_X(\mu_n^{\otimes j})).$$

En particulier pour toute k-variété X propre, lisse, géométriquement connexe, pour tout corps F contenant k on dispose d'accouplements

$$X(F)\times H^i_{nr}(X_F/F,\mu_n^{\otimes j})\to H^i(F,\mu_n^{\otimes j})$$

qui, par fonctorialité, passent au quotient par la R-équivalence :

$$X_F(F)/\mathrm{R}\times H^i_{nr}(X_F/F,\mu_n^{\otimes j})\to H^i(F,\mu_n^{\otimes j}).$$

Pour toute k-variété projective, lisse, connexe X, on dispose d'accouplements

$$CH_0(X_F)\times H^i_{nr}(X_F/F,\mu_n^{\otimes j})\to H^i(F,\mu_n^{\otimes j}).$$

Ceci vaut plus généralement dans le cadre des modules de cycles de Rost [**36**, Cor. 2.9]. Pour l'énoncé analogue pour l'accouplement avec le groupe de Brauer, y compris sa p-torsion en caractéristique p, voir [**2**].

La proposition 3.6 donne alors :

Proposition 3.22. — *Soit X une k-variété propre lisse géométriquement connexe. Si X est presque* R*-triviale, pour tous i, j, $n > 1$ premier à la caractéristique de k et tout corps F contenant k, on a*

$$H^i(F, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\simeq} H^i_{nr}(X_F/F, \mu_n^{\otimes j})$$

et $\mathrm{Br}(F) = \mathrm{Br}(X_F)$.

Démonstration. — Pour le voir, il suffit de monter sur le corps $K = k(X)$ est d'utiliser le fait que le point générique est R-équivalent à un point de $X(k) \subset X(k(X))$. □

Corollaire 3.23. — *Soit X une k-variété projective lisse géométriquement connexe. Si X est rétractilement rationnelle, alors, pour tous i, j, et tout corps F contenant k, on a*

$$H^i(F, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\simeq} H^i_{nr}(X_F/F, \mu_n^{\otimes j})$$

et $\mathrm{Br}(F) = \mathrm{Br}(X_F)$.

Via la proposition 3.6, ceci résulte de l'énoncé précédent, sauf dans le cas d'un corps k fini. Dans ce cas on monte sur des extensions finies de k suffisamment grosses et on utilise un argument de norme. □

Proposition 3.24. — *Si une k-variété projective et lisse géométriquement connexe X est CH_0-triviale, alors, pour tous i, j, et tout corps F contenant k, on a*

$$H^i(F, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\simeq} H^i_{nr}(X_F/F, \mu_n^{\otimes j})$$

et $\mathrm{Br}(F) = \mathrm{Br}(X_F)$.

Cet énoncé implique le précédent, mais sa démonstration est un peu plus élaborée, car elle passe par l'accouplement avec le groupe de Chow.

On a des énoncés analogues aux précédents en remplaçant les groupes de cohomologie galoisienne $H^\bullet(F, \mu_n^{\otimes \bullet})$ des corps F par les modules de cycles de Rost des corps F, par exemples par les groupes $K_i^M(F)$ ($i \in \mathbb{N}$) de K-théorie de Milnor des corps. Voir à ce sujet l'article de Merkurjev [**36**], qui montre que la trivialité universelle de tous les invariants non ramifiés de tous les modules de cycles de Rost pour une k-variété projective lisse connexe donnée X est équivalente au fait que cette variété est CH_0-triviale [**36**, Thm. 2.11].

3.6. Calcul du groupe de Brauer non ramifié. — Pour X une $\mathbb{C}$-variété projective, lisse, rationnellement connexe, la formule

$$\mathrm{Br}(X) \stackrel{\simeq}{\to} H^3_{Betti}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{tors}$$

donnée ci-dessus est théoriquement satisfaisante. Mais en pratique, quand on se donne une variété concrète, elle a tendance à être singulière. ll faudrait la désingulariser, ce qui en grande dimension est difficile, en outre il faut ensuite calculer sur un modèle projectif et lisse le groupe $H^3_{Betti}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{tors}$. C'est ce qu'avaient fait Artin et Mumford [**1**] pour une variété de dimension 3 fibrée en coniques sur le plan projectif complexe.

Dans [**17**], avec M. Ojanguren, on a donné une autre façon d'établir $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}) \neq 0$ pour des fibrations en coniques X sur le plan complexe.

Si X est une conique lisse C sur un corps k, sans k-point rationnel, de corps des fonctions $k(C)$, la suite exacte de la Proposition 3.19 se spécialise en une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(C) \to 0.$$

Si car.$(k) \neq 2$ et C est donnée par l'équation homogène $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$, le noyau de $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(C)$ – qui est aussi le noyau de $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(C))$ car $\mathrm{Br}(C)$ s'injecte dans $\mathrm{Br}(k(C))$ puisque C est lisse – est engendré par la classe de l'algèbre de quaternions (a, b). Ce résultat remonte à Witt, et fut étendu aux variétés de Severi-Brauer par F. Châtelet.

Le point de vue "birationnel" adopté par Ojanguren et moi dans [**17**] est dans ses grandes lignes le suivant. On a une variété projective et lisse (non explicite) X sur $\mathbb{C}$ munie d'une fibration $p : X \to S = \mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ dont la fibre générique est une conique $C/\mathbb{C}(S)$ sans point rationnel (i.e. la fibration n'a pas de section rationnelle). La fibration dégénère le long d'une union finie de courbes intègres $D_i \subset S$. On dispose de la classe $\alpha \in \mathrm{Br}(\mathbb{C}(S))$ de la conique générique, d'ordre 2, non nulle, qui engendre le noyau de l'application

$$\mathrm{Br}(\mathbb{C}(S)) \to \mathrm{Br}(\mathbb{C}(X)).$$

Comme $S = \mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$, on a $\mathrm{Br}(S) = 0$, et l'application résidu en tous les points de codimension 1 de S donne une injection

$$\delta : \mathrm{Br}(\mathbb{C}(S)) \hookrightarrow \oplus_{x \in S^{(1)}} H^1(\mathbb{C}(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

La classe α a un nombre fini de résidus non triviaux, correspondant aux points où la fibration dégénère. Sous des hypothèses sur la dégénérescence, on exhibe une autre classe $\beta \in \mathrm{Br}(\mathbb{C}(S))$ dont le résidu total $\delta(\beta)$ est non nul et formé d'un sous-ensemble propre des $\delta_x(\alpha)$. Par comparaison avec les résidus aux points de codimension 1 de X, qui implique une discussion précise de la situation aux points de codimension 2 de S, mais ne requiert pas la connaissance d'un modèle projectif et lisse explicite de X, ceci assure que β devient non ramifié dans $\mathrm{Br}(\mathbb{C}(X))$, et assure par ailleurs que β n'est pas dans

$\mathbb{Z}/2 = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(\mathbb{C}(S) \to \mathrm{Br}(\mathbb{C}(X))]$. Ainsi $\mathrm{Br}_{nr}(\mathbb{C}(X)) \neq 0$, et la variété X n'est pas rétractilement rationnelle, ni même CH_0-triviale.

3.7. Calcul de la cohomologie non ramifiée de degré supérieur. — Pour X une variété projective lisse rationnellement connexe sur $\mathbb{C}$, on ne dispose pas pour les invariants cohomologiques supérieurs $H^i_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $i \geq 3$, d'un analogue des différents énoncés de la proposition 3.20. De fait il est peu probable que ces invariants soient constants dans une famille projective et lisse de telles variétés (voir [**23**] pour une discussion).

Pour X comme ci-dessus, on a un certain nombre de résultats intéressants en degré $i = 3$, et quelque résultats en degré $i > 3$. Je renvoie ici le lecteur aux travaux [**23**], [**46**] et [**10**]. Dans [**23**], avec C. Voisin, on établit un lien entre $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2.

Le cas des hypersurfaces cubiques dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 4$, a été particulièrement étudié, en particulier par C. Voisin [**46**], voir aussi [**10**]. Pour de telles hypersurfaces, on a $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$. Pour F un corps contenant $\mathbb{C}$, on sait que l'application

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour $n \geq 5$. Pour $n = 4$, la question est ouverte et importante (voir le corollaire 3.23 et la proposition 3.24).

Comme on a vu ci-dessus, le point de vue birationnel adopté dans [**17**] pour revisiter l'exemple d'Artin et Mumford repose sur le fait que sur un corps k de caractéristique différente de 2, et pour une conique C sur k d'équation homogène $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$, avec $a, b \in k^*$, le noyau de l'application $H^2(k, \mathbb{Z}/2) \to H^2(k(C), \mathbb{Z}/2)$ est d'ordre au plus 2, engendré par la classe de l'algèbre de quaternions (a, b), qui est aussi la classe du cup produit de la classe $a \in k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ et de la classe $b \in k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2)$. Sur un corps k de caractéristique différente de 2, pour tout entier $n \geq 1$, et pour $a_1, \ldots, a_n \in k^*$, la n-forme de Pfister $<< a_1, \ldots, a_n >>$ est la forme quadratique en 2^n variables définie par $< 1, -a_1 > \otimes \cdots \otimes < 1, -a_n >$. De telles formes ont la propriété qu'elles sont hyperboliques dès qu'elles sont isotropes. On appelle voisine de Pfister d'une n-forme de Pfister ψ une sous-forme ϕ de ψ de rang strictement plus grand que 2^n. Les quadriques définies par une forme de Pfister et par une voisine de cette forme sont stablement k-birationnellement équivalentes. C'est ainsi le cas de la conique d'équation $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ et de la quadrique de $\mathbf{P}^3_k$ d'équation $x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2 = 0$.

Une généralisation de la propriété remarquable des coniques décrites ci-dessus est le théorème suivant.

Théorème 3.25. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit $<< a_1, \ldots, a_n >>$ une n-forme de Pfister. Soit $Q \subset \mathbf{P}^{2^n-1}$ la quadrique lisse qu'elle définit. Le noyau de l'application naturelle de groupes de cohomologie galoisienne*

$$H^n(k, \mathbb{Z}/2) \to H^n(k(Q), \mathbb{Z}/2)$$

est engendré par le cup-produit $(a_1) \cup \ldots (a_n)$, et il est non nul si et seulement si la forme de Pfister est anisotrope, i.e. la quadrique Q n'a pas de k-point.

Ce théorème fut établi pour $n = 3$ en 1974 par Arason, avant les résultats spectaculaires de Merkurkev et Suslin. Il fut établi pour $n = 4$ par Jacob et Rost en 1989, et obtenu pour tout n par Orlov, Vishik et Voevodsky [**38**] en 2007 comme conséquence des travaux de Voevodsky sur la conjecture de Milnor.

Remarque 3.26. — Le résultat d'Arason avait été précédé par un résultat analogue d'Arason et Pfister (voir [**17**, Thm. 1.7]) pour les groupes de Witt du corps des fonctions d'une quadrique (voisine) de Pfister, résultat fin mais nettement plus élémentaire qu'on peut aussi utiliser pour établir beaucoup des énoncés de non rationalité (voir l'appendice de [**17**]).

Une fois le point de vue birationnel adopté dans [**17**], il est devenu clair comment étendre les résultats de non rationalité en dimension supérieure. Dans [**17**], avec Ojanguren, nous construisons des variétés a priori singulières Y munies d'une fibration sur $\mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$ dont la fibre générique est définie par une voisine d'une 3-forme de Pfister anisotrope $<< a_1, a_2, b_3c_3 >>$ sur le corps $\mathbb{C}(\mathbf{P}^3)$, telle que la classe $\beta = (a_1, a_2, b_3) \in H^3(\mathbb{C}(\mathbf{P}^3), \mathbb{Z}/2)$ soit non nulle, car ramifiée sur $\mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$, différente de $\alpha = (a_1, a_2, a_3) \in H^3(\mathbb{C}(\mathbf{P}^3), \mathbb{Z}/2)$, car les ramifications sur $\mathbf{P}^3_{\mathbb{C}}$ diffèrent, et dont l'image $\beta_{\mathbb{C}(X)}$ est dans $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}, \mathbb{Z}/2)$ car la ramification de β est “mangée” par celle de α. Comme on a

$$\beta \notin \{0, \alpha\} \subset H^3(\mathbb{C}(\mathbf{P}^3), \mathbb{Z}/2),$$

le théorème 3.25, dans le cas $n = 3$ (Arason) assure alors $\beta_{\mathbb{C}(X)} \neq 0$.

Pour accomplir le programme, il faut trouver les éléments $a_1, a_2, b_3, c_3 \in \mathbb{C}(\mathbf{P}^3)$. On les obtient dans [**17**] comme des produits d'un nombre assez grand de formes linéaires.

Dans [**43**], Schreieder a réussi à faire des constructions analogues sur $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ pour tout n (les a_i, b_j, c_j faisant ici intervenir des formes homogènes de degré 2 sur $\mathbf{P}^n$). Le théorème 3.25 donne alors des variétés X munies d'une fibration sur $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ dont la fibre générique est une (voisine d'une) n-quadrique de Pfister et qui satisfont $H^n_{nr}(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/2) \neq 0$, et qui donc ne sont pas rétractilement rationnelles.

On trouve d'autres utilisations de ces idées dans des travaux d'E. Peyre et de A. Asok.

Remarque 3.27. — Soit k un corps. Soit $Q \subset \mathbf{P}^n_k$, $n \geq 2$ une quadrique lisse. L'application $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(Q) = \mathrm{Br}_{nr}(k(Q)/k)$ est surjective. Pour $i \geq 3$, et car.$(k) \neq 2$, le conoyau de

$$H^i(k, \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(i-1)) \to H^i_{nr}(k(Q)/k, \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}_2(i-1))$$

a été étudié par Kahn, Rost, Sujatha. Pour $i = 3$, ils ont montré que l'application est surjective, sauf peut-être si Q est définie par une forme d'Albert $< -a, -b, ab, c, d, -cd >$.

3.8. Différentielles. — L'énoncé suivant est établi par Totaro dans [**45**].

Proposition 3.28. — *Soit X une k-variété projective et lisse connexe sur un corps k. Si X est CH_0-triviale, alors $H^0(X, \Omega^i) = 0$ pour tout entier $i > 0$.*

La démonstration utilise des applications cycles à valeurs dans diverses théories cohomologiques, et des arguments de correspondances.

Proposition 3.29. — *Soit k un corps. Soit F un foncteur contravariant de la catégorie des k-schémas vers la catégorie des ensembles. Supposons que pour toute k-variété lisse intègre U la flèche $F(U) \to F(\mathbf{P}^1_U)$ induite par la projection $\mathbf{P}^1_U \to U$ soit une bijection. Soit X une k-variété propre, intègre, génériquement lisse. Si X est presque* R*-triviale, alors il existe un ouvert lisse non vide $U \subset X$ tel que*

$$Im(F(X) \to F(U)) = Im(F(k) \to F(U)),$$

la flèche $F(k) \to F(U)$ étant donnée par la projection $U \to \mathrm{Spec}\ (k)$.

Démonstration. — Soit $U \subset X$ un ouvert, et soit $g : \mathbf{P}^1 \times_k U \to X$ un k-morphisme. Soient f_1, f_2 deux sections de la projection $p : \mathbf{P}^1 \times_k U \to U$. Alors les applications $F(X) \to F(U)$ définies par $(g \circ f_1)^*$ et $(g \circ f_2)^*$ coïncident. En effet pour tout $\alpha \in F(X)$, on a $g^*(\alpha) = p^*(\beta)$, et donc $f_i^* \circ g^*(\alpha) = f_i^* \circ p^*(\beta) = \beta$ pour $i = 1, 2$.

Soit $F = k(X)$ le corps des fonctions de X et soit $\eta \in X$ le point générique. Il existe $n \in X(k)$ tel que sur X_F, les points $\eta \in X_F(F)$ et $n_F \in X_F(F)$ sont R-équivalents. Comme X est propre sur k, ceci implique qu'il existe un ouvert non vide $U \subset X$ et une famille finie de k-morphismes $f_i : \mathbf{P}^1 \times U \to X$, $i = 0, \ldots, s$, tels que $f_0(0, u) = u$, que $f_s(1, u) = n$, et que $f_i(1, u) = f_{i+1}(0, u)$ pour $0 \leq i < s$. L'énoncé résulte alors de ce qui précède. □

Proposition 3.30. — *Soient k un corps infini et X une k-variété propre et lisse, géométriquement connexe. Si X est presque* R*-triviale, alors $H^0(X, (\Omega^i)^{\otimes m}) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout $m > 0$.*

Démonstration. — Pour toute k-variété lisse intègre U, tout entier $i > 0$, tout entier $m > 0$, la flèche de restriction

$$H^0(U, (\Omega^i)^{\otimes m}) \to H^0(\mathbf{P}^1_U, (\Omega^i)^{\otimes m})$$

est un isomorphisme, comme on voit en utilisant la formule donnant le faisceau des différentielles sur un produit de k-variétés, et en utilisant le fait que sur la droite projective, on a $\Omega^1_{\mathbf{P}^1} = O_{\mathbf{P}^1}(-2)$, et donc, pour tout $m > 0$, toute section de $(\Omega^1_{\mathbf{P}^1})^{\otimes m}$ est nulle. On applique alors la proposition précédente au foncteur $U \mapsto H^0(U, (\Omega^i)^{\otimes m})$, et on utilise le fait que l'application de restriction $H^0(X, (\Omega^i)^{\otimes m}) \to H^0(U, (\Omega^i)^{\otimes m})$ est injective. □

3.9. Composantes connexes réelles. —

Théorème 3.31. — *Soit $\mathbb{R}$ le corps des réels. Soit X une $\mathbb{R}$-variété projective, lisse, géométriquement connexe, de dimension d. Soit $s \geq 0$ le nombre de composantes connexes de $X(\mathbb{R})$.*

(a) L'entier s est un invariant birationnel stable.

(b) Si X est rétractilement rationnelle, alors $s = 1$.

(c1) Pour $s \geq 1$, on a $CH_0(X)/2 = (\mathbb{Z}/2)^s$.

(c2) Si deux points de $X(\mathbb{R})$ sont rationnellement équivalents sur X, alors ils appartiennent à la même composante connexe de $X(\mathbb{R})$.

(d1) Si $s = 0$, pour tout entier $m \geq d+1$, on a $H^m_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) = 0$.

(d2) Si $s \geq 1$, pour tout entier $m \geq d+1$, on a $H^m_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) = (\mathbb{Z}/2)^s$.

(e) Si X est géométriquement rationnellement connexe, deux points de $X(\mathbb{R})$ sont R*-équivalents si et seulement si ils sont dans la même composante connexe.*

Démonstration. — Pour (a), il suffit de voir que si $U \subset X$ est un fermé de codimension au moins 2, alors $U(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{R})$ induit une bijection sur les composantes connexes. On utilise alors le fait qu'une k-application rationnelle d'une k-variété lisse dans une k-variété propre est définie en dehors d'un fermé de codimension au moins 2. Sous l'hypothèse de (b), il existe un ouvert de Zariski $U \subset X$ tel que l'image de $U(\mathbb{R})$ dans $X(\mathbb{R})$ soit formé de points directement R-liés sur X, donc dans la même composante connexe de $X(\mathbb{R})$. Comme pour la $\mathbb{R}$-variété lisse X tout point de $X(\mathbb{R})$ est limite de points de $U(\mathbb{R})$, ceci suffit à conclure que $X(\mathbb{R})$ est connexe. Pour (c), voir CT-Ischebeck [**15**]. Pour (d), voir CT-Parimala [**18**]. L'énoncé (e) fut établi par Kollár [**32**]. □

En dimension $d = 1$, tous ces énoncés remontent à Witt. C'est B. Segre [**44**] qui le premier remarqua que les surfaces cubiques lisses X sur $\mathbb{R}$, qui sont toutes $\mathbb{R}$-unirationnelles, ne sont pas $\mathbb{R}$-rationnelles si $X(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

4. Surfaces géométriquement rationnelles

Théorème 4.1. — *(Enriques, Manin, Iskovskikh, Mori) Soient k un corps et X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Alors X est k-birationnelle à une telle k-surface de l'un des deux types suivants :*

(i) Surface de del Pezzo de degré d, avec $1 \leq d \leq 9$.

(ii) Surface X munie d'une fibration relativement minimale $X \to D$, où D est une conique lisse, la fibre générique est une conique lisse, et toutes les fibres sont des coniques avec au plus un point singulier.

Rappelons que les surfaces de del Pezzo de degré 3 sont les surfaces cubiques lisses.

C'est une question ouverte depuis longtemps si une k-surface comme dans le théorème, dès qu'elle possède un k-point, est k-unirationnelle. C'est connu pour les surfaces cubiques. Une réponse affirmative impliquerait que les variétés complexes de dimension 3 fibrées en coniques sur le plan $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ sont unirationnelles, ce qui est une question ouverte encore plus connue.

Une question générale (Sansuc et l'auteur) sur les surfaces du type ci-dessus est : dans quelle mesure le module galoisien $\mathrm{Pic}(X^s)$ (qui est un groupe abélien de type fini) et les objets qui lui sont attachés contrôlent-ils la géométrie et l'arithmétique de X ? En particulier, a-t-on la réciproque du théorème 3.17 (c) :

Question 1 CT-Sansuc 1977) : *Si $X(k) \neq \emptyset$ et le module galoisien* $\mathrm{Pic}(X^s)$ *est un facteur direct d'un module de permutation, la k-variété X est-elle facteur direct birationnel d'un espace projectif $\mathbf{P}^n_k$?*

La K-théorie algébrique (idées de S. Bloch, théorème de Merkurjev-Suslin) a permis d'établir pour ces surfaces, sans analyse cas par cas, la réciproque du Théorème 3.17 (b).

Théorème 4.2. — [**8**] *Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, possédant un zéro-cycle de degré 1. Si le module galoisien* $\mathrm{Pic}(X^s)$ *est un facteur direct d'un module de permutation, alors X est CH_0-triviale.*

Voici quelques rappels de CT-Sansuc [**22**]. Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Soit $\mathrm{Pic}(X^s)$ le module galoisien défini par le groupe de Picard. C'est le groupe des caractères $\hat{S}$ d'un k-tore S. Pour tout k-tore T, on a une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to H^1(k,T) \to H^1_{\text{ét}}(X,T) \to \mathrm{Hom}_g(\hat{T},\hat{S}) \to H^2(k,T) \to H^2_{\text{ét}}(X,T),$$

où la cohomologie est la cohomologie étale. Si X possède un k-point, la flèche $H^2(k,T) \to H^2_{\text{ét}}(X,T)$ a une rétraction, donc on a une suite exacte

$$0 \to H^1(k,T) \to H^1_{\text{ét}}(X,T) \to \mathrm{Hom}_g(\hat{T},\hat{S}) \to 0.$$

On appelle torseur universel sur X un torseur $\mathcal{T} \to X$ sous le k-tore S dont la classe dans $H^1_{\text{ét}}(X, S)$ a pour image l'identité dans $\text{Hom}_g(\hat{S}, \hat{S})$. Si X possède un k-point $P \in X(k)$, il existe un torseur universel, et on peut le fixer (à automorphisme de S-torseur près) en demandant que sa fibre en P soit triviale, ce qui équivaut au fait qu'il existe un k-point de $\mathcal{T}$ d'image P dans X.

Un torseur universel $\mathcal{T}$ sur une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle est une k-variété géométriquement rationnelle (ouverte) de dimension $2 + \text{rang}(\text{Pic}(X^s))$.

Question 2 (CT-Sansuc 1977). *Sur une k-surface projective et lisse géométriquement rationnelle X, les torseurs universels $\mathcal{T}$ avec un k-point sont-ils k-rationnels ?*

Ceci a été établi pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$ avec au plus 4 fibres géométriques non lisses. C'est d'ailleurs ce qui a mené aux exemples de variétés stablement rationnelles non rationnelles [**5**]. La question est déjà ouverte pour les surfaces cubiques $X \subset \mathbf{P}^3_k$ d'équation $x^3 + y^3 + z^3 + at^3 = 0$ avec $a \notin k^{*3}$.

En 1977, Sansuc et moi avions établi que si Y_c est une compactification lisse d'un k-torseur universel $\mathcal{T}$ alors $\text{Pic}(\overline{Y}_c)$ est un g-module de permutation, et $\text{Br}(Y_c)/\text{Br}(k) = 0$. Pour tester l'éventuelle non rationalité des torseurs universels sur les surfaces géométriquement rationnelles, on peut essayer de calculer les invariants cohomologiques supérieurs $H^i_{nr}(k(\mathcal{T})/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1))$. Dans sa thèse, Yang CAO a établi le théorème suivant, qui s'applique en particulier aux surfaces cubiques lisses, et donne $H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = H^3_{nr}(k(\mathcal{T})/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour $X \subset \mathbf{P}^3_k$ surface cubique d'équation $x^3 + y^3 + z^3 + at^3 = 0$.

Théorème 4.3. — [**6**] *Soit X une surface projective, lisse connexe, géométriquement rationnelle sur un corps k. Si X n'est pas k-birationnelle à une surface de del Pezzo k-minimale de degré 1, et si $\mathcal{T}$ est un torseur universel sur X avec un k-point, $H^3_{nr}(k(\mathcal{T})/k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est un groupe de torsion 2-primaire.*

Soit k un corps de caractéristique différente de 2 possédant une extension finie $L = k[t]/P(t)$ de degré 3, de clôture galoisienne K/k de groupe S_3, et soit $k(\sqrt{a})$ l'extension discriminant. Dans [**5**], on a montré que la surface géométriquement rationnelle d'équation affine $y^2 - az^2 = P(x)$ est stablement k-rationnelle mais non k-rationnelle. Ceci fut utilisé dans [**5**] pour donner des exemples de variétés de dimension 3 sur $\mathbb{C}$ qui sont stablement rationnelles mais non rationnelles.

Hassett avait soulevé la question si de tels exemples existent sur un corps k parfait dont la clôture algébrique est procyclique, par exemple sur un corps fini.

Le théorème suivant, qu'on confrontera avec la question 1 ci-dessus, n'admet pour l'instant qu'une démonstration extrêmement calculatoire, passant par l'analyse (faite par plusieurs auteurs) de toutes les actions possibles du groupe de Galois absolu sur le groupe de Picard géométrique des surfaces de del Pezzo de degré 3, 2, 1, ce qui implique des groupes de Weyl de type E_6, E_7, E_8.

Théorème 4.4. — [**13**] *Soient k un corps et X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Supposons que X possède un point k-rationnel et que X soit déployée par une extension cyclique de k. Si X n'est pas k-rationnelle, alors il existe une extension finie séparable k'/k telle que* $\mathrm{Br}(X_{k'})/\mathrm{Br}(k') = H^1(k', \mathrm{Pic}(X^s)) \neq 0$, *et alors X n'est pas stablement k-rationnelle.*

Soit X déployée par une extension cyclique de k. Si l'on suppose $\mathrm{Br}(X_{k'})/\mathrm{Br}(k') = H^1(k', \mathrm{Pic}(X^s)) = 0$ pour toute extension séparable k' de k, on peut montrer (Endo-Miyata) que $\mathrm{Pic}(X^s)$ est un facteur direct d'un module de permutation. Tout torseur universel $\mathcal{T}$ avec un k-point est alors k-birationnel à $X \times_k S$. Si de tels torseurs universels étaient automatiquement k-rationnels (question 2 ci-dessus), l'hypothèse $\mathrm{Br}(X_{k'})/\mathrm{Br}(k') = 0$ pour tout k'/k fini impliquerait que X est facteur direct d'une k-variété k-rationnelle.

5. Hypersurfaces cubiques

5.1. Rationalité, unirationalité, CH_0-trivialité. — Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ avec $n \geq 3$ une hypersurface cubique lisse avec $X(k) \neq \emptyset$. On sait que X est k-unirationnelle (B. Segre, Manin, Kollár). Si X contient une k-droite, alors X est k-unirationnelle de degré 2. Pour car.$(k) \neq 3$, il en est ainsi de l'hypersurface cubique de Fermat $X_n \subset \mathbf{P}^n_k$ définie par l'équation :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^3 = 0.$$

Je renvoie à [**4**] pour plus de rappels et des références à la littérature.

Pour tout $n = 2m+1 \geq 3$ impair, il existe des hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^n_k$ qui sont k-rationnelles. C'est le cas de celles qui contiennent une paire globalement k-rationnelle d'espaces linéaires Π_1, Π_2, chacun défini sur une extension au plus quadratique séparable de k, et sans point commun. Il en est ainsi de l'hypersurface cubique de Fermat X_{2m+1}. Elle possède une paire globalement k-rationnelle de sous-espaces linéaires de dimension m gauches l'un à l'autre, à savoir

$$x_0 + jx_1 = x_2 + jx_3 = \cdots = x_{2m} + jx_{2m+1} = 0$$

et son conjugué (j est une racine primitive cubique de 1).

Pour simplifier, supposons dans la suite de ce paragraphe $k = \mathbb{C}$, et considérons des hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 3$.

Toute hypersurface cubique $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 3$ contient une droite, et est donc est unirationnelle de degré 2.

Si une hypersurface cubique est aussi unirationnelle de degré impair, alors elle est CH_0-triviale et tous les invariants de type cohomologie non ramifiée sont universellement triviaux. On ne sait pas si X est alors rétractilement rationnelle.

Un théorème fameux de Clemens et Griffiths dit qu'aucune X dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ n'est rationnelle. Pour $n = 2m$ pair quelconque on ne connaît aucune X dans $\mathbf{P}^{2m}_{\mathbb{C}}$ qui soit rationnelle, ou même rétractilement rationnelle. Mais par ailleurs il n'en existe à ce jour aucune dont on sache qu'elle n'est pas rétractilement rationnelle.

C. Voisin a montré que sur une union dénombrable de fermés de codimension 3 de leur espace de modules, les hypersurfaces cubiques $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ correspondantes sont CH_0-triviales.

Hassett et Tschinkel ont décrit des classes d'hypersurfaces cubiques de $\mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ qui sont unirationnelles de degré impair. Dans [**11**] on en donne dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ pour tout n de la forme $6m-1, 6m+1, 6m+3$. Elles sont "presque diagonales" mais plus générales que l'hypersurface de Fermat.

Hassett, et d'autres, ont décrit des sous-variétés de l'espace de modules des hypersurfaces cubiques de $\mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ dont les hypersurfaces correspondantes sont rationnelles (outre celles contenant deux plans gauches congugués). Ces sous-variétés sont contenues dans une union dénombrable de diviseurs "spéciaux" de l'espace de modules.

C. Voisin [**47**] a montré que sur beaucoup de ces diviseurs spéciaux, les hypersurfaces cubiques correspondantes de $\mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ sont CH_0-triviales.

Soit X une k-variété projective, lisse, connexe. Suivant [**47**], on définit la CH_0-dimension essentielle $\delta(X)$ de X comme la plus petite dimension d'une $\mathbb{C}$-variété Y projective, lisse, connexe munie d'un morphisme $Y \to X$ tel que pout tout corps F contenant $\mathbb{C}$, l'application induite $CH_0(Y_F) \to CH_0(X_F)$ soit surjective.

C. Voisin [**47**] a montré que pour les hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ *très générales* avec $n = 5$ ou $n \geq 4$ pair, si $\delta(X) < \dim(X)$, alors $\delta(X) = 0$, i.e. X est CH_0-triviale.

5.2. Hypersurfaces cubiques presque diagonales. — Dans [**11**] je donne en toute dimension des classes explicites d'hypersurfaces cubiques lisses complexes qui sont CH_0-triviales. Certains des résultats valent sur un corps non algébriquement clos, comme on va le voir. Voici une variation sur la proposition 3.5 de l'article [**11**].

Proposition 5.1. — *Soient k un corps et X une k-variété projective et lisse telle que $H^1(X, O_X) = 0$, possédant un k-point. S'il existe une courbe Γ/k projective, lisse, connexe, avec un k-point, et un k-morphisme $\Gamma \to X$ tels que, pour tout corps F, l'application induite $CH_0(\Gamma_F) \to CH_0(X_F)$ soit surjective, alors, pour tout corps F, l'application $\deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, en d'autres termes la k-variété X est CH_0-triviale.*

Démonstration. — Soit J la jacobienne de Γ. Pour tout corps F, on a $A_0(\Gamma_F) = J(F)$. Notons $K = k(X)$ le corps des fonctions de X. L'hypothèse $H^1(X, O_X) = 0$ implique que la variété d'Albanese de X est triviale. Un point de $J(k(X))$ définit une k-application rationnelle de X dans J, donc un k-morphisme de X dans J car une application rationnelle d'une variété lisse dans une variété abélienne est partout définie (A. Weil). Mais comme la variété d'Albanese de X est triviale, tout tel morphisme est constant. On a donc $J(k) = J(k(X))$. Ainsi l'image de $A_0(\Gamma_K)$ dans $A_0(X_K)$ est dans l'image de l'application composée

$$J(k) = A_0(\Gamma) \to A_0(X) \to A_0(X_K).$$

Par hypothèse, l'application $A_0(\Gamma_K) \to A_0(X_K)$ est surjective. Ainsi la restriction $CH_0(X) \to CH_0(X_K)$ est surjective, et en particulier la classe du point générique η de X, qui définit un point de $X(K)$, a une classe dans $CH_0(X_K)$ qui est dans l'image de $CH_0(X)$. D'après la proposition 3.11 (Merkurjev), ceci assure que la k-variété X est CH_0-triviale. □

Remarque 5.2. — Soit $k = \mathbb{C}$. L'énoncé ci-dessus implique que si $CH_0(X) = \mathbb{Z}$, alors $\delta(X) \leq 1$ implique $\delta(X) = 0$. R. Mboro [**35**] a établi l'énoncé suivant. Supposons $CH_0(X) = \mathbb{Z}$, $H^2_{Betti}(X, \mathbb{Z})_{tors} = 0$ et $H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z}) = 0$. Alors $\delta(X) \leq 2$ implique $\delta(X) = 0$.

Théorème 5.3. — *Soit k un corps infini, de caractéristique différente de 3. Soient $f(x, y, z) \in k[x, y, z]$ et $g(u, v) \in k[u, v]$ des formes cubiques non singulières. Soit $X \subset \mathbf{P}^4_k$ l'hypersurface cubique lisse d'équation*

$$f(x, y, z) - g(u, v) = 0.$$

Faisons les hypothèses suivantes, qui sont satisfaites si k est un corps algébriquement clos :

(a) Il existe $a \in k^*$ tel que la surface cubique S de $\mathbf{P}^3_k$ d'équation $f(x, y, z) - at^3 = 0$ soit une surface k-rationnelle et que la courbe Γ de $\mathbf{P}^2_k$ d'équation $g(u, v) - at^3 = 0$ possède un k-point.

(b) L'hypersurface X contient une k-droite.

Alors l'hypersurface X est CH_0-triviale.

Démonstration. — On note $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le sous-groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro. L'hypothèse (b) implique que X est k-unirationnelle de degré 2, ce qui implique $2A_0(X_F) = 0$ pour tout corps F contenant k. On a une application rationnelle dominante, de degré 3, de $S \times \Gamma$ vers X, qui envoie le produit des variétés affines $f(x,y,z) - a = 0$ et $g(u,v) - a = 0$ vers le point de coordonnées homogènes $(x,y,z,u,v) \in X \subset \mathbf{P}^4_k$. En utilisant le fait que S est k-rationnelle, on montre que pour tout corps F contenant k, il existe un k-morphisme $f : \Gamma \to X$ tel que pour tout corps F contenant k, on ait $3CH_0(X_F) \subset f_*(CH_0(\Gamma_F)$. Comme on a $2A_0(X_F) = 0$, on en déduit $CH_0(X_F) \subset f_*(CH_0(\Gamma_F))$. La proposition 5.1 donne alors que X est CH_0-triviale. $\square$

L'énoncé ci-dessus se généralise en dimension supérieure [**11**, Prop. 3.7]. Les arguments de [**11**, Prop. 3.7 (i)] et la proposition ci-dessus permettent d'établir que, sur tout corps k de différente de 3, pour tout entier $n \geq 3$, impair ou non, l'hypersurface cubique de Fermat $X \subset \mathbf{P}^n_k$, $n \geq 3$, est CH_0-triviale. Pour tout $n = 2m \geq 4$, et $k = \mathbb{Q}$, c'est ainsi une question ouverte si cette hypersurface est rétractilement rationnelle, ou même stablement rationnelle sur le corps $\mathbb{Q}$.

Sur le corps $k = \mathbb{C}$, la méthode ci-dessus et des énoncés d'unirationalité plus ou moins classiques permettent d'établir l'énoncé général suivant.

Théorème 5.4. — [**11**, Thm. 3.8] *Toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ de dimension au moins 2 dont l'équation est donnée par une forme $\sum_i \Phi_i$, où les Φ_i sont à variables séparées et chacune a au plus 3 variables, est CH_0-triviale.*

6. Spécialisation

6.1. Spécialisation de la R-équivalence et de l'équivalence rationnelle sur les zéro-cycles. — L'énoncé suivant est “bien connu”. Pour une démonstration détaillée pour $\mathcal{X}/A$ projectif, on consultera la note de D. Madore [**33**]. Voir aussi [**30**].

Théorème 6.1. — *Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, k son corps résiduel. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma propre, $X = \mathcal{X} \times_A K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_A k$ la fibre spéciale. L'application de réduction $X(K) = \mathcal{X}(A) \to Y(k)$ induit une application $X(K)/\mathrm{R} \to Y(k)/\mathrm{R}$.*

Démonstration. — (Esquisse) Soit $\mathbf{P}^1_K \to X$ un K-morphisme. Par éclatements successifs de points fermés sur $\mathbf{P}^1_A$, on obtient $Z \to \mathbf{P}^1_A$ et un A-morphisme $Z \to \mathcal{X}$ étendant l'application rationnelle. La fibre Z_k est géométriquement un arbre, dont les composantes sont des droites projectives. Comme on voit par récurrence sur le nombre d'éclatements, la réunion T des composantes de Z_k obtenues par éclatement de k-points forme elle-même un arbre formé de droites projectives $\mathbf{P}^1_k$, dont les intersections deux à deux sont égales à un unique k-point, et tout k-point de Z_k est contenu dans T. Les points 0 et ∞ de $\mathbf{P}^1(K) = Z(K)$ s'étendent en des sections s_0 et s_∞ de $Z \to \mathrm{Spec}\ (A)$. Les spécialisations de ces sections au-dessus de Spec (k) sont des k-points de Z_k, qui sont dans le sous-arbre T. Les images de 0_K et ∞_K dans $Y(k)$ sont donc des points R-équivalents sur Y. □

Soient A un anneau de valuation discrète et $\pi \in A$ une uniformisante. Soient $\mathcal{X}$ un A-schéma projectif et plat, $\mathcal{X}_K$ la fibre générique et $\mathcal{X}_k$ la fibre spéciale.

Étant donné un point fermé $P \in \mathcal{X}_K$, notons $\tilde{P}$ son adhérence dans $\mathcal{X}$. C'est un A-schéma fini. On a une immersion fermée $\tilde{P} \times_A \mathrm{Spec}\ (k) \hookrightarrow \mathcal{X}_k$. On associe à ce A-schéma fini une combinaison linéaire à coefficients entiers de points fermés de $\mathcal{X}_k$. Les coefficients sont définis par les longueurs évidentes. Le zéro-cycle obtenu sur $\mathcal{X}_k$ peut aussi être vu comme le zéro-cycle associé au k-schéma découpé par $\pi = 0$ sur $\tilde{P}$.

Ceci définit une application linéaire $Z_0(\mathcal{X}_K) \to Z_0(\mathcal{X}_k)$. On vérifie que ce processus est fonctoriel covariant en les morphismes (propres) de A-schémas projectifs et plats.

Le théorème suivant est un cas particulier d'un théorème de Fulton pour les groupes de Chow de cycles de dimension quelconque.

Théorème 6.2. — *(Fulton) Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, k son corps résiduel, π une uniformisante. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma projectif et plat, $X = \mathcal{X} \times_A K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_A k$ la fibre spéciale. Il existe un unique homomorphisme de spécialisation*

$$CH_0(X) \to CH_0(Y)$$

qui associe à la classe d'un point fermé P de X d'adhérence $\tilde{P} \subset \mathcal{X}$ la classe du zéro-cycle associé au diviseur de Cartier découpé par $\pi = 0$ sur $\tilde{P}$.

C'est énoncé au début du §20.3 de [**24**], avec référence au §6.2 et au théorème 6.3. On part d'une suite exacte facile

$$CH_1(Y) \to CH_1(\mathcal{X}/A) \to CH_0(X) \to 0$$

établie au §1.8.

On utilise ensuite un homomorphisme de Gysin $i^! : CH_1(\mathcal{X}/A) \to CH_0(Y)$ introduit au §6.2. Il est démontré au Théorème 6.3 que le composé $CH_1(Y) \to CH_1(\mathcal{X}/A) \to CH_0(Y)$ est nul, en utilisant le fait que Y est un diviseur de Cartier principal sur $\mathcal{X}$. Ceci induit un homomorphisme de spécialisation $CH_0(X) \to CH_0(Y)$.

Autant que je puisse voir, le §2, et la Proposition 2.6 de [**24**], qui utilisent un homomorphisme de Gysin $i^* : CH_1(\mathcal{X}/A) \to CH_0(Y)$, suffisent pour établir ces résultats. Ceci utilise un théorème fondamental, le Théorème 2.4 de [**24**].

La Définition 2.3 de [**24**] donne précisément la description de l'homomorphisme de spécialisation donnée dans l'énoncé ci-dessus.

Remarque 6.3. — On peut facilement ramener la démonstration de l'énoncé ci-desssus au cas où $\mathcal{X}$ est une A-courbe plate, projective, connexe, régulière. Mais ce cas-là ne semble pas plus facile que le cas général, si la A-courbe n'est pas lisse. Or c'est tout le point : si la fibre spéciale est une union de diviseurs lisses Y_i/k (non principaux), on n'a pas en général de flèches $CH_0(X) \to CH_0(Y_i)$ qui par somme donneraient la flèche $CH_0(X) \to CH_0(Y)$. Par ailleurs, si Y/k n'est pas lisse, la flèche naturelle $\mathrm{Pic}(Y) \to CH_0(Y)$ n'est a priori ni injective ni surjective.

6.2. Non rationalité stable par spécialisation singulière. — Les deux théorèmes suivants, qui généralisent un argument de C. Voisin [**46**], sont établis dans [**19**] en utilisant la spécialisation de Fulton des groupes de Chow (des zéro-cycles). Ils ont déjà été discutés dans divers textes, en particulier dans [**39**] et [**40**]. On développe ici la remarque 1.19 de [**19**] : on donne une démonstration qui utilise la spécialisation de la R-équivalence, plus simple à établir que celle du groupe de Chow des zéro-cycles.

Théorème 6.4. — [**19**, Thm. 1.12]. *Soient A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, corps résiduel. Soient $\mathcal{X}$ un A-schéma projectif et plat, $X = \mathcal{X} \times_A K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_A k$ la fibre spéciale. Supposons X/K lisse et géométriquement intègre et Y/k géométriquement intègre. Supposons que $Y(k)$ est Zariski dense dans Y et qu'il existe une résolution des singularités projective $f : Z \to Y$ qui est un CH_0-isomorphisme. Si la K-variété X est rétractilement rationnelle, alors la k-variété Z est CH_0-triviale.*

Démonstration. — On procède au début comme dans [**19**, Thm. 1.12]. On note B le complété de l'anneau local de $\mathcal{X}$ au point générique η de Y. Soit F son corps des fractions. La flèche $A \to B$ est un homomorphisme local, induisant $k \to k(Y)$ sur les corps résiduels. On considère le B-schéma $\mathcal{X} \times_A B$. Sa fibre spéciale est $Y \times_k k(Y)$, qui admet la désingularisation $Z \times_k k(Y) \to Y \times_k k(Y)$. Le $k(Y)$-morphisme $Z \times_k k(Y) \to Y \times_k k(Y)$ est CH_0-trivial. Soit $U \subset Y_{lisse}$ un ouvert tel que $f^{-1}(U) \to U$ soit un isomorphisme. Soit $P \in U(k)$. Soit $M \in Z(k)$ son image réciproque sur $f^{-1}(U)$. Par Hensel, le point générique $\eta \in Y(k(Y))$ et le point $P_{k(Y)}$ se relèvent en des F-points de $\mathcal{X} \times_K F$. Comme X est lisse et rétractilement rationnel sur le corps K qui est de caractéristique zéro, ces deux points sont R-équivalents sur $\mathcal{X} \times_K F$. Par spécialisation de la R-équivalence, les points η et $P_{k(Y)}$ sont R-équivalents sur $Y_{k(Y)}$. Ils sont donc rationnellement équivalents sur $Y_{k(Y)}$. Soit ξ le point générique de Z d'image $\eta \in Y$. L'hypothèse que f est un CH_0-isomorphisme implique que $\xi_{k(Z)}$ est rationnellement équivalent à $M_{k(Z)}$ sur $Z_{k(Z)}$. Ceci implique que la k-variété projective et lisse Z est CH_0-triviale (Prop. 3.11, [**36**, Thm. 2.11] [**4**, Lemma 1.3], [**19**, Prop. 1.4]). □

Proposition 6.5. — [**19**, Prop. 1.8] *Soit $f : Z \to Y$ une résolution des singularités. Pour établir que, sur tout corps F contenant k, l'homomorphisme $f_* : CH_0(Z_F) \to CH_0(Y_F)$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que, pour tout point M du schéma Y, le $k(M)$-schéma fibre Z_M est CH_0-trivial.* □

Théorème 6.6. — [**19**, Thm. 1.14]. *Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, k son corps résiduel supposé algébriquement clos. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma projectif et plat, $X = \mathcal{X} \times_A K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_A k$ la fibre spéciale. Supposons X/K lisse et géométriquement intègre et Y/k géométriquement intègre. Supposons qu'il existe une résolution des singularités projective $f : Z \to Y$ qui est un CH_0-isomorphisme. Si la $\overline{K}$-variété $X \times_K \overline{K}$ est rétractilement rationnelle, alors la k-variété Z est CH_0-triviale.*

Démonstration. — Comme dans [**19**], ceci se déduit du théorème précédent par une réduction simple. □

Dans [**40**, §2.4], A. Pirutka développe une autre variante de la remarque 1.19 de [**19**].

Théorème 6.7. — *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma projectif et plat, $X = \mathcal{X} \times_A K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_A k$ la fibre spéciale. Supposons X/K et Y/k géométriquement intègres, et $Y(k)$ Zariski dense dans Y. Supposons qu'il existe une résolution des singularités projective $f : Z \to Y$ qui soit* R*-triviale. Si X est rétractilement rationnelle, alors Z est presque* R*-triviale. En particulier, il existe un point $M \in Z(k)$ tel que le point générique de Z est, sur $Z_{k(Z)}$,* R*-équivalent à $M_{k(Z)}$.*

Cet énoncé implique le suivant.

Théorème 6.8. — *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel k algébriquement clos. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma projectif et plat, $X = \mathcal{X} \times_A K$ la fibre générique et $Y = \mathcal{X} \times_A k$ la fibre spéciale. Supposons X/K et Y/k géométriquement intègres. Supposons qu'il existe une résolution des singularités projective $f : Z \to Y$ qui soit* R*-triviale. Si X est géométriquement rétractilement rationnelle, alors Z est presque* R*-triviale. En particulier :*

(i) Il existe un point $M \in Z(k)$ tel que le point générique de Z est, sur $Z_{k(Z)}$, R*-équivalent à $M_{k(Z)}$.*

(ii) Pour tous entiers $i > 0$ et $m > 0$, on a

$$H^0(Z, (\Omega^i)^{\otimes m}) = 0.$$

Démonstration. — Voir [**40**, Thm. 2.14]. Pour la dernière assertion, voir la proposition 3.30 ci-dessus. □

Pour établir dans des cas concrets que la résolution $f : Z \to Y$ est R-triviale, on utilise l'énoncé suivant.

Proposition 6.9. — *Soit $f : Z \to Y$ un k-morphisme propre. Si pour tout corps F contenant k et tout point $M \in Y(F)$, la F-variété fibre Z_M est* R-*triviale, alors f est* R-*triviale.* □

La démonstration de cet énoncé est facile, mais établir que l'hypothèse sur les fibres Z_M vaut est l'une des principales difficultés dans la pratique.

6.3. Applications aux variétés algébriques complexes. — Elles sont nombreuses. Certaines ont été décrites dans les rapports [**39**], [**40**].

Pour des familles projectives et lisses $\mathcal{X} \to S$ de variétés algébriques d'un "type donné", paramétrées par une variété algébrique complexe, on établit des théorèmes du type :

L'ensemble des points $s \in S(\mathbb{C})$ tels que la fibre $\mathcal{X}_s$ ne soit pas rétractilement rationnel est Zariski dense dans S.

On montre en fait que l'ensemble des points s où X_s est rétractilement rationnel est contenu dans une union dénombrable de fermés propres de S.

On s'intéresse bien sûr à des variétés projectives et lisses $X/\mathbb{C}$ qui sont "proches d'être rationnelles", en particulier qui sont rationnellement connexes (i.e. telles que $X(\mathbb{C})/\mathrm{R}$ soit réduit à un point). C'est le cas des variétés de Fano.

On a étudié :

• les hypersurfaces lisses dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ (de degré $d \leq n$)

• les revêtements cycliques ramifiés de $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ (avec des conditions sur le degré du revêtement et le degré de l'hypersurface de ramification)

• des familles de quadriques de dimension relative d au moins 1 au-dessus de $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$

• des familles de surfaces de del Pezzo, et plus généralement de variétés de Fano, au-dessus de $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$

On procède par dégénérescence de ces variétés sur des variétés singulières Y/k, avec k éventuellement de caractéristique positive, pour lesquelles on trouve une résolution des singularités $Z \to Y$ qui soit un morphisme CH_0-trivial, et l'on montre que Z n'est pas CH_0-triviale, ou que Z n'est pas presque R-triviale en utilisant le groupe de Brauer ou la cohomologie non ramifiée ou bien, si le corps résiduel k est de caractéristique positive, l'invariant $H^0(Z, \Omega^i)$.

Il y a ici deux points qui demandent beaucoup de travail :

• Montrer que la résolution $Z \to Y$ est un morphisme CH_0-trivial (c'est une propriété indépendante de la résolution). En pratique, il faut faire la résolution explicite, et voir si les fibres sont CH_0-triviales.

• Montrer qu'un invariant (groupe de Brauer, cohomologie non ramifiée ...) n'est pas trivial sur Z.

La première méthode, avec H^2_{nr}, alias le groupe de Brauer, est celle qui a été utilisée par C. Voisin (doubles solides quartiques) puis dans [**19**] (quartiques lisses dans $\mathbf{P}^4$), puis par Beauville (doubles solides sextiques), et dans de nombreux articles subséquents de Hassett, Pirutka, Tschinkel, Kresch, Böhning, von Bothmer, Auel. C'est celle qui a permis le résultat spectaculaire de Hassett, Pirutka, Tschinkel [**28**] selon lequel la rationalité stable n'est pas forcément constante dans une famille lisse de dimension relative au moins 4.

La seconde méthode, avec les différentielles en caractéristique positive, a été initiée par B. Totaro [**45**]. Elle est inspirée d'un travail de Kollár de 1995, qui utilisait déjà un argument de spécialisation sur une variété singulière en caractéristique positive et $H^0(Z, \Omega^i)$. Totaro en a déduit des résultats très généraux sur la non rationalité stable des hypersurfaces très générales dans $\mathbf{P}^n$, de degré $d \leq n$ satisfaisant approximativement $d \geq 2n/3$. Elle a été poursuivie dans [**20**]. De nombreux autres résultats ont été ensuite obtenus par cette méthode par T. Okada, H. Ahmadinezhad, I. Krylov pour d'autres types de variétés rationnellement connexes.

La première méthode, cette fois-ci avec les invariants cohomologiques supérieurs H^i_{nr}, vient d'être utilisée par S. Schreieder [**41**] pour des fibrations en quadriques de grande dimension au-dessus de l'espace projectif. À cette occasion, il a introduit une variante importante de la méthode de spécialisation, qui évite dans certains cas de vérifier si la résolution de la fibre spéciale est CH_0-triviale (ou presque R-triviale).

On trouvera ceci discuté dans le texte [**14**].

Par des arguments de spécialisations successives à partir du cas des familles de quadriques de Pfister au-dessus d'un espace projectif, Schreieder [**43**] a fait progresser de façon spectaculaire le cas des hypersurfaces très générales de degré d dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, obtenant leur non rationalité stable avec une condition du type $d \geq log(n)$.

7. Hypersurfaces cubiques non stablement rationnelles sur un corps non algébriquement clos

Soient k un corps et $X \subset \mathbf{P}^n_k$, $n \geq 3$, une hypersurface cubique lisse. On s'intéresse ici au cas où k n'est pas algébriquement clos.

Le défi ici est, pour un corps k de complexité arithmétique donné (corps fini, corps local, corps de nombres, corps de fonctions de d variables sur un de ces corps ou sur les complexes, corps de séries formelles itérées sur l'un de ces corps) de trouver des hypersurfaces cubiques lisses non rétractilement rationnelles $X \subset \mathbf{P}^n_k$ avec $X(k) \neq \emptyset$ et n aussi grand que possible.

7.1. Hypersurfaces cubiques réelles. —

Proposition 7.1. — *Pour tout entier $n \geq 2$, il existe une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{R}}$ telle que le lieu des points réels $X(\mathbb{R})$ ait deux composantes connexes. En particulier, une telle hypersurface n'est pas rétractilement rationnelle.*

Démonstration. — Soit $n \geq 2$ et soient $x_0, \ldots, x_{n-2}, u, v$ des variables. Soit

$$\Phi(x_0, \ldots, x_{n-2}, u, v) = (\sum_i x_i^2)v - u(u-v)(u+v).$$

Soit $Y \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{R}}$ l'hypersurface cubique définie par l'équation

$$\Phi(x_0, \ldots, x_{n-2}, u, v) = 0.$$

Son lieu singulier est donné par $u = v = \sum_i x_i^2 = 0$, il n'a pas de point réel. On a donc $Y_{lisse}(\mathbb{R}) = Y(\mathbb{R})$. Les coordonnées (u, v) définissent une application continue $Y_{lisse}(\mathbb{R}) \to \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$, dont l'image est la réunion des deux invervalles définis par $u(u-v)(u+v) \geq 0$. On vérifie ainsi que $Y(\mathbb{R})$ est une variété C^∞ avec deux composantes connexes. Soit $\Psi(x_0, \ldots, x_{n-2}, u, v) = \sum_i x_i^3 + u^3 + v^3$. Pour $\epsilon \in \mathbb{R}$ petit, l'hypersurface cubique définie par $\Phi + \epsilon\Psi = 0$ est lisse pour $\epsilon \neq 0$, pout tout $\epsilon \in \mathbb{R}$ petit, son lieu réel est une variété C^∞ lisse, et par le théorème d'Ehresmann, ce lieu est difféomorphe à $Y(\mathbb{R}) = Y_{lisse}(\mathbb{R})$. □

Exercice : pour une hypersurface cubique $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{R}}$, l'espace $X(\mathbb{R})$ a au plus deux composantes connexes.

7.2. Spécialisations à fibres réductibles. — Dans le contexte de la spécialisation du groupe de Chow, Totaro [**45**] a utilisé des spécialisations à fibre réductible. On peut le faire aussi dans le cadre de la R-équivalence. L'énoncé suivant est inspiré par [**45**] et [**7**], mais est plus simple.

Proposition 7.2. — *Soit A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, k son corps résiduel. Soit $\mathcal{X}$ un A-schéma propre et plat. Supposons la fibre générique X/K lisse et géométriquement intègre. Soit Y la fibre spéciale. Supposons Y union de deux fermés $Y = V \cup W$, $T = V \cap W$, $T(k) = \emptyset$, $V_{lisse}(k) \neq \emptyset$ et $W_{lisse}(k) \neq \emptyset$. Alors la K-variété X n'est pas* R*-triviale et n'est donc pas rétractilement rationnelle.*

Démonstration. — On peut supposer que A est hensélien. Par le lemme de Hensel, on trouve des A-points P et Q de $\mathcal{X}(R) = X(K)$ qui se spécialisent l'un dans $V(k)$, l'autre dans $W(k)$. Par le théorème 6.1, l'application de spécialisation $X(K) = \mathcal{X}(A) \to Y(k)$ passe au quotient par la R-équivalence. Il existe donc un k-morphisme $f : \mathbf{P}^1_k \to Y$ tel que $f(0) \in V(k)$ et $f(\infty) \in W(k)$. La courbe $\mathbf{P}^1_k$ est alors couverte par les deux fermés non vides $v = f^{-1}(V)$ et $w = f^{-1}(W)$, qui contiennent chacun un k-point, et dont l'intersection n'a pas de k-point. L'un des deux fermés, soit v est égal à $\mathbf{P}^1_k$. Mais alors $w \subset v$, et tout k-point de w est dans v. Contradiction. $\square$

Exemples 7.3. — Soient $n \geq 2$ et $f_0(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ une forme homogène de degré $d \geq 2$ sans zéro sur le corps k définissant une hypersurface lisse sur k. Soit $\alpha \in k^*$ une valeur (non nulle) de f sur k^n. Soit $f(x_0, \ldots, x_n) := \alpha x_0^d - f_0(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, puis $g(x_0, \ldots, x_n) = x_0.f(x_0, \ldots, x_n)$. Soit $Y \subset \mathbf{P}^n_k$ l'hypersurface de degré $d+1$ définie par $g = 0$. C'est l'union de V défini par $x_0 = 0$ et W défini par $f_0(x_1, \ldots, x_n) = 0$. L'intersection $T = V \cap W$ satisfait $T(k) = \emptyset$. On a $V(k) \neq \emptyset$ et $W(k) \neq \emptyset$.

Soit $g(x_0, \ldots, x_n) \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ une forme homogène de degré $d+1$ définissant une hypersurface lisse dans $\mathbf{P}^n_k$. On considère alors $A = k[[t]]$, $K = k((t))$. L'hypersurface $X \subset \mathbf{P}^n_K$ définie par $tg(x_0, \ldots, x_n) + f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ n'est pas R-triviale, et n'est pas pas rétractilement rationnelle.

On peut aussi donner des exemples similaires avec A un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique.

En utilisant cette méthode dans le cas $d = 2$, on obtient des hypersurfaces cubiques lisses, avec un K-point, non rétractilement rationnelles sur $\mathbf{P}^N_K$ pour tout $N \leq 2^{r-1}$ sur $K = \mathbb{C}((u_1)) \ldots ((u_r))$ et dans $\mathbb{Q}_p((u_1)) \ldots ((u_{r-2}))$.

Sur $K = \mathbb{C}((u_1))((u_2))((u_3))$ on trouve donc des hypersurfaces cubiques dans $\mathbf{P}^4_K$. Ces bornes sont les mêmes que celles obtenues dans [**7**] et dans [**12**], qui établissent le résultat plus fort que les hypersurfaces cubiques concernées ne sont pas CH_0-triviales. La démonstration de ce dernier résultat utilise une variation due à Totaro de la technique de spécialisation de Voisin et CT-Pirutka pour les groupes de Chow de zéro-cycles.

7.3. Hypersurfaces cubiques diagonales et cohomologie non ramifiée. — Ce paragraphe est extrait directement de l'article [**12**]. On utilise encore ici une technique de spécialisation, mais elle est différente de celles employées ci-dessus.

Théorème 7.4. — *Soit k un corps de caractéristique différente de 3, possédant un élément a qui n'est pas un cube. Soient $0 \leq n \leq m$ des entiers.*

Soit F un corps avec

$$k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \subset F \subset F_m := k((\lambda_1)) \ldots ((\lambda_m)).$$

L'hypersurface cubique $X := X_{n,F}$ de $\mathbf{P}^{n+3}_F$ définie par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + aw^3 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i^3 = 0$$

possède un point rationnel et n'est pas universellement CH_0-triviale, en particulier elle n'est pas rétractilement rationnelle.

Démonstration. — Pour établir le résultat, on peut supposer que k contient une racine cubique primitive de l'unité, soit j, et que $F = F_m$. Le lemme 7.5 ci-dessous permet de supposer $n = m$. On fixe un isomorphisme $\mathbb{Z}/3 = \mu_3$ et on considère la cohomologie étale à coefficients $\mathbb{Z}/3$. On ignore les torsions à la Tate dans les notations. Etant donnés un corps L contenant k et des éléments $b_i, i = 1, \ldots, s$, de L^*, on note $(b_1, \ldots, b_s) \in H^s(L, \mathbb{Z}/3)$ le cup-produit, en cohomologie galoisienne, des classes $(b_i) \in L^*/L^{*3} = H^1(L, \mathbb{Z}/3)$.

On va démontrer par récurrence sur $n \neq 0$ l'assertion suivante, qui implique la proposition.

(A_n) Soient k, a, F_n et X_n/F_n comme ci-dessus. Le cup-produit

$$\alpha_n := ((x + jy)/(x + y), a, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in H^{n+2}(F_n(X_n), \mathbb{Z}/3)$$

définit une classe de cohomologie non ramifiée (par rapport au corps de base F_n) qui ne provient pas d'une classe dans $H^{n+2}(F_n, \mathbb{Z}/3)$.

Le cas $n = 0$ est connu ([**34**, Chap. VI, §5] [**22**, §2.5.1]). Supposons l'assertion démontrée pour n.

La classe α_{n+1} sur la F_{n+1}-hypersurface $X_{n+1} \subset \mathbf{P}^{n+4}_{F_{n+1}}$ a ses résidus triviaux en dehors des diviseurs définis par $x + y = 0$ et $x + jy = 0$. Soit $\Delta \subset X_{n+1}$ le diviseur $x + y = 0$. Ce diviseur est défini par les équations

$$x + y = 0, z^3 + aw^3 + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i t_i^3 = 0.$$

Le résidu de α_{n+1} au point générique de Δ est

$$\partial_\Delta(\alpha_{n+1}) = \pm(a, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in H^{n+2}(F_{n+1}(\Delta), \mathbb{Z}/3).$$

Mais dans le corps des fonctions de Δ, on a

$$1 + a(w/z)^3 + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (t_i/z)^3 = 0$$

et cette égalité implique (cf. [**37**, Lemma 1.3]) :

$$(a, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = 0 \in H^{n+2}(F_{n+1}(\Delta), \mathbb{Z}/3).$$

Le même argument s'applique pour le diviseur défini par $x+jy=0$. Ainsi α_{n+1} est une classe de cohomologie non ramifiée sur la F_{n+1}-hypersurface X_{n+1}.

Soit $\mathcal{X}_{n+1}$ le $F_n[[\lambda_{n+1}]]$-schéma défini par

$$x^3+y^3+z^3+aw^3+\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i t_i^3=0.$$

Le diviseur Z défini par $\lambda_{n+1}=0$ sur $\mathcal{X}$ est le cône d'équation

$$x^3+y^3+z^3+aw^3+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t_i^3=0$$

dans $\mathbf{P}^{n+4}_{F_n}$, cône qui est birationnel au produit de $\mathbf{P}^1_{F_n}$ et de l'hypersurface cubique lisse $X_n\subset\mathbf{P}^{n+3}_{F_n}$ définie par

$$x^3+y^3+z^3+aw^3+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t_i^3=0.$$

Le corps des fonctions rationnelles de $\mathcal{X}_{n+1}$ est $F_{n+1}(X_{n+1})$.

On a

$$\partial_Z(\alpha_{n+1})=\pm((x+jy)/(x+y),a,\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in H^{n+2}(F_n(Z),\mathbb{Z}/3).$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$((x+jy)/(x+y),a,\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in H^{n+2}(F_n(X_n),\mathbb{Z}/3)$$

n'est pas dans l'image de $H^{n+2}(F_n,\mathbb{Z}/3)$. Ceci implique que

$$((x+jy)/(x+y),a,\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in H^{n+2}(F_n(Z)),\mathbb{Z}/3)$$

n'est pas dans l'image de $H^{n+2}(F_n,\mathbb{Z}/3)$. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{lccc}\partial_Z: & H^{n+3}(F_{n+1}(X),\mathbb{Z}/3) & \to & H^{n+2}(F_n(Z),\mathbb{Z}/3)\\ & \uparrow & & \uparrow\\ \partial_{\lambda_{n+1}=0}: & H^{n+3}(F_{n+1},\mathbb{Z}/3) & \to & H^{n+2}(F_n,\mathbb{Z}/3)\end{array}$$

on conclut que

$$\alpha_{n+1}:=((x+jy)/(x+y),a,\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\in H^{n+3}(F_{n+1}(X),\mathbb{Z}/3)$$

n'est pas dans l'image de $H^{n+3}(F_{n+1},\mathbb{Z}/3)$.

Ceci établit (A_n) pour tout entier n et implique (cf. [**36**]) que la F_n-variété X_n n'est pas universellement CH_0-triviale et n'est pas rétractilement rationnelle. □

Lemme 7.5. — *Soit F un corps. Si une F-variété X projective, lisse, géométriquement connexe n'est pas universellement CH_0-triviale, alors la $F((t))$-variété $X\times_F F((t))$ n'est pas universellement CH_0-triviale, et donc n'est pas rétractilement rationnelle.*

Démonstration. — Sur tout corps L contenant F, on dispose de l'application de spécialisation $CH_0(X_{L((t))}) \to CH_0(X_L)$, et cette application est surjective et respecte le degré. □

Remarque 7.6. — Il serait intéressant de comprendre la généralité de la construction faite dans le théorème 7.4. On utilise une classe de cohomologie non ramifiée non constante sur un modèle birationnel de la fibre spéciale d'une $k[[t]]$-schéma propre à fibres intègres, et on en tire une classe de cohomologie non ramifiée non constante de degré un de plus sur la fibre générique sur $k((t))$, essentiellement par cup-produit avec la classe d'une uniformisante de l'anneau $k[[t]]$.

On laisse au lecteur le soin d'établir l'analogue suivant du théorème 7.4.

Théorème 7.7. — *Soient $p \neq 3$ un nombre premier et k un corps p-adique dont le corps résiduel contient les racines cubiques primitives de 1. Soit $a \in k^*$ une unité qui n'est pas un cube. Soit π une uniformisante de k. Soient $0 \leq n \leq m$ des entiers. Soit F un corps avec*

$$\mathbb{Q}(a)(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \subset F \subset k((\lambda_1)) \dots ((\lambda_m)).$$

L'hypersurface cubique X_n de $\mathbf{P}^{n+4}_F$ définie par l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + aw^3 + \pi t^3 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i^3 = 0,$$

qui possède un point rationnel, n'est pas universellement CH_0-triviale et donc n'est pas rétractilement rationnelle.

Exemples

En appliquant le théorème 7.4, on trouve $X_n \subset \mathbf{P}^{n+3}_F$ non rétractilement rationnelle avec

$$k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset F \subset k((\lambda_1)) \dots ((\lambda_n))$$

dans les situations suivantes.

(i) Le corps $k = \mathbb{F}$ est un corps fini de caractéristique différente de 3 contenant les racines cubiques de 1.

(ii) Le corps k, de caractéristique différente de 3, possède une valuation discrète, par exemple k est le corps des fonctions d'une variété complexe de dimension au moins 1, ou est un corps p-adique, ou est un corps de nombres.

On trouve ainsi des hypersurfaces cubiques lisses non rétractilement rationnelles dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}(x_1,\dots,x_m)}$, avec un point rationnel, pour tout entier n avec $3 \leq n \leq m+2$.

En appliquant le théorème 7.7, sur un corps k p-adique ($p \neq 3$) contenant une racine cubique de 1, on trouve des hypersurfaces cubiques lisses non rétractilement rationnelles dans $\mathbf{P}^n_{k(x_1,\ldots,x_m)}$, avec un point rationnel, pour tout entier n avec $4 \leq n \leq m+4$.

Références

[1] M. Artin et D. Mumford, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Proc. London Math. Soc. (3) **25** (1972) 75–95.

[2] A. Auel, A. Bigazzi, C. Böhning and H-G Graf von Bothmer, The p-torsion in the Brauer group as an obstruction to universal Chow zero triviality of varieties in characteristic p, preprint, Nov. 2017.

[3] A. Auel, C. Böhning and A. Pirutka, Stable rationality of quadric and cubic surface bundle fourfolds, https ://arxiv.org/abs/1710.07270v1

[4] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane, à paraître dans *Brauer groups and obstruction problems : moduli spaces and arithmetic* (Palo Alto, 2013), A. Auel, B. Hassett, T. Várilly-Alvarado, and B. Viray, eds., Progress in Mathematics, Birkhäuser.

[5] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer, Varétés stablement rationnelles non rationnelles, Ann. of Math. (2) **121** (1985), no. 2, 283–318.

[6] Y. Cao, Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des torseurs universels sur les surfaces rationnelles. https ://arxiv.org/abs/1609.05117

[7] A. Chatzistamatiou et M. Levine, Torsion orders of complete intersections, Algebra & Number Theory **11** no. 8 (2017), 1779–1835.

[8] J.-L. Colliot-Thélène, Hilbert's theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces, Invent. math. **71** (1983) 1-20.

[9] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, K- theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 1–64.

[10] J.-L. Colliot-Thélène, Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications, Documenta Mathematica, Extra Volume : Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday (2015) 195–220.

[11] J.-L. Colliot-Thélène, CH_0-trivialité universelle d'hypersurfaces cubiques presque diagonales, Algebraic Geometry **4** (5) (2017) 597–602.

[12] J.-L. Colliot-Thélène, Non rationalité stable d'hypersurfaces cubiques sur des corps non algébriquement clos, Proceedings of the International Colloquium on K-Theory, TIFR, Mumbai (January 2016).

[13] J.-L. Colliot-Thélène, Surfaces stablement rationnelles sur un corps quasi-fini, https ://arxiv.org/abs/1711.09595v1

[14] J.-L. Colliot-Thélène, Introduction to work of Hassett-Pirutka-Tschinkel and Schreieder, prépublication sur ma page personnelle, 13 février 2018

[15] J.-L. Colliot-Thélène et F. Ischebeck, L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. **292** (1981) 723–725.

[16] J.-L. Colliot-Thélène, B. Kahn and R. Hoobler, The Bloch-Ogus–Gabber theorem Proceedings of the Great Lakes K-Theory Conference (Toronto 1996), ed. R. Jardine and V. Snaith. The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences Communications Series, Volume 16, A.M.S., Providence, R.I. 1997, p. 31–94.

[17] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford, Invent. math. **97** (1989), 141–158.

[18] J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, Real components of algebraic varieties and étale cohomology. Invent. math. **101** (1990) 81–99.

[19] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^{e} série, **49** (2016), no. 2, 371–397.

[20] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, Revêtements cycliques non stablement rationnels (en russe), Izvestija RAN, Ser. Math. Tom **80** no. 4 (2016) 35–48.

[21] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R-équivalence sur les tores, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. **10** (1977) 175–229.

[22] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles, II. Duke Math. J. **54** no. 2 (1987) 375–492.

[23] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, Duke Math. J. **161** (2012) 735–801.

[24] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzg. 3. Folge, Bd. **2**, Springer, Berlin, 1984/1998.

[25] O. Gabber, Q. Liu, D. Lorenzini, The index of an algebraic variety. Invent. math. **192** (2013), no. 3, 567–626.

[26] P. Gille, Le problème de Kneser-Tits, exposé Bourbaki no. 983, Astérisque **326** (2009), 39–81.

[27] P. Gille and T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Second edition, Cambridge studies in advances mathematics **165** (2017).

[28] B. Hassett, A. Pirutka, Yu. Tschinkel, Stable rationality of quadric surface bundles over surfaces, Acta Mathematica, to appear.

[29] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer I, II, III, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson et North Holland, Paris, 1968.

[30] B. Kahn and R. Sujatha, Birational geometry and localisation of categories. With appendices by Jean-Louis Colliot-Thélène and by Ofer Gabber. Doc. Math. 2015, Extra vol. : Alexander S. Merkurjev's sixtieth birthday, 277–334.

[31] J. Kollár, Rational curves on algebraic varieties, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzg. 3. Folge, Bd. **32**, Springer, Berlin, 1996.

[32] J. Kollár, Rationally connected varieties over local fields, Ann. of Math. (2) **150** (1999), no. 1, 357–367.

[33] D. Madore, Sur la spécialisation de la R-équivalence, prépublication `http://perso.telecom-paristech.fr/~madore/specialz.pdf`

[34] Yu. I. Manin, Formes cubiques : algèbre, géométrie, arithmétique (en russe), Nauka, Moscou, 1972.

[35] R. Mboro, Remarks on approximate decompositions of the diagonal, https ://arxiv.org/abs/1708.02422v1

[36] A. S. Merkurjev, Unramified elements in cycle modules, J. Lond. Math. Soc.**78** (2008), 51–64.

[37] J. Milnor, Algebraic K-theory and quadratic forms, Invent. math. **9** (1970) 318–344.

[38] D. Orlov, A. Vishik, V. Voevodsky, An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms, Ann. of Math. (2) **165** (2007), no. 1, 1–13.

[39] E. Peyre, Progrès en irrationalité [d'après C. Voisin, J.-L. Colliot-Thélène, B. Hassett, A. Kresch, A. Pirutka, B. Totaro, Y. Tschinkel et al.], dans Séminaire Bourbaki 69-ème année, exposé 1123, Astérisque (2016), 1–26.

[40] A. Pirutka, Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology, lecture notes for the 2015 Utah AMS Algebraic Geometry conference, arXiv :1603.09261

[41] S. Schreieder, On the rationality problem for quadric bundles, preprint 2017, https ://arxiv.org/abs/1706.01356v4

[42] S. Schreieder, Quadric surface bundles over surfaces and stable rationality, https ://arxiv.org/abs/1706.01358v4, to appear in Algebra & Number Theory.

[43] S. Schreieder, Stably irrational hypersurfaces of small slopes, prépublication, https ://arxiv.org/abs/1801.05397v1

[44] B. Segre, Sull'esistenza, sia nel campo razionale che nel campo reale, di involuzioni piane non birazionali. Rend. Acc. Naz. Lincei, Sc. fis. mat. e nat. **10** (1951), 94–97.

[45] B. Totaro, Hypersurfaces that are not stably rational, J. Amer. Math. Soc. **29** 883–891, 2016.

[46] C. Voisin, Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle. Invent. math. **201** (2015), 207–237.

[47] C. Voisin, On the universal CH_0-group of cubic hypersurfaces, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **19** (2017), no. 6, 1619–1653.

---

4 août 2018

J.-L. Colliot-Thélène, CNRS et Université Paris Sud, Mathématiques, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `jlct@math.u-psud.fr`