

J.-L. Colliot-Thélène

Notice sur les travaux, dernier rapport au CNRS, août 2012

On trouvera ici une évocation des principaux résultats obtenus par moi et mes collaborateurs, et de résultats obtenus par d'autres sur les thèmes suivants.

A. POINTS RATIONNELS DES VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES, interaction avec le groupe de Brauer et les toseurs

B. INVARIANTS BIRATIONNELS, PURETÉ, GROUPES ALGÈBRIQUES LINÉAIRES

C. CYCLES ALGÈBRIQUES, CORPS DE CLASSES SUPÉRIEUR; APPLICATIONS DE LA K-THÉORIE ALGÈBRIQUE.

D. GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE RÉELLE, FORMES QUADRATIQUES, SOMMES DE CARRÉS.

Ceci est suivi d'une

LISTE DES PUBLICATIONS

A. POINTS RATIONNELS DES VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES, interaction avec le groupe de Brauer et les toiseurs

Du point de vue diophantien, on peut grossièrement classifier les variétés en trois groupes : 1) les variétés de type général (analogues des courbes de genre au moins deux); 2) les variétés intermédiaires (analogues des courbes de genre un : variétés abéliennes, surfaces $K3$); 3) les variétés rationnelles (birationnelles à un espace affine après extension du corps de base) ou proches de l'être (variétés unirationnelles, variétés à faisceau anticanonique presque ample ...). Pour cette dernière catégorie de variétés, on s'attend, lorsqu'elles ont des points rationnels, à ce que ceux-ci soient denses pour la topologie de Zariski.

C'est principalement à cette dernière catégorie de variétés, et à l'étude de leurs points rationnels, sur un corps de nombres, que sont consacrés les articles du titre A. Cependant les techniques développées à cet effet ont trouvé des applications à des classes plus vastes de variétés ([65], [68], [69], [75], [80], [85]).

On trouvera une introduction à ces travaux dans [37], [39], [51], [67], [85].

Je me suis particulièrement intéressé aux aspects suivants :

– Etude de la validité du principe de Hasse (l'existence de points locaux implique-t-elle l'existence de points rationnels globaux?) et de l'approximation faible (les points globaux sont-ils denses dans les points locaux?)

– Description de l'ensemble des points rationnels au moyen de paramétrisations par les points rationnels d'espaces affines

Avant 1970, les principaux travaux dans cette direction (mis à part les méthodes analytiques – méthode du cercle) concernaient les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires. Du côté des variétés rationnelles, on pouvait citer des travaux de F. Enriques, B. Segre, L. Mordell, E. Selmer, François Châtelet, P. Swinnerton-Dyer. Autour des années 1970, Manin s'intéressa aux surfaces rationnelles. Iskovskikh et lui mirent au goût du jour et améliorèrent la classification des surfaces rationnelles. Manin attira l'attention sur les travaux de Châtelet, et introduisit la notion de R -équivalence. Il montra par ailleurs que toute une série d'exemples isolés pouvaient se comprendre du point de vue du groupe de Brauer-Grothendieck.

A.1. *En collaboration avec Sansuc, étude systématique de la R -équivalence sur les tores (1976/77, article [8], annoncé dans [4] et [5]).*

A.1.a. Soit T un k -tore algébrique. Il existe une suite exacte de k -tores

$$1 \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow 1$$

où P est un k -tore quasi-trivial et F est un k -tore "flasque", c'est-à-dire que son groupe de cocaractères $X_*(F)$ satisfait $H^1(h, X_*(F)) = 0$ pour tout sous-groupe fermé h du groupe de Galois absolu. (Variante de résultats duaux de Voskresenskii et d'Endo-Miyata, auteurs qui s'intéressaient au problème de la k -rationalité des tores.)

A.1.b. *Une telle résolution est essentiellement unique (variante d'un lemme de Schanuel). (Résultat dual obtenu indépendamment par Voskresenskii).*

A.1.c. *Le groupe $T(k)/R$ des classes pour la R -équivalence (à la Manin) sur les points rationnels $T(k)$ de T s'identifie au groupe de cohomologie galoisienne $H^1(k, F)$.*

A.1.d. *Si k est un corps de type fini sur le corps premier, le groupe $H^1(k, F)$ est fini, et donc aussi le groupe $T(k)/R$.*

A.1.e. Toujours en collaboration avec Sansuc, étude systématique des tores flasques "variables" au-dessus d'une base quelconque ([9], [33]).

Influence : Les résultats principaux ont été immédiatement reproduits dans le livre de Voskresenkii (Moscou, Nauka, 1977) sur les groupes algébriques linéaires, et par R. Swan dans un rapport général. Divers aspects de [8] et [33] ont influencé des articles de Saltman et de Merkur'ev. Dans sa thèse (1994), P. Gille a établi, sur un corps de nombres la finitude du groupe $G(k)/R$ pour un groupe linéaire quelconque ; il utilise entre autres un résultat de Margulis sur les groupes semisimples simplement connexes et les méthodes et résultats de [8]. Le cas des corps de type fini sur le corps premier est largement ouvert (le seul résultat non trivial est dans [60]). Il y a eu des travaux subséquents de Borovoi et Kunyavskii (J. Algebra 2004) qui m'ont eux-même inspiré ([90] [94] [95] [101]). Sur les tores, deux articles relativement récents de A. Merkur'ev, et un tout récent de Blinsein et Merkur'ev (2012).

A.2. *Création, avec J.-J. Sansuc, de la méthode de la descente*, qui n'est autre que l'étude des points rationnels au moyen de torseurs sous des k -tores (au lieu des k -groupes finis commutatifs intervenant dans la théorie des courbes elliptiques). Des cas particuliers avaient été considérés par Châtelet et Swinnerton-Dyer. Les résultats généraux englobent une grande partie des résultats obtenus en A.1 (cas particulier où la base est une compactification lisse d'un tore). Nous faisons le lien entre le point de vue des torseurs sous des tores et le point de vue du groupe de Brauer (comme introduit par Manin dans l'étude de ces problèmes – obstruction de Brauer-Manin). Articles [4] [6] [7] [14]. Article de fondement [35], largement cité. Les *torseurs universels*, introduits par nous dans ces articles, ont été utilisés systématiquement depuis 1997 par Peyre, Salberger, puis de la Bretèche, Browning et d'autres dans l'étude du décompte des points de hauteur bornée sur certaines variétés de Fano. Ils sont aussi apparus dans des travaux de K-théorie de A. Merkur'ev. Par ailleurs, c'est leur introduction qui a permis la résolution négative du problème de Zariski (voir A.8 ci-dessous).

L'article [35] contient une définition de "l'obstruction élémentaire à l'existence d'un point rationnel" qui est étudiée dans un certain nombres d'articles récents.

A.3. *Développement, avec P. Swinnerton-Dyer et J.-J. Sansuc, de la méthode des fibrations dans l'étude des points rationnels*. Etant donné une famille $X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ à un paramètre de variétés définies sur un corps de nombres, sous certaines hypothèses, de bonnes propriétés des fibres (par exemple la validité du principe de Hasse pour ces fibres) entraînent des propriétés analogues pour l'espace total X , par exemple le principe de Hasse, ou le fait que l'absence éventuelle de point rationnel sur X soit entièrement imputable au groupe de Brauer de X , via l'obstruction définie par Manin.

Article [32]. C'est la combinaison des deux méthodes, descente et fibration, qui mène aux résultats totalement explicites (et inconditionnels) évoqués ci-après (A.4).

A.4. Quelques énoncés précis.

A.4.a. *Soit k un corps de nombres. Le principe de Hasse vaut pour les points rationnels de toute surface d'équation*

$$y^2 - az^2 = P(x),$$

où $a \in k^*$ et $P \in k[x]$ un polynôme irréductible de degré 4.

CT/Sansuc/Swinnerton-Dyer (1984/1987), articles [25] [32].

(Un cas particulier tout à fait non trivial avait été obtenu, par une autre méthode, par CT/Coray/Sansuc dans [15].)

A.4.b. *Plus généralement, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un point rationnel est la seule obstruction pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus de la droite projective, lorsque le nombre de fibres géométriques dégénérées est au plus 4*. Cas général obtenu dans [45] (inspiré partiellement de [36] et d'un texte non publié de Salberger).

A.4.c. Soit n un entier, $n \geq 9$. Sur un corps de nombres totalement imaginaire, deux formes quadratiques $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(X_1, \dots, X_n)$ ont un zéro commun non trivial (analogue pour deux formes du résultat de Meyer pour une forme en au moins cinq variables). Sur un corps de nombres quelconque, à des détails techniques près, la condition qu'il existe des solutions communes sur les complétions réelles est la seule condition.

CT/Sansuc/Swinnerton-Dyer (1987) [32]

A.5. Développements des deux méthodes (descente et fibration), avec d'autres ([36], [38]/[41], [45], [50], [75], [77], [85], [86]). Ainsi l'article [41] (1989, avec Salberger) traite complètement le problème du principe de Hasse (et donc de l'existence de points rationnels) pour les hypersurfaces cubiques possédant un triplet de points singuliers conjugués.

A.6. Développements, par d'autres, de ces méthodes (principalement par Salberger, Skorobogatov, Harari; travaux connexes de Borovoi, Kunyavskiï, Sarnak/Wang; travail de Heath-Brown et Skorobogatov; plusieurs travaux de Harari et Skorobogatov; thèse de Wittenberg – voir A11 ci-dessous). A signaler tout particulièrement :

A.6.a. Le résultat de Salberger et Skorobogatov (1991) selon lequel l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction à l'approximation faible pour les surfaces cubiques contenant une droite définie sur le corps de base.

A.6.b. La thèse de D. Harari (Duke Math. J., 1994) et ses travaux subséquents sur la méthode des fibrations et le groupe de Brauer.

A.6.c. L'exemple de Skorobogatov (1999) montrant qu'il faut chercher au-delà de l'obstruction de Brauer-Manin, et l'interprétation de ce résultat par Harari et Harari/Skorobogatov en termes de toseurs sous des groupes (finis) non commutatifs. Obstruction de descente "étales". Travaux de Stoll sur les courbes. Travaux de Demarche et de Skorobogatov (Descent obstruction is equivalent to étale Brauer-Manin obstruction), Récemment lien avec la théorie de l'homotopie étale (Harpaz et Schlank, Pál).

A. 6. d. Rencontre de la théorie de la descente et de la méthode du cercle. Pressenti par Salberger lors de mon travail avec lui [89]. Réalisé par Heath-Brown et Skorobogatov, 2001; complété – pour la partie algébrique – dans [86]. Pour K/\mathbf{Q} une extension finie, on obtient ainsi des énoncés de type principe de Hasse et approximation faible pour l'équation $(t-a)(t-b) = N_{K/\mathbf{Q}}(\mathbf{z})$. Un nouveau travail de Heath-Brown et Browning (2011). Prolongé par un travail de Dasheng Wei, Derenthal, Smeets (2012). Rencontre de la méthode de fibrations et de la méthode du cercle dans un travail de S. Jones (étudiant de T. Browning).

A.6.e. Des résultats intéressants sur le cas des courbes de genre au moins 2, où l'on se demande si l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un point rationnel est la seule obstruction. (Sharaschkin, Skorobogatov, Stoll, Poonen-Voloch, Harari-Voloch). Lien avec la conjecture des sections de Grothendieck (Wittenberg, Harari-Szamuely, Stix).

A.6.f. Plusieurs articles par B. Poonen en 2007 et 2008, où le travail [32] de 1987 (avec Sansuc et Swinnerton-Dyer) joue un rôle important. Poonen a donné des exemples différents de ceux de Skorobogatov montrant que l'obstruction de Brauer-Manin n'est en général pas la seule obstruction. J'ai apporté un complément [105] à l'un de ces articles de Poonen, en direction de l'existence de zéro-cycles de degré 1. Ce complément à son tour a donné naissance à une partie de la thèse de Yongqi Liang (Orsay 2011).

A.6.g. Certaines des questions soulevées dans [85] et [86] viennent d'être résolues par Dasheng Wei (Beijing, 2011).

A.7. Algorithme systématique permettant de décider si oui ou non il y a obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour une surface cubique diagonale définie sur les rationnels. Sous-produit : série infinie de contre-exemples au principe de Hasse pour de telles surfaces (on en

connaissait deux avant, une par Cassels-Guy, une autre par Bremner). Mais surtout, les calculs rendus possibles par l'algorithme confortent l'hypothèse que pour une telle surface l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse.

CT/Kanevsky/Sansuc 1985/6 [34] (annoncé dans [30]).

Cet article a eu des échos dans des travaux de Heath-Brown, Peyre/Tschinkel, Swinnerton-Dyer, Kresch/Tschinkel, Elsenhans/Jahnel, Corn.

A.8. *Un sous-produit important de la méthode de la descente : Réponse négative au problème de Zariski*

Soit k un corps. Une k -variété irréductible de dimension d est dite stablement k -rationnelle si le produit $X \times_k \mathbf{P}_k^r$ est k -birationnel à \mathbf{P}_k^{r+d} pour r convenable (on note \mathbf{P}_k^n l'espace projectif de dimension n).

En collaboration avec Beauville, Sansuc et Swinnerton-Dyer, dans [27] (1985), j'ai résolu le problème de Zariski (1949) : nous avons donné des exemples de \mathbf{Q} -surfaces stablement \mathbf{Q} -rationnelles non \mathbf{Q} -rationnelles et de variétés de dimension 3 sur les complexes qui sont stablement rationnelles et non rationnelles.

L'inspiration pour trouver des variétés stablement rationnelles intéressantes est venue de l'étude des variétés de descente sur les surfaces rationnelles et de notre familiarité avec les tores et leurs groupes de caractères (CT/Sansuc). La non-rationalité pour les surfaces sur \mathbf{Q} est une application de résultats d'Iskovskikh (systèmes linéaires à points bases, technique de B. Segre mise au goût du jour par Manin vers 1968). La non-rationalité pour les variétés de dimension trois sur les complexes utilise la technique de Clemens-Griffiths (jacobiniennes intermédiaires, dimension du lieu singulier du diviseur thêta), comme raffinée par Beauville.

A.9. Dans l'article souvent cité [65] (avec Skorobogatov et Swinnerton-Dyer), nous expliquons comment, en utilisant des surfaces bielliptiques, et une descente que n'aurait pas reniée André Weil, on peut répondre négativement d'une part à une question de Harris et Abramovich (éventuelle réciproque d'une conjecture de Lang sur les points "potentiellement" rationnels sur une variété de type générale), d'autre part à une question de B. Mazur (si les points \mathbf{Q} -rationnels d'une \mathbf{Q} -variété lisse connexe sont denses pour la topologie de Zariski, leur adhérence dans les points réels est-elle une union de composantes connexes réelles?) L'expérience acquise dans cet article a permis par la suite à Skorobogatov de trouver son exemple de surface (bielliptique) pour laquelle il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin, et pourtant il n'y a pas de point rationnel.

A.10. *Un slogan : De l'hypothèse de Schinzel on peut déduire le principe de Hasse et l'approximation faible.*

(Une série de résultats significatifs, mais conditionnels.)

Par exemple :

L'hypothèse de Schinzel (généralisation naturelle et hardie de la conjecture des nombres premiers jumeaux) implique le principe de Hasse et l'approximation faible pour les points rationnels des surfaces d'équation

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

avec P irréductible de degré arbitraire. Lorsque P est réductible, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule. CT/Sansuc [19] (soumis en 1978, paru en 1982). (Noter que pour P de degré 4, c'est un théorème, voir A.4.a) et A.4.b).

L'idée de [19] est une extrapolation naturelle de la démonstration par Hasse de son principe pour les quadriques de dimension deux à partir du cas des coniques et du théorème de Dirichlet sur les premiers dans une progression arithmétique. Elle n'en était pas moins originale, et a donné naissance, avec quelque délai, à une série de travaux.

Dans un premier temps, on a généralisé l'énoncé ci-dessus aux familles à un paramètre de variétés de Severi-Brauer (et quelques généralisations du même esprit) : article de Swinnerton-Dyer (1994), exposé de Serre (1994), articles [56] [68].

Un article de Várilly-Alvarado et Viray (2011) exploite l'idée pour étendre (conditionnellement) aux non- p -puissances le résultat de Poonen que les non-carrés sont diophantiens (résultat qui repose sur le théorème de [15] sur les équations ci-dessus lorsque $P(x)$ est un produit de deux facteurs de degré 2).

Il convient ici de signaler un travail en cours (2012) de Browning, Matthiesen et Skorobogatov permettant dans certains cas d'obtenir des résultats inconditionnels du type ci-dessus, grâce à des développements (Matthiesen 2012) de méthodes de Green et Tao.

A.11. *Application du slogan aux surfaces fibrées en courbes de genre 1*

En 1995, Swinnerton-Dyer a commencé à appliquer la méthode de A.10 à des fibrations à des surfaces fibrées en courbes de genre un. Il obtient des résultats sur l'existence de points rationnels de la surface en supposant d'une part l'hypothèse de Schinzel, d'autre part la finitude des groupes de Tate-Shafarevich des courbes elliptiques. Même en admettant ces points, sa méthode avait beaucoup d'aspects très calculatoires et *ad hoc*.

En collaboration avec Skorobogatov, j'ai contribué à dégager des principes généraux dans la nouvelle méthode de Swinnerton-Dyer.

Ceci a mené à l'article [69] (CT/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer, 1998), article qui prédit l'existence de beaucoup de points rationnels sur certaines surfaces fibrées en courbes de genre un.

L'article [69] a depuis servi de base à plusieurs autres articles : Swinnerton-Dyer, Swinnerton-Dyer/Bender, mon article [80], la thèse d'O. Wittenberg (2005, Springer LNM 1901), un article de Skorobogatov et Swinnerton-Dyer.

La thèse de Wittenberg montre en particulier que si l'on accepte l'hypothèse de Schinzel et la finitude des groupes de Tate-Shafarevich, alors le principe de Hasse vaut pour les intersections lisses de deux quadriques dans \mathbf{P}^n pour $n \geq 5$) – alors que l'on ne sait établir ce résultat de façon inconditionnelle que pour $n \geq 8$.

Swinnerton-Dyer a obtenu en 2001 un résultat assez étonnant, portant sur les points rationnels des surfaces cubiques diagonales. La méthode est essentiellement la même, et utilise une variante du formalisme mis en place dans [69], mais *la seule conjecture utilisée est la finitude des groupes de Tate-Shafarevich (le cas particulier de la conjecture de Schinzel utilisé n'étant autre que le théorème de Dirichlet)*. Dans [85], j'observe que si l'on transcrit le travail de Swinnerton-Dyer dans le cas fonctionnel (corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, au lieu de corps de nombres), on obtient un énoncé *inconditionnel*, car au lieu de la finitude du groupe de Tate-Shafarevich, on peut ici invoquer les vieux théorèmes de Tate sur les homomorphismes de variétés abéliennes sur un corps fini.

Notons que dans [56] et [68] a été dégagé le parallélisme entre les résultats conditionnels sur les points rationnels obtenus en admettant l'hypothèse de Schinzel et les résultats inconditionnels sur les zéro-cycles obtenus en 1988 par Salberger (et développés depuis par d'autres, voir précisément [56] et [68]; voir section C ci-après).

A.12. L'article [83], de pure géométrie algébrique complexe, répond à une question de Heath-Brown. Il lui a permis d'obtenir de bonnes bornes supérieures (inconditionnelles) pour le nombre de points de hauteur bornée pour les surfaces dans l'espace projectif \mathbf{P}^3 . Des extensions ont été réalisées par Salberger.

A.13. *Ouverture du côté des variétés rationnellement connexes et simplement rationnellement connexes* (depuis 2000)

Les travaux de Kollár, Miyaoka et Mori, puis le théorème de Graber, Harris et Starr (2001, paru en 2003) sur l'existence de points rationnels sur les variétés rationnellement connexes définies sur un corps de fonctions d'une variable (sur les complexes) a montré l'intérêt des techniques de déformation (en cohomologie cohérente) pour des problèmes de rationalité.

Je me suis intéressé à ces travaux de géométrie complexe. J'en ai tiré les articles [76] (sur le problème de Galois inverse, voir A.14 ci-dessous), [89], [96] (rapport Bourbaki sur un travail de de Jong) [100] [108]. Mes étudiants Yong Hu et Alena Pirutka ont aussi ces dernières années obtenu des résultats dans ce domaine.

Inversement, inspirés par la problématique sur les corps de nombres, des chercheurs en géométrie algébrique complexe se sont mis à étudier de façon systématique les questions d'existence de points et d'approximation faible sur les corps de fonctions d'une et parfois de deux variables sur les complexes (Kollár, Hassett, Tschinkel, de Jong, Starr).

Dans un travail en cours, Hassett et Tschinkel appliquent les méthodes de déformation de la géométrie complexe à l'étude de la conjecture de CT-Sansuc sur les points rationnels de surfaces rationnelles, dans le cas d'une surface de del Pezzo de degré 4 sur un corps global de caractéristique positive : il s'agit de comprendre la géométrie des espaces de sections de morphismes.

De la résolution par Kollár (2007) d'une conjecture d'Ax (en caractéristique zéro), j'ai tiré une conséquence sur la structure d'une spécialisation d'une hypersurface lisse de degré d dans l'espace projectif \mathbf{P}^n lorsque $n \geq d^2$. C'est paru dans une note aux CRAS (article [100]). Ceci a des liens avec les recherches actuelles sur la notion de variété simplement rationnellement connexe. J'ai fait sur ce thème un cours au CIME (texte [108]) en septembre 2007. Dans la même direction, j'ai fait dans [100] une conjecture généralisant la fameux théorème d'Ax et Kochen sur la propriété C_2 . Ceci a stimulé un travail de Jan Denef : il a établi ma conjecture (juin 2008).

A.14. *Problème de Galois inverse*

Soit k un corps local et G un groupe fini. Un théorème d'Harbater (1987) et Pop assure que G est un groupe de Galois sur le corps $k(t)$ des fonctions rationnelles en une variable, i.e. il existe une extension galoisienne de corps $K/k(t)$, avec de plus k algébriquement clos dans K , de groupe de Galois G . C'était une question ouverte de savoir si l'on pouvait choisir cette extension avec une spécialisation (régulière) donnée en une place k -rationnelle (la méthode d'Harbater ne donnait que la spécialisation "triviale").

J'ai donné dans [76] (2000) une démonstration radicalement nouvelle du théorème d'Harbater, par une méthode qui m'a permis en outre de résoudre le problème de spécialisation mentionné ci-dessus.

Pour ce faire, je me suis servi de techniques d'un travail de J. Kollár, qui remarqua qu'on peut appliquer aux variétés sur les corps locaux des techniques de déformation usuelles en géométrie complexe (théorie des variétés rationnellement connexes, travaux de Kollár, Miyaoka, Mori, Campana).

Ce travail [76] a été suivi d'articles de Moret-Bailly, de Haran-Jarden (qui ont rédigé une démonstration ultérieure de Pop du résultat de spécialisation) et de P. Gille. Il a aussi été suivi de plusieurs travaux de Kollár (2000, 2002) sur le groupe fondamental des ouverts de variétés rationnellement connexes définies sur un corps p -adique.

A.15. *Points entiers des variétés algébriques, obstruction de Brauer–Manin entière* (depuis 2005), articles [103], [114], [121], [124].

Un nouveau développement (depuis 2005) concerne l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence de points entiers (plutôt que rationnels). Ceci a commencé avec mes remarques sur l'exposé

d'un collègue chinois (Fei XU) à Tianjin en août 2005. Ceci fait maintenant l'objet de l'article commun [103], paru dans *Compositio mathematica*.

Ceci a déjà engendré un travail de David Harari (sur l'approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs), un article de Fei Xu et de son élève Dasheng Wei, ainsi qu'un court article de Kresch et Tschinkel. La thèse de C. Demarche (élève de D. Harari) s'inscrit aussi dans cette direction. Cette thèse a été suivie d'articles, dont un de Borovoi et Demarche. Un travail de Harari et Voloch s'intéresse au cas des courbes affines hyperboliques.

O. Wittenberg et moi [112] avons étudié l'obstruction de Brauer-Manin entière pour certaines équations diophantiennes classiques. F. Xu et moi ([121]) venons d'écrire un article sur cette obstruction pour les familles à un paramètre de quadriques de dimension au moins 3. Ceci a été immédiatement suivi (2012) d'un article général d'Harari et moi [124] sur les familles d'espaces homogènes de groupes semisimples.

A.16. *Taille du groupe de Brauer* (récent, avec Skorobogatov) [115] [119]

Motivés par le désir de calculer l'ensemble de Brauer-Manin de surfaces non rationnelles, comme les surfaces $K3$ (sur lesquelles Skorobogatov, Zarhin et d'autres ont récemment travaillé), dans les articles [115] [119] Skorobogatov et moi nous intéressons à la partie transcendante du groupe de Brauer d'une variété, c'est-à-dire à l'image du groupe de Brauer dans le groupe de Brauer de la variété sur une clôture algébrique. Pour une variété projective et lisse, en caractéristique zéro nous montrons dans [119] que *cette image est d'indice fini dans les invariants sous l'action du groupe de Galois absolu*. Ce résultat général n'avait pas à notre connaissance été observé. Nous donnons des bornes pour cet indice.

B. INVARIANTS BIRATIONNELS, PURETÉ, GROUPES ALGÈBRIQUES LINÉAIRES

B.1. *Le problème de Lüroth.*

En collaboration avec Ojanguren, j'ai exhibé dans [42] (1989) de nouveaux exemples de variétés unirationnelles non rationnelles, sur le corps des complexes.

Leur intérêt tient à ce que la non-rationalité ne peut s'expliquer par aucune des méthodes classiques (Clemens-Griffiths, Manin-Iskovskih, Artin-Mumford), datant des années 70. (Depuis, Kollár a introduit une technique toute différente, et fort puissante, par réduction modulo p .)

La méthode de [42] est néanmoins, dans une certaine mesure, une extension de la méthode d'Artin-Mumford (via le groupe de Brauer). On introduit et utilise la cohomologie non ramifiée de degré supérieur à 2, et on utilise des résultats de cohomologie galoisienne subtils relevant de la K -théorie algébrique (Pfister, Arason, extensions par Merkur'ev-Suslin, Rost, Voevodsky).

Les invariants birationnels utilisés entretiennent une relation avec la conjecture de Gersten, comme établie par Quillen (1973) pour la K -théorie et par Bloch-Ogus (1974) pour la cohomologie étale.

Autres articles autour de la conjecture de Gersten dans divers contextes : le rapport [58] et l'article-rapport [66] (avec Kahn et Hoobler). L'article [66] développe une approche axiomatique des preuves de la conjecture de Gersten pour des théories cohomologiques "avec support". Il a été beaucoup utilisé. Il a joué par exemple un rôle dans la démonstration, par P. Balmer, de la conjecture de Gersten pour les groupes de Witt.

L'étude de la cohomologie non-ramifiée supérieure est poursuivie par divers auteurs : Peyre, Saltman, Parimala, Kahn, Rost, Sujatha, Merkur'ev (plusieurs articles, dont un très récent résolvant une question posée par moi en 1992), Balmer, récemment Asok en liaison avec la \mathbf{A}^1 -homotopie de F. Morel.

A. Pirutka vient de s'inspirer de [42] pour donner une réponse négative à une question de Geisser sur les variétés sur les corps finis.

En 2010, C. Voisin et moi [111] avons utilisé [42] pour donner des exemples de défaut de la conjecture de Hodge entière en degré cohomologique 4 parmi les variétés unirationnelles. Voir C.3 ci-dessous.

B.2. *Un problème de Serre et Grothendieck, et une conjecture de pureté pour les toreseurs.*

Soit k un corps algébriquement clos, X une k -variété lisse connexe, G un k -groupe algébrique linéaire connexe. A la naissance de la cohomologie étale (1958), Serre a posé la question suivante : si un toseur (espace principal homogène) sur X sous G admet une section sur un ouvert (de Zariski) non vide, admet-il partout localement (pour la topologie de Zariski) une section ?

Dans [49] (1992), en collaboration avec M. Ojanguren, j'ai répondu positivement à cette question de Serre sur les espaces principaux homogènes.

L'originalité du travail a été d'observer que la technique utilisée par Ojanguren en 1980 pour étudier le groupe de Witt d'un anneau local régulier de type géométrique (injection de ce groupe dans celui du groupe de Witt du corps des fractions) pouvait se transposer à ce contexte résolument non commutatif.

Dans [49], on obtient divers énoncés plus généraux que celui cité ci-dessus (l'énoncé vaut en particulier sur un corps k parfait infini), mais on laisse en grande partie ouverte la question de Grothendieck (1958, 1968), généralisant celle de Serre : a-t-on un résultat analogue avec un schéma en groupes réductifs G/X "variable" ? (Le cas des tores est traité par Sansuc et moi dans [9] et [33].)

L'article [49] a été suivi d'un article de Raghunathan (cas d'un corps imparfait), et, pour la question de Grothendieck, de plusieurs articles de Panin-Suslin, Panin-Ojanguren, Zainoulline.

Une question parallèle est celle de la “pureté” : *si un G -torseur sur le corps des fonctions d’une variété lisse X s’étend en un G -torseur au voisinage de chaque point de codimension un, s’étend-il partout localement en un G -torseur ?* Cette question était déjà apparue naturellement dans mon article [10], elle est formalisée dans [12], une réponse affirmative permet de construire des invariants birationnels des variétés projectives lisses ([43], couvert par des travaux ultérieurs de M. Rost). Cette question, variante non commutative de la conjecture de Gersten, a fait et continue de faire l’objet de travaux d’I. Panin (Saint Pétersbourg) et de ses collaborateurs.

B.3. Cohomologie galoisienne de certains corps de dimension deux

Soit A un anneau local strictement hensélien, excellent de dimension 2 et soit K son corps des fractions. On peut associer à K ses divers complétés en les valuations discrètes de rang 1. Dans l’article [82], Ojanguren, Parimala et moi-même montrons que cette situation est très parallèle à celle des corps de nombres et de leurs complétés, du moins en ce qui concerne l’isotropie des formes quadratiques de rang au moins trois. On utilise pour cela des méthodes et résultats de M. Artin, A. Grothendieck, Ford/Saltman sur le groupe de Brauer de K . Cet article se limite pour l’essentiel à l’étude d’espaces homogènes du groupe orthogonal.

Ce travail a été utilisé par Harbater, Hartmann, Krashen et par mon étudiant Yong HU.

Dans le travail [81]/[88], P. Gille, R. Parimala et moi-même étudions de façon systématique les groupes linéaires connexes sur un corps K du type ci-dessus, leurs espaces principaux homogènes et les variétés projectives espaces homogènes de tels groupes. Ce travail (paru en 2004) a été suivi par un article de Borovoi et Kunyavskii (paru en 2004). Il est aussi cité par de Jong et Starr dans leur récent travail sur la conjecture II de Serre.

B.4. Résolutions flasques des groupes linéaires

En 2004, j’ai dégagé une notion de résolution flasque pour les groupes réductifs ([90], [94], [101]), généralisant ce que Sansuc et moi avons fait pour les tores en 1976, et qui permet de retrouver de façon beaucoup plus naturelle des résultats de Sansuc (1981), Borovoi (cohomologie abélianisée), Gille (calcul de la R-équivalence sur les corps de nombres), et aussi de [88]. Une grande partie du formalisme vaut sur un corps quelconque.

Ce travail a été continué en 2005, en collaboration avec Kunyavskii ([95]). Le résultat le plus frappant est le suivant. Soient k un corps de caractéristique nulle, \bar{k} une clôture algébrique de k , $g = \text{Gal}(\bar{k}/k)$, X un espace homogène d’un k -groupe linéaire connexe à stabilisateur géométrique connexe. Soit X_c une k -compactification lisse de X et $\bar{X}_c = X_c \times_k \bar{k}$. *Le groupe abélien libre de type fini $\text{Pic}(\bar{X}_c)$ est un g -module flasque.* Ce résultat englobe un théorème de Voskresenskiï (cas où G est un k -tore, 1974) et de Borovoi-Kunyavskii (cas d’un espace principal homogène, 2004).

B.5. Indice et exposant d’algèbres simples centrales

L’article [84] utilise les théorèmes de “réduction d’indice” de Merkur’ev (provenant de la K -théorie algébrique) pour produire des exemples explicites d’algèbres simples centrales sur un corps de fonctions d’au moins trois variables sur les complexes, qui sont non ramifiées en tout point d’un modèle projectif et lisse, mais dont l’indice diffère de l’exposant. Les questions d’indice et d’exposant ont connu récemment un regain d’intérêt : le très beau théorème de de Jong établissant qu’indice et exposant coïncident sur les corps de fonctions de deux variables sur les complexes fait l’objet de mon exposé [96] (séminaire Bourbaki, juin 2005). Il y a là un domaine en pleine activité : travaux de Saltman d’une part, de Lieblich et de de Jong et Starr d’autre part.

B.6. *Obstruction élémentaire* (une notion dégagée dans [35])

L'article [102], avec Borovoi et Skorobogatov, commence par des théorèmes généraux portant sur toutes les variétés algébriques, il se spécialise ensuite au cas des espaces homogènes. Cet article a été commencé en décembre 2005 et (essentiellement) fini en mai 2006. Il a déjà été suivi d'un article de Wittenberg. L'obstruction élémentaire est aussi l'objet d'un travail de Harari et Szamuely. L'obstruction élémentaire, dans le cas des corps de fonctions, apparaît aussi dans les travaux de de Jong et Starr sur la conjecture II de Serre.

Des versions non commutatives, dans le cas des courbes, font l'objet de recherches en liaison avec la conjecture des sections de Grothendieck (Harari-Szamuely, Esnault-Wittenberg, Stix).

B.7. *Dimension canonique*

L'article [99] (en russe), avec Karpenko et Merkur'ev, fruit d'une discussion à Oberwolfach en juin 2006, donne le premier exemple où la dimension canonique d'un groupe algébrique (une notion récemment introduite mais qui a fait déjà l'objet de toute une série de travaux) n'est pas une puissance d'un nombre premier.

B.8. *Principe local-global sur un corps d'une fonction d'une variable sur les p -adiques*

L'article [113] (écrit avec R. Parimala et V. Suresh entre avril et décembre 2008) donne de nouvelles applications d'une technique de recollement récente de D. Harbater et J. Hartmann, que nous avons étudiée lors de mon séjour à Atlanta en avril 2008. Au passage j'ai relevé une imprécision dans leur travail (2008) avec D. Krashen (ce qui a donné lieu à un nouveau travail de leur part en 2011). En bref, dans [113] nous établissons des principes locaux globaux pour les points rationnels de certains espaces homogènes sur le corps des fonctions d'une courbe définie sur un corps p -adique. Par exemple Harbater, Hartmann et Krashen avaient donné une démonstration nouvelle du résultat de Parimala et Suresh que toute forme quadratique de rang au moins 9 sur un tel corps admet un zéro (p impair). Nous étendons ce résultat en un principe local-global pour les formes quadratiques de rang au moins 3.

Au passage, dans [113], nous donnons des raisons pour lesquelles on pourrait espérer un énoncé analogue à celui de Parimala et Suresh sur les corps de fonctions de d variables sur les p -adiques. Un travail de Heath-Brown sur les systèmes de formes quadratiques a permis récemment à D. Leep de compléter ce que nous suggérons.

Le travail de Harbater, Hartmann et Krashen fait intervenir de façon cruciale la rationalité (sur le corps de base) des groupes algébriques linéaires sous-jacents à leur problème. Nous pensons que leurs théorèmes de recollement ne s'étendent pas si l'on omet cette condition. Nous cherchons des exemples, au moyen de lois de réciprocité supérieure [125].

Les recherches dans cette direction ont motivé des travaux de mon étudiant Yong Hu.

B.9. *Quotient d'un groupe par l'action adjointe*

L'article [109], avec B. Kunyavskii, V. Popov et Z. Reichstein (gros travail commencé en 2006, terminé fin 2008, publié dans *Compositio* en 2010) résoud – pour les groupes sans facteur de type G_2 ! – une question de rationalité apparemment bien connue en théorie des invariants : le corps des fonctions du groupe est-il transcendant pur sur son sous-corps des invariants pour l'action adjointe ? La réponse pour les groupes simples dépend de leur type de Dynkin. L'article repose en partie sur l'article [95] avec Kunyavskii. En s'appuyant de façon essentielle sur cet article [109], A. Premet (juin 2009) a quelques mois plus tard résolu négativement une conjecture semble-t-il assez fameuse de Gelfand et Kirillov (1964).

C. CYCLES ALGÈBRIQUES, CORPS DE CLASSES SUPÉRIEUR; APPLICATIONS DE LA K-THÉORIE ALGÈBRIQUE.

C.1. Théorèmes de finitude pour la torsion du groupe de Chow; corps de classes supérieur.

Soit F un corps, n un entier premier à la caractéristique de F . Le théorème de Merkur'ev et Suslin (1982) dit que la flèche naturelle $K_2(F)/n \rightarrow H_{gal}^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$ est un isomorphisme. En 1974, Spencer Bloch avait montré qu'un tel théorème aurait des conséquences importantes pour l'étude de la torsion dans le groupe de Chow de codimension deux d'une variété lisse sur un corps (le groupe de Chow $CH^i(X)$ est le groupe des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle; comprendre la structure de ces groupes pour les cycles de codimension plus grande que un est un problème extrêmement difficile).

J'ai fortement contribué au développement du programme de Bloch d'étude de la torsion dans le groupe de Chow de codimension deux.

Voici ce que donne sans effort la méthode de Bloch. Soit X une variété lisse connexe sur un corps k , soit $n > 0$ un entier premier à la caractéristique de k . Si le groupe de cohomologie étale $H_{et}^3(X, \mu_n^{\otimes 2})$ est fini, alors le sous-groupe de n -torsion de $CH^2(X)$ (le groupe des éléments annulé par n) est fini. L'hypothèse de finitude de $H_{et}^3(X, \mu_n^{\otimes 2})$ est satisfaite sur un corps fini, sur les complexes, sur un corps local – mais pas sur un corps de nombres.

C.1.a. Dans [21]/[24] (1983), *avec Sansuc et Soulé, nous avons établi que pour toute variété projective et lisse X sur un corps fini le sous-groupe de torsion de $CH^2(X)$ est un groupe fini.*

C.1.b. Toujours dans [24] (1983), *avec Sansuc et Soulé, nous avons donné une démonstration nouvelle de la théorie du corps de classes non-ramifié sur les surfaces sur un corps fini*, théorie obtenue d'une autre manière par K. Kato et S. Saito (1982). La partie de p -torsion fut traitée par Gros. Dans [31], avec W. Raskind, j'ai ensuite donné une démonstration encore plus courte (argument de comptage).

C.1.c. En théorie du corps de classes classiques, sur le corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini, on dispose d'une suite exacte à trois termes dont le premier est le groupe de Brauer du corps, le second une somme de termes indexée par les points fermés de la courbe, le dernier est \mathbf{Q}/\mathbf{Z} . Kato a conjecturé que sur le corps des fonctions d'une variété projective et lisse connexe X de dimension d quelconque sur un corps fini, il y a une longue suite exacte qui commence au groupe de cohomologie H^{d+1} du corps des fonctions de X , à valeurs dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(d)$.

En dimension deux, le résultat fut établi en 1983, dans [24] et indépendamment par Kato (non publié). *En 1993, dans [53], j'ai établi cette conjecture de Kato pour les variétés de dimension 3 sur un corps fini.* (Un résultat partiel fut obtenu indépendamment par S. Saito. Je ne traitai que la partie première à la caractéristique. Ma technique fut ensuite adaptée par Suwa pour couvrir la p -torsion.) Un long programme mené par Shuji Saito et Uwe Jannsen a permis récemment à Kerz et Saito (2010) d'établir la conjecture de Kato en toute dimension, pour la torsion première à la caractéristique.

C.1.d. Soit X une k -variété projective et lisse sur un corps k (de car. zéro), possédant un point k -rationnel, et soit K/k une extension galoisienne de groupe G . Soit $k(X)$, resp. $K(X)$, le corps des fonctions de X , resp. de $X \times_k K$.

Dans [22] (1983), j'ai montré les deux énoncés, de type théorème 90 de Hilbert pour K_2 :

(a) $K_2k(X)/K_2k \simeq (K_2K(X)/K_2K)^G$

(b) *Si X possède un point k -rationnel, alors $H^1(G, K_2K(X)/K_2K) = 0$.*

La démonstration utilise bien sûr le résultat de Merkur'ev-Suslin sur le théorème 90 de Hilbert pour K_2 (1992). Les énoncés tombent en défaut si l'on ne passe pas au quotient par le K_2 du corps

de base. L'idée principale, et novatrice, est ici de passer au quotient par ces sous-groupes. Mon résultat est à celui de Merkur'ev-Suslin ce qu'est, pour $K_1(F) = F^*$, la version cohomologique d'Emma Noether au théorème 90 de Hilbert pour les normes d'extensions cycliques.

Mes résultats furent immédiatement repris par Suslin (1983), qui élimina l'hypothèse de point rationnel dans (a), et l'hypothèse de caractéristique nulle, en admettant un théorème annoncé par Bloch-Kato-Gabber (que j'ai d'ailleurs depuis passé en revue dans [73]).

Le résultat de [22] joue un rôle-clé dans un article récent de S. Gille dans *Inventiones*.

En l'absence de point rationnel, l'énoncé (b) ne vaut en général pas (sauf si la dimension cohomologique de k est au plus deux). Le bon énoncé général fut obtenu en 1993 par Bruno Kahn, inspiré d'une part par mon travail, d'autre part par des travaux de Lichtenbaum sur le complexe $\mathbf{Z}(2)$. Le résultat de Kahn est le suivant. Soit k_s une clôture séparable de k , g le groupe de Galois absolu. On a

$$H^1(g, K_2 k_s(X)/K_2 k_s) \simeq \text{Ker}[H_{gal}^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \rightarrow H_{gal}^3(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))].$$

Ce résultat de Kahn a joué un rôle important dans des travaux ultérieurs de Peyre et de Kahn, Rost et Sujatha sur la cohomologie non ramifiée des corps de fonctions des espaces homogènes de groupes linéaires. Il permet de définir l'invariant de Rost sur les toseurs sous un groupes semisimple simplement connexe.

C.1.e. Le théorème 90 établi dans [22] me permet, toujours dans [22] (1983), de montrer le théorème suivant :

Soit k un corps de nombres et soit X une k -surface projective et lisse, rationnelle (=birationnelle au plan projectif après extension du corps de base). Alors le groupe de Chow réduit $A_0(X)$, groupe des cycles de dimension zéro (zéro-cycles) modulo l'équivalence rationnelle, de degré zéro, est un groupe fini. Si X possède un point rationnel, le même énoncé vaut sur un corps k de type fini sur le corps premier.

Ce résultat venait après un travail de Bloch (1981), lui-même (très) partiellement inspiré par [8]. Bloch avait obtenu la finitude pour des surfaces rationnelles particulières, les surfaces fibrées en coniques au-dessus de la droite projective, en utilisant des résultats d'Arason et Pfister sur les formes quadratiques (résultats pré-Merkur'ev-Suslin). Ce travail de Bloch avait été raffiné par Sansuc et moi dans [17].

Toujours sur un corps de nombres, il y eut par la suite d'autres résultats de finitude, dans deux directions principales :

C.1.f. Groupe de Chow relatif des zéro-cycles

$$CH_0(X/C) = \text{Ker}[f_* : CH_0(X) \rightarrow CH_0(C)]$$

pour une fibration $f : X \rightarrow C$ dont la fibre générique est une variété de Severi-Brauer, ou une quadrique (méthode de Bloch (1981) et de [17]). Résultats de finitude de P. Salberger, M. Gros, E. Frossard, CT/Skorobogatov [55], Parimala/Suresh.

C.1.g. Le théorème général suivant fut obtenu indépendamment par Raskind et moi [46] (1991) et par P. Salberger (1993).

Soient k un corps de nombres et X une k -variété projective et lisse, connexe. Si le groupe de cohomologie cohérente $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ est nul, alors le sous-groupe de torsion du groupe $CH^2(X)$ est fini.

Il couvre le cas des surfaces rationnelles, des surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une courbe de genre quelconque; il couvre aussi des résultats de Coombes (obtenus à partir des méthodes de [22] et [26]).

En ce qui concerne Raskind et moi, [46] représenta l'achèvement d'un travail commencé dans l'article souvent cité (mais un peu technique) [26] (1985), où nous avons déjà généralisé un grand

nombre des arguments de Bloch et de mon article [22], mais où nous n'avions pas obtenu de nouveaux résultats sur un corps de nombres. L'article [46] utilise en outre un résultat non publié de Gillet (dont il donne une démonstration), certains résultats de la théorie du corps de classes des courbes sur un corps de nombres (Bloch, Kato-Saito, Somekawa), ainsi qu'une version d'un argument de Salberger, qui nous permet d'éliminer l'hypothèse supplémentaire $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, que nous avons initialement faite.

Il y eut un article subséquent de S. Saito, qui montra, par une variante de la méthode, que lorsque k est un corps de type fini sur le corps premier, le sous-groupe de torsion $CH^2(X)$ est fini si X est une k -surface projective lisse connexe satisfaisant $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, et possédant un point rationnel.

Ces résultats ont clos une époque. Il y a eu depuis des résultats de finitude pour la torsion de surfaces ne satisfaisant pas $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, mais ceux-ci sont très fins : résultats pour des surfaces très particulières comme le produit de deux courbes elliptiques sur le corps des rationnels, utilisation de la théorie de Hodge p -adique, de résultats de Wiles et d'autres sur la finitude de certains groupes de Selmer. Mathématiciens ayant contribué à ces développements : Shuji Saito, A. Langer, W. Raskind, M. Spieß, N. Otsubo, Kanetomo Sato, J. Nekovář, J. Dee.

L'article [94] (2004). Dans cet article, j'établis la finitude (à la p -torsion près) du groupe de Chow de degré zéro réduit $A_0(X)$ des compactifications lisses des groupes algébriques linéaires connexes sur un corps p -adique. La méthode ... ne passe pas par la K -théorie. C'est en fait les résultats très précis obtenus sur la R -équivalence sur les points rationnels d'un k -groupe linéaire connexe (CT/Sansuc 1977 pour les tores, Gille 1997 en général) qui m'ont permis d'obtenir ce résultat. A la lueur de résultats de Kollár, on rêvait d'un tel résultat pour toutes les variétés rationnellement connexes, mais jusque récemment, dans le cas de mauvaise réduction, on ne savait rien faire. Mon résultat fut le premier résultat non trivial dans cette direction. A noter qu'il n'utilise pas non plus (malheureusement) les techniques de déformation de Kollár.

Les résultats qualitatifs obtenus dans [94] sont maintenant dépassés par un magnifique travail de Shuji Saito et Kanetomo Sato (2006), portant sur toutes les variétés projectives et lisses sur les corps p -adiques, paru dans *Annals of Mathematics*, et sur lequel j'ai fait le rapport Bourbaki [110]. La K -théorie joue ici un rôle. L'article initial concernait des variétés avec réduction disons semi-stable. En avril 2006 j'avais montré à Shuji Saito et Kanetomo Sato comment leurs résultats, combinés à un théorème de de Jong, établissent que pour toute variété projective et lisse sur un corps p -adique, le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro modulo l'équivalence rationnelle est divisible par *presque tout nombre premier* l (un résultat que j'avais conjecturé il y a quelques années). Dans mon exposé au séminaire Bourbaki sur leur travail, j'ai en outre observé que les résultats récents sur la résolution des singularités (Gabber) permettent maintenant de conclure que le quotient modulo l est fini pour *tout premier* l différent de la caractéristique résiduelle.

C.2 Conjectures de type local-global pour les groupes de Chow des zéro-cycles des variétés sur un corps global.

[17], [25], [32], [56], [59], [68], [72], [74], [105], [106], [116], [118]

Il y a ici une double activité : d'une part on a dégagé une *conjecture générale sur les zéro-cycles*, d'autre part on l'a démontrée pour certaines classes de variétés.

Pour les courbes, la conjecture proposée est une conséquence de la finitude supposée des groupes de Tate-Shafarevich des variétés abéliennes. En dimension supérieure j'essaye de démontrer les conjectures sur les zéro-cycles par réduction au cas des courbes – ce qui explique l'hypothèse de finitude groupes de Tate-Shafarevich des variétés abéliennes faite dans certains énoncés.

C.2.a. *La conjecture locale-globale initiale*

Dans [17] (1981), après avoir précisé les résultats de Bloch sur le groupe de Chow des zéro-cycles sur les surfaces (rationnelles) fibrées en coniques sur la droite projective, motivés par ailleurs par nos résultats dans [8] et par l’analogie avec la “suite duale” de Cassels dans la théorie des courbes elliptiques (déjà utilisée par Manin en 1970), *Sansuc et moi avons proposé des conjectures très précises sur les noyau et conoyau de l’application diagonale sur les groupes de Chow de zéro-cycles*

$$CH_0(X) \rightarrow \prod_v CH_0(X \times_k k_v),$$

lorsque X est une surface rationnelle définie sur un corps de nombres k , et k_v est le complété de k en la place v . Pour les surfaces fibrées en coniques, nous avons vérifié la conjecture dans un certain nombre de cas numériques.

C.2.b. Les résultats sur les points rationnels obtenus par la méthode de la descente dans [25]/[32] (CT/Sansuc/Swinnerton-Dyer), et le travail [13] (avec Coray) nous ont ensuite permis d’établir *la conjecture pour toutes les surfaces de Châtelet* (ce sont les surfaces fibrées en coniques non triviales les plus simples).

C.2.c. Puis, dans un article remarquable (Invent. math., 1988), Salberger établit l’essentiel de notre conjecture pour toutes les surfaces fibrées en coniques sur la droite projective.

C.2.d. *La conjecture locale-globale généralisée*

Inspirés par la conjecture de CT/Sansuc [17] (1981) sur les surfaces rationnelles, Kato et Saito, en marge de leur grand travail sur la théorie du corps de classes ramifié de dimension supérieure (1983), proposèrent une conjecture stratosphérique sur toutes les variétés sur un corps de nombres (sans l’ombre d’une “évidence supplémentaire”). Ceci fut développé par Saito dans un article en 1989, où il revient sur le cas des courbes, déjà considéré par Manin en 1970. Ici une partie de la conjecture est simple, et se généralise aisément en dimension supérieure, la question est :

L’obstruction de Brauer-Manin à l’existence d’un zéro-cycle de degré un est-elle la seule obstruction ?

Pour les courbes, la réponse est oui si l’on sait que le groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne de la courbe est fini (Manin, S. Saito, [72]).

Dans [59] et [72] je propose, pour toute variété projective et lisse X sur un corps de nombres, et pour tout entier i une conjecture locale-globale généralisée pour l’image des applications “cycle” envoyant le groupe $CH^i(X)$ dans les groupes de cohomologie étale $H_{\text{ét}}^{2i}(X, \mu_n^{\otimes i})$, pour n variable.

Ces conjectures sont difficiles et peut-être trop ambitieuses, mais elles ont l’avantage d’être plus concrètes que celles proposées par Kato et Saito.

Des travaux de M. Lieblich et de R. Parimala (en cours, 2012) donnent des conséquences assez frappantes de ces conjectures, par exemple une borne pour la dimension des formes quadratiques anisotropes sur un corps de fonctions d’une variable sur un corps de nombres totalement imaginaire.

C.2.e. J’ai contribué à généraliser le résultat de Salberger : il s’agit de considérer des variétés X fibrées au-dessus de la droite projective, la fibre étant une variété projective espace homogène d’un groupe linéaire. Citons les articles [56] (avec Swinnerton-Dyer) (les résultats principaux pour les zéro-cycles furent obtenus indépendamment par Salberger, lequel, de façon curieuse, utilisait les torseurs universels de CT/Sansuc, quand nous utilisions une variante de sa méthode) et [68] (avec Swinnerton-Dyer et Skorobogatov).

Au cours de ce travail, nous observâmes que l’“astuce de Salberger” peut être vue comme entièrement parallèle à l’idée de l’article [19] (utilisation de l’hypothèse de Schinzel pour trouver

des points rationnels). A tout le moins les articles [56], [67], [68] suggèrent le “*principe général*” (mais pas toujours immédiat à appliquer) : quand on peut obtenir un résultat sur les points rationnels en supposant l’hypothèse de Schinzel, on peut obtenir un résultat incondtionnel sur les zéro-cycles de degré un (et souvent sur le groupe de Chow des zéro-cycles).

Tout récemment, Dasheng Wei (Beijing) vient d’appliquer ce principe à certaines équations auxquelles les résultats de [68] ne s’appliquaient pas directement (“manque d’abélianité dans les mauvaises fibres”). Cela répond à des questions que j’avais soulevées.

C.2.f. Dans [74] (2000), j’ai montré que l’on pouvait étendre la méthode de Salberger aux surfaces fibrées en coniques au-dessus d’une courbe C de genre quelconque, et établir ainsi pour les zéro-cycles sur ces surfaces la conjecture locale-globale généralisée – modulo la finitude du groupe de Tate-Shafarevich de la jacobienne de C . Certaines hypothèses parasites ont été levées par E. Frossard (2000). Un article ultérieur de van Hamel (2002) apporte quelques précisions complémentaires, grâce à une nouvelle approche de l’étude des zéro-cycles.

Ces travaux ont été depuis repris par O. Wittenberg (2010/2011), qui s’appuyant seulement sur [68] (fibrations sur \mathbf{P}^1) retrouve et étend tous les résultats mentionnés dans l’alinea précédent, qui concernent des fibrations dont les fibres satisfont le principe de Hasse.

Par ailleurs Yongqi Liang (étudiant de D. Harari) obtient (2010/2011) une série de résultats intéressants dans la direction de la conjecture pour des fibrations dont toutes les fibres sont intègres, mais qui ne satisfont pas forcément le principe de Hasse. Cela lui permet d’établir la conjecture pour les compactifications lisses de groupes algébriques linéaires. Chez lui aussi les articles [56] et [68] restent des constituants essentiels de la méthode. Le travail de Yongqi Liang répond en particulier à des questions soulevées dans mon article [105], où j’établis un cas particulier de la conjecture pour les 0-cycles pour des variétés utilisées par Poonen en 2008 pour fabriquer des contre-exemples pour les points rationnels.

C.2.g. *Le cas fonctionnel* [106] [114] [118] (travaux entre 2009 et 2011)

Sur un corps de fonctions d’une variable sur un corps fini, comme l’a observé S. Saito, la conjecture est liée à des versions de la conjecture de Tate à coefficients entiers pour les cycles de dimension 1 sur les variétés sur les corps finis.

C’est ce qui a motivé le travail [106] avec T. Samuely, où nous relisons un article important mais difficile de C. Schoen, et en tirons une première conséquence, à savoir un principe local-global pour les zéro-cycles lorsque le corps de base est un corps de fonctions d’une variable sur la clôture algébrique d’un corps fini.

Dans [116], Swinnerton-Dyer et moi établissons un cas très particulier de la conjecture, néanmoins intéressant car il vaut pour certaines surfaces “de type général”.

Des travaux de Lichtenbaum, et de Bruno Kahn (1996, 2003), sur les cycles algébriques, la cohomologie motivique et la cohomologie étale non ramifiée, permettent d’établir, sur un corps de base fini ou algébriquement clos, un isomorphisme entre la cohomologie non ramifiée en degré 3 (à coefficients \mathbf{Q}/\mathbf{Z} et la torsion du conoyau (conjecturalement fini) de l’application cycle en cohomologie étale entière, sur les cycles de codimension 2. Un énoncé plus général est dû à Bruno Kahn (article motivé par [116]). Une démonstration simple est donnée dans [118].

Dans [118], Bruno Kahn et moi sommes amenés à conjecturer que, sur un corps fini, le troisième groupe de cohomologie non ramifié est fini, et qu’il est nul pour les variétés de dimension 3 uniréglées. Un résultat de Parimala et Suresh (2010) motivé par mes questions établit cette nullité pour les solides fibrés en coniques. Mettant tout cela ensemble, on obtient une démonstration de l’analogie dans le cas fonctionnel du théorème de Salberger (1988) sur les surfaces rationnelles fibrées en coniques sur un corps de nombres. Et ce par une méthode dont on espère qu’elle aura plus de chance de se généraliser que la méthode de Salberger (à laquelle résistent toujours les surfaces cubiques). Un travail récent de Pirutka établit la nullité de H_{nr}^3 pour le produit d’une surface géométriquement rationnelle et d’une courbe quelconque.

C.3. Géométrie algébrique complexe et K-théorie algébrique (CT-Voisin) [111] (2010)

Cet article, qui porte principalement sur les variétés sur le corps des complexes, représente une rencontre entre des problèmes de géométrie complexe classiques et des techniques de K-théorie algébrique. Certains des problèmes considérés sont les analogues sur un corps de fonctions d'une variable sur les complexes de problèmes considérés ci-dessus (C.2.g) sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini.

En nous appuyant sur la conjecture de Bloch–Kato en K-théorie de Milnor, nous établissons un lien général entre le défaut de la conjecture de Hodge entière pour la cohomologie de degré 4 et le troisième groupe de cohomologie non ramifiée à coefficients \mathbf{Q}/\mathbf{Z} .

Ceci permet de montrer (via un théorème de C. Voisin) que sur un solide unirégulé le troisième groupe de cohomologie non ramifiée à coefficients \mathbf{Q}/\mathbf{Z} s'annule, ce que la K-théorie algébrique ne permet d'obtenir que dans certains cas.

Ceci permet à l'inverse de déduire d'exemples ayant leur source en K-théorie (CT-Ojanguren, [42]) que la conjecture de Hodge entière pour la cohomologie de degré 4 peut être en défaut pour les variétés rationnellement connexes.

Pour certaines familles à un paramètre de surfaces, on établit un lien entre la conjecture de Hodge entière et l'indice de la fibre générique (pgcd des degrés des multisections). Ceci utilise des techniques de K-théorie algébrique combinée à la cohomologie galoisienne remontant aux travaux de Bloch et à CT-Raskind [26].

L'article [111] a inspiré un travail de B. Kahn, le travail [118] a ensuite été développé en commun par B. Kahn et moi. Cet ensemble de travaux vient d'être prolongé dans des articles d'A. Pirutka.

C.4 Les articles [87] et [93]

L'article [87] (avec David Madore) utilise plusieurs techniques de K-théorie algébrique (certaines inspirées de travaux de Merkur'ev) pour exhiber des surfaces de del Pezzo (en degré 4, 3 et 2) sur un corps de dimension cohomologique 1, surfaces qui ne possèdent aucun zéro-cycle de degré 1 (et en particulier pas de point rationnel). En degré 4 (intersection lisse de deux quadriques dans \mathbf{P}^4), ceci fournit un contre-exemple à un énoncé de A. Brumer (1978) (en 1982 j'avais trouvé une erreur dans la démonstration). En degré 3 (surfaces cubiques lisses), il nous faut utiliser la technique des “formules du degré de Rost” (formules qui ont été beaucoup discutées dans le cadre des travaux de Rost, Voevodsky, Morel). Par les mêmes techniques, on peut de façon un peu plus simple ([93]) donner des exemples d'hypersurfaces de degré premier $p > 3$ dans l'espace projectif de dimension p . Ces exemples répondent négativement à une question de Kato et Kuzumaki (1986).

D. GÉOMÉTRIE ALGÈBRE RÉELLE, FORMES QUADRATIQUES, SOMMES DE CARRÉS.

Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques ont de nombreux points communs, comme cela a été expliqué par de nombreux auteurs depuis E. Artin, E. Witt, A. Pfister. Les différents travaux rassemblés sous cette rubrique s'inscrivent dans cette tradition d'étude des liens entre la topologie et l'algèbre.

[10], [12], [58] définissent, pour une variété projective et lisse X sur un corps k , et à partir des formes de Pfister sur ce corps, des groupes dont certains, lorsque k est le corps des réels, donnent simplement le nombre de composantes connexes réelles. Sur certains corps k non nécessairement ordonnables, ces groupes permettent de détecter la non k -rationalité de certaines variétés.

L'invariance birationnelle de ce nombre de composantes, remarquée par Sansuc et moi, et reprise par divers auteurs, pose la question d'une démonstration (algébrique) de l'invariance birationnelle des groupes considérés. Ce problème fut résolu par M. Rost (1990).

[12] (avec Sansuc) résoud, pour les surfaces lisses réelles compactes, un problème de Knebusch : séparation des composantes connexes réelles par les espaces quadratiques. La solution générale fut ensuite apportée par L. Mahé (1982). Des discussions avec ce dernier lui permirent de montrer que le "niveau" (nombre minimum de carrés nécessaire pour écrire -1 comme une somme de carrés) de l'anneau des fonctions d'une variété algébrique sans point réel est borné en fonction de la dimension de la variété.

[18] (avec Ischebeck) montre que *le nombre de composantes connexes peut aussi se récupérer à partir du groupe de Chow des zéro-cycles*, généralisant ainsi un résultat de Witt (1934) pour les courbes. Il y a eu un travail important de Ischebeck et Schülting (Inv. math., 1998) étendant ce résultat aux cycles de codimension quelconque (le cas de la codimension 1 était connu, e.g. de Bröcker).

[20] est un rapport général sur les divers Nullstellensätze et Positivstellensätze. Son contenu a été repris dans divers livres (Lam, Bochnak/Coste/Roy, Benedetti/Tognoli).

Dans [28] (1986), *je remarque qu'un résultat de Kato (1986), joint à des arguments de Pfister, implique que toute fonction rationnelle totalement positive sur une courbe intègre définie sur un corps de nombres est somme d'au plus sept carrés de fonctions rationnelles*. Avant mon résultat, l'existence d'une borne universelle n'était connue que pour la droite projective (Landau, 1912). F. Pop (non publié) a depuis descendu la borne à 6.

Dans [47] (avec Jannsen), je montre que si deux conjectures de base sont satisfaites, alors, sur une variété intègre définie sur un corps de nombres de dimension $d \geq 2$, toute fonction rationnelle totalement positive est somme d'au plus 2^{d+1} carrés de fonctions rationnelles (là encore moins, l'existence d'une borne universelle n'était connue). La première conjecture, algébrique, est devenu un théorème sur les formes quadratiques publié par Orlov-Vishik-Voevodsky en 2007 (et reposant sur la conjecture de Milnor comme établie par Voevodsky). La seconde conjecture, arithmétique, est un principe local-global cohomologique conjecturé par Kato, établi par Kato (1986) pour $d = 1$, par Jannsen pour $d = 2$ en 1989, et maintenant par Jannsen pour d quelconque (annoncé en 1990, texte disponible en 2009). [J. Kr. Arason a remarqué que si l'on se contentait de 2^{d+2} carrés, on peut se passer de la seconde conjecture.]

[44] (avec Parimala) *relie le nombre de composantes connexes réelles à la cohomologie non ramifiée d'une variété lisse sur les réels (en degré suffisamment grand)*, via le théorèmes de Mahé sur les espaces quadratiques. Je remarquai par la suite qu'un travail de Cox (1977) permet d'étendre ce résultat aux variétés singulières. Scheiderer (1993, Springer LNM 1588) de façon très impressionnante a généralisé ces résultats à essentiellement tous les schémas. Il y a eu aussi des travaux subséquents de Mahé et de Burési. Une question soulevée dans cet article a été résolue par Krasnov.

Scheiderer et moi-même [62] avons poussé l'analyse du groupe de Chow des zéro-cycles de variétés algébriques réelles, en utilisant des résultats de K -théorie algébrique (par exemple, nous avons une version réelle du théorème de Roitman sur les zéro-cycles). Il y a eu des travaux subséquents de Pedrini/Weibel, puis de van Hamel.

[52] utilise la cohomologie galoisienne et la géométrie algébrique complexe (théorème de Noether-Lefschetz) pour montrer l'existence de beaucoup de fonctions de $\mathbf{R}(x, y)$ sommes de 4 carrés (c'est la borne supérieure trouvée par Hilbert pour toute somme de carrés dans ce corps), mais qui ne sont pas sommes de 3 carrés (de telles fonctions avaient été exhibées par Cassels/Ellison/Pfister en 1974, via une descente délicate sur des courbes elliptiques définie sur $\mathbf{R}(x)$).

[57] (avec Sujatha) aurait plus sa place dans le thème B – d'ailleurs les principaux résultats ont été généralisés au-dessus d'un corps de base quelconque par Bruno Kahn, Sujatha, Rost. Il s'agissait de voir que les résultats de K -théorie algébrique de l'école de Saint-Petersbourg, combinés à la théorie de Bloch-Ogus, sont assez puissants pour permettre le calcul du groupe H^3 non ramifié de quadriques anisotropes.

[64] étend à beaucoup de groupes linéaires connexes des résultats obtenus par Witt en 1937 sur le groupe orthogonal. J'utilise les tores flasques d'une part [33], des résultats de Scheiderer d'autre part. Je définis aussi, au-dessus du corps des fonctions d'une courbe réelle, une obstruction de réciprocity analogue à l'obstruction de Brauer-Manin (thème A). Les conjectures sur les groupes linéaires proposées dans cet article ont pour la plupart été depuis établies (travaux de Ducros, Scheiderer, Bayer-Parimala, Flicker-Sujatha-Scheiderer). Par ailleurs Ducros dans sa thèse a montré que pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus de la droite projective sur $\mathbf{R}(t)$, l'obstruction de réciprocity "est la seule" (les torseurs universels de la méthode de la descente jouent encore ici un rôle).

Le bref article [92] (en allemand) met en relation mes travaux [11] [16], un théorème de pureté de Markus Rost, et les travaux d'Eberhard Becker sur les sommes de puissances n -ièmes.

E. Liste des travaux

Paru en 1972

1. Surfaces de Del Pezzo de degré 6. C.R.A.S. Paris **275** (1972) 109-111.
2. Quelques propriétés arithmétiques des surfaces rationnelles (d'après Manin). Sémin. de théorie des nombres de Bordeaux, 1971-1972, exp.13 (22 pages).

Paru en 1976

3. Variation de la hauteur sur une famille de courbes elliptiques particulière. Acta Arithmetica XXXI (1976) 1-16.
4. (avec J.-J. Sansuc) Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques. C.R.A.S. Paris **282** (1976) 1113-1116.
5. L'équivalence rationnelle sur les tores. Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1975-1976, exp. 15 (25 pages).

Paru en 1977

6. (avec J.-J. Sansuc) Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles. C.R.A.S. Paris **284** (1977) 967-970.
7. (avec J.-J. Sansuc) La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres. C.R.A.S. Paris **284** (1977) 1215-1218.
8. (avec J.-J. Sansuc) La R-équivalence sur les tores. Ann. Sc. E. N. S. **10** (1977) 175-229.

Paru en 1978

9. (avec J.-J. Sansuc) Cohomologie des groupes de type multiplicatif sur les schémas réguliers. C.R.A.S. Paris **287** (1978) 449-452.
10. Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques. Bull. S. M. F. **106** (1978) 113-151.

Paru en 1979

11. Formes quadratiques sur les anneaux semi-locaux réguliers. In Colloque sur les formes quadratiques (Montpellier 1977). Bull. S. M. F., Mémoire **59** (1979) 13-31.
12. (avec J.-J. Sansuc) Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles. Math. Ann. **244** (1979) 105-134.
13. (avec D. Coray) L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques. Compositio Math. **39** (1979) 301-332.

Paru en 1980

14. (avec J.-J. Sansuc) La descente sur les variétés rationnelles. In Journées de géométrie algébrique d'Angers (juillet 1979), édité par A. Beauville, Sijthof and Noordhof (1980) 223-237.
15. (avec D. Coray et J.-J. Sansuc) Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. J. für die reine und ang. Math. (Crelle) **320** (1980) 150-191.
16. Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques : deux compléments. Bulletin S. M. F. **108** (1980) 213-227.

Paru en 1981

17. (avec J.-J. Sansuc) On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch. Duke Math. J. **48** (1981) 421-447.
18. (avec F. Ischebeck) L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles. C. R. A. S. Paris, **292** (1981) 723-725.

Paru en 1982

19. (avec J.-J. Sansuc) Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel. *Acta Arithmetica* **XLI** (1982) 33-53.
20. Variantes du Nullstellensatz réel et anneaux formellement réels. In *Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques* (Rennes 1981), Springer L. N. M. **959** (1982) édité par J.-L. Colliot-Thélène, M. Coste, L. Mahé et M.-F. Roy, p. 98-108.
21. (avec C. Soulé et J.-J. Sansuc) Quelques théorèmes de finitude en théorie des cycles algébriques. *C.R.A.S. Paris* **294** (1982) 749-752.

Paru en 1983

22. Hilbert's theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces. *Inv. Math.* **71** (1983) 1-20.
23. (avec J.-J. Sansuc) Quelques gammes sur les formes quadratiques. *Journal of Algebra* **84** (1983) 449-467.
24. (avec J.-J. Sansuc et C. Soulé) Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux. *Duke Math. J.* **50** (1983) 763-801.

Paru en 1984

25. (avec J.-J. Sansuc et Sir P. Swinnerton-Dyer) Intersections de deux quadriques et surfaces de Châtelet. *C.R.A.S. Paris* **298** (1984) 377-390.

Paru en 1985

26. (avec W. Raskind) K_2 -cohomology and the second Chow group. *Math. Ann.* **270** (1985) 165-199.
27. (avec A. Beauville, J.-J. Sansuc et Sir P. Swinnerton-Dyer) Variétés stablement rationnelles non rationnelles. *Ann. of Math.* **121** (1985) 283-318.

Paru en 1986

28. Sums of squares. Appendix to a paper of K.Kato. *J. für die reine und angew. Math.* **366** (1986) 181-183.
29. (avec J.-J. Sansuc) La descente sur les surfaces rationnelles fibrées en coniques. *C.R.A.S. Paris.* **303** (1986) 303-306.
30. Surfaces cubiques diagonales. *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1984-1985, Progress in Mathematics, vol. 63*, Birkhäuser (1986) 51-66.
31. (avec W. Raskind) On the reciprocity law for surfaces over finite fields. *Journal of the Faculty of Science of the University of Tokyo, Sect. I A, Math.* **33** (1986) 283-294.

Paru en 1987

32. (avec J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer) Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I, *J. für die reine und angew. Math.* **373** (1987) 37-107; II, *ibid.* **374** (1987) 72-168.
33. (avec J.-J. Sansuc) Principal homogeneous spaces under flasque tori, applications. *Journal of Algebra* **106** (1987) 148-205.
34. (avec D. Kanevsky et J.-J. Sansuc) Arithmétique des surfaces cubiques diagonales. In *Diophantine Approximation and Transcendence Theory*, Springer L.N.M. **1290** (ed. G. Wüstholz) (1987) 1-108.
35. (avec J.-J. Sansuc) La descente sur les variétés rationnelles II, *Duke Math. J.* **54** (1987) 375-492.
36. (avec A.N. Skorobogatov) R-equivalence on conic bundles of degree 4, *Duke Math. J.* **54** (1987) 671-677.
37. Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnels. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California 1986, (1987), Tome I*, 641-653.

Paru en 1988

38. Arithmétique sur certaines hypersurfaces cubiques (d'après un travail commun avec Per Salberger). Séminaire de théorie des nombres de Paris 1986-1987, ed. C. Goldstein, Progress in Math. **75** (1988), Birkhäuser, 91-109.

39. Les grands thèmes de François Châtelet (exposé fait lors de la journée en l'honneur de F. Châtelet, Besançon, 28 septembre 1987), l'Enseignement Mathématique, 2ème Série **34** (1988) 387-405.

40. (avec J.-J. Sansuc) Problèmes de rationalité de quotients par des groupes linéaires (d'après Bogomolov et Saltman) : texte distribué lors de la IXème école d'été latino-américaine à Santiago du Chili (juillet 1988). (38+8 pages).

Paru en 1989

41. (avec P. Salberger) Arithmetic on some singular cubic hypersurfaces, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **58** (1989) 519-549.

42. (avec M. Ojanguren) Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin-Mumford, Inventiones math. **97** (1989) 141-158.

43. (avec R. Parimala et R. Sridharan) Un théorème de pureté locale. Note aux C.R.A.S. **309**, Série I (1989) 857-862.

Paru en 1990

44. (avec R. Parimala) Real components of algebraic varieties and étale cohomology. Inventiones math. **101** (1990) 81-99.

45. Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4, Séminaire de théorie des nombres de Paris 88-89. Progress in Mathematics **91**, Birkhäuser (1990), p. 43-55.

Paru en 1991

46. (avec W. Raskind) Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude pour la torsion. Invent. math. **105** (1991) 221-245.

47. (avec U. Jannsen) Sommes de carrés dans les corps de fonctions. C. R. Acad. Sc. Paris **312** (1991) 759-762.

Paru en 1992

48. Real rational surfaces without a real point. Archiv der Mathematik **58** (1992) 392-396.

49. (avec M. Ojanguren) Espaces principaux homogènes génériquement triviaux. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **75** (1992) 97-122.

50. (avec A.N. Skorobogatov) Approximation faible pour les intersections de deux quadriques dans l'espace projectif de dimension 5. C. R. A. S. Paris, **314**, Série I (1992) 127-132.

51. L'arithmétique des variétés rationnelles. Rapport général à l'occasion de la remise du prix Fermat (Toulouse, juin 1991), Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, vol. **I**, numéro 3 (1992) 295-336.

Paru en 1993

52. The Noether-Lefschetz theorem and sums of four squares in the rational function field $\mathbf{R}(x,y)$, Compositio Mathematica **86** (1993) 235-243.

53. On the reciprocity sequence in higher class field theory of function fields, in *Algebraic K-Theory and Algebraic Topology* (Lake Louise 1991), P. G. Goerss and J. F. Jardine ed., NATO ASI Series C **407**, Kluwer 1993, 35-55.

54. Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique paru in *Arithmetic Algebraic Geometry* (CIME, Trento, 1991) J.-L. Colliot-Thélène, K. Kato, P. Vojta, Springer L.N.M. **1553** (1993) p. 1-49.

55. (avec A.N. Skorobogatov) Groupes de Chow des 0-cycles des fibrés en quadriques, Journal of K-theory **7** (1993) 477-500.

Paru en 1994

56. (avec P. Swinnerton-Dyer) Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties *J. für die reine und ang. Mathematik* **453** (1994) 49-112.

Paru en 1995

57. (avec R. Sujatha) Unramified Witt groups of real anisotropic quadrics, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58**, Part II (1995) 127-147.

58. Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58**, Part I (1995) 1-64.

59. L'arithmétique des zéro-cycles (exposé aux Journées arithmétiques de Bordeaux, septembre 93), *Journal de théorie des nombres de Bordeaux* **7** (1995) 51-73.

Paru en 1996

60. Quelques théorèmes de finitude pour le groupe SK_1 d'une algèbre de biquaternions. *Journal of K-Theory* **10** (1996) 31-48.

61. (avec R. M. Guralnick et R. Wiegand) Multiplicative groups of fields modulo products of subfields, *Journal and Pure and Applied Algebra* **106** (1996) 233-262.

62. (avec C. Scheiderer) Zero-cycles and cohomology on real algebraic varieties. *Topology* **35** (1996) 533-559.

63. (avec Shuji Saito) Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer, *International Mathematical Research Notices* **4** (1996) 151-160.

64. Groupes linéaires sur les corps de fonctions de courbes réelles. *J. für die reine und ang. Mathematik* **474** (1996) 139-167.

Paru en 1997

65. (avec A. N. Skorobogatov et Sir Peter Swinnerton-Dyer) Double fibres and double covers : paucity of rational points, *Acta Arithmetica* **LXXIX.2** (1997) 113-135.

66. (avec B. Kahn et R. Hoobler) The Bloch-Ogus-Gabber theorem, Proceedings of the Great Lakes K-Theory Conference (Toronto 1996), ed. R. Jardine and V. Snaith. The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences Communications Series, Volume **16**, A.M.S., Providence, R.I. 1997, p. 31-94.

Paru en 1998

67. The Hasse principle in a pencil of algebraic varieties, Proceedings of the Tiruchirapalli conference (India, January 1996), ed. M. Waldschmidt and K. Murty, *Contemporary Mathematics*, **210** (1998) 19-39.

68. (avec A. N. Skorobogatov et Sir Peter Swinnerton-Dyer) Rational points and zero-cycles on fibred varieties : Schinzel's hypothesis and Salberger's device, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **495** (1998) 1-28.

69. (avec A. N. Skorobogatov et Sir Peter Swinnerton-Dyer) Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points. *Inventiones math.* **134** (1998) 579-650.

70. (avec B. È. Kunyavskii) Groupe de Brauer non ramifié des espaces principaux homogènes de groupes linéaires, *J. Ramanujan Math. Soc.* **13** (1998) 37-49.

71. Recension de l'article Division algebras over p -adic curves, *J. Ramanujan Math. Soc.* **12**, No. 1, 25-47 (1997), par D. J. Saltman, in *Zentralblatt für Mathematik* (1998) 902.16021 (2 pages).

Paru en 1999

72. Conjectures de type local-global sur l'image de l'application cycle en cohomologie étale, in Algebraic K-Theory, W. Raskind and C. Weibel ed., (Proceedings of the 1997 Seattle conference on Algebraic K-Theory). Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **67**, AMS 1999, 1-12.

73. Cohomologie des corps valués henséliens, d'après Kato et Bloch, notes d'un cours donné à Bordeaux au printemps 97, version révisée distribuée à l'École d'été de Trieste (septembre 1997) (d'après des notes de Luca Spriano), version finale parue dans Algebraic K-Theory and its applications, Proceedings of the Workshop and Symposium, ICTP, Trieste, Italia, 1-19 September 1997, ed. H. Bass, A. O. Kuku, C. Pedrini), World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 1999, 120-163.

Paru en 2000

74. Principe local-global pour les zéro-cycles sur les surfaces réglées, J. Amer. Math. Soc. **13** (1) (janvier 2000) 101–124. “On line” 29 septembre 1999.

75. (avec B. Poonen) Algebraic families of nonzero elements of Shafarevich-Tate groups, J. Amer. Math. Soc. **13** (1) (janvier 2000) 83–99. “On line” 20 août 1999.

76. Rational connectedness and Galois covers of the projective line, Annals of Mathematics **151**, No. 1, 359–373 (janvier 2000).

77. (avec A. N. Skorobogatov) Descent on fibrations over \mathbf{P}_k^1 revisited, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128** (2000), no. 3, 383–393.

78. Le groupe $V(C)$ est en général de rang infini (appendice à un texte de T. Szamuely). J. für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) **525** (2000), 209–211.

79. (avec Manuel Ojanguren) Recension des Œuvres de Witt, Gazette des mathématiciens **84**, avril 2000, 96–104, Société mathématique de France. Trad. allemande dans Math. Semesterber. **47** (2000) 119–126.

Paru en 2001

80. Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have a rational 2-division point, in Rational points on algebraic varieties (Close variation on a recent paper of Bender and Swinnerton-Dyer) (E. Peyre et Yu. Tschinkel, éd.), Progress in Mathematics **199** (2001) 117–161.

81. (avec P. Gille et R. Parimala) Arithmétique des groupes algébriques linéaires sur certains corps géométriques de dimension deux, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), 827–832. (Annonce de résultats parus dans l'article 88.)

Paru en 2002

82. (avec M. Ojanguren et R. Parimala) Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian rings and Brauer groups of related schemes, Proceedings of the International Colloquium on “Algebra, Arithmetic and Geometry Mumbai 2000”, (R. Parimala, ed.), Published for the Tata Institute of Fundamental Research by Narosa Publishing Company, 185–217.

83. Appendice à un article de R. Heath-Brown, Annals of Mathematics **155** (2002) 596–598.

84. Exposant et indice d'algèbres centrales simples non ramifiées (avec un appendice par Ofer Gabber), L'Enseignement Mathématique **48** (2002) 127–146.

Paru en 2003

85. Points rationnels sur les fibrations (notes d'un cours donné à Budapest en septembre 2001), in Higher Dimensional Varieties and Rational Points, Bolyai Society Mathematical Series, vol 12, Springer-Verlag, 2003, edited by K. J. Böröczky, J. Kollár and T. Szamuely, 171–221.

86. (avec D. Harari et A. N. Skorobogatov) Valeurs d'un polynôme à une variable représentées par une norme, in *Number Theory and Algebraic Geometry*, ed. Miles Reid and Alexei Skorobogatov, London Mathematical Society Lecture Notes series **303** (2003) 69–89.

Paru en 2004

87. (avec D. Madore) Surfaces de Del Pezzo sans point rationnel sur un corps de dimension cohomologique un, *Journal de l'Institut Mathématique de Jussieu* **3** (1) (2004) 1–16.
88. (avec P. Gille et R. Parimala) Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional fields, 40 pages. *Duke Mathematical Journal* **121** (2), 2004, 285–341.
89. (avec P. Gille) Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable, in "Arithmetic of higher dimensional arithmetic varieties" (ed. B. Poonen et Yu. Tschinkel), Birkhäuser, *Progress in Mathematics* **226**, 2004, 121–133.
90. Résolutions flasques des groupes réductifs connexes, *C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. I* **339** (2004) 331–334. (Annonce de résultats parus dans l'article 100.)

Paru en 2005

91. (avec D. Harari et A. N. Skorobogatov) Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann), *Expositiones mathematicae* **23** (2) (2005) 161–170.
92. Eine Bemerkung zu einem Satz von E. Becker und D. Gondard, *Mathematische Zeitschrift* **249** (2005) 541–543.
93. Fields of cohomological dimension one versus C_1 -fields, 4 pages, in *Algebra and Number Theory*, Proceedings of the Silver Jubilee Conference, University of Hyderabad, Rajat Tandon ed., Hindustan Book Agency, 2005.
94. Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d'un groupe algébrique linéaire sur un corps p -adique, *Invent. math.* **159** (2005) 589–606.

Paru en 2006

95. (avec B. Kunyavskiï) Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d'espaces homogènes, *J. Algebraic Geom.* **15** (2006), 733–752.
96. Algèbres simples centrales sur les corps de fonctions de deux variables [d'après A. J. de Jong], *Séminaire Bourbaki. Vol. 2004/2005. Astérisque* **307** (2006), Exp. No. 949, ix, 379–413.

Paru en 2007

97. (avec J.-J. Sansuc) The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the rationality problem), in *Proceedings of the International Colloquium on Algebraic groups and Homogeneous Spaces (Mumbai 2004)*, ed. V. Mehta, TIFR Mumbai, Narosa Publishing House (2007), 113–186. (version remaniée du texte 40)
98. (avec V. Suresh) Quelques questions d'approximation faible pour les tores algébriques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **57** (2007), no. 1, 273–288.
99. Кол'о-Телен, Ж.-Л. ; Карпенко, Н. А. ; Меркур'ев, А. С., Рационал'ные поверхности и каноническая размерност' группы PGL_6 (Rational surfaces and canonical dimension of PGL_6), *Алгебра и анализ* **19** (2007), no. 5, 159–178. (*St Petersburg Mathematical Journal*)

Paru en 2008

100. Fibre spéciale des hypersurfaces de petit degré, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **346** (2008), no. 1-2, 63–65.
101. Résolutions flasques des groupes linéaires connexes, *J. für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* **618** (2008), 77–133. Développe la note 90.
102. (avec M. Borovoi et A. Skorobogatov), The elementary obstruction and homogeneous spaces, *Duke math. J.* **141** no. 2 (2008) 321–364.

Paru en 2009

103. (avec Fei XU) Brauer–Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms, *Compositio Mathematica*, vol. 145 (2) (2009) 309–363.

Paru en 2010

104. Groupe de Brauer non ramifié des hypersurfaces cubiques singulières (d'après P. Salberger). Appendice à un article de Tim Browning, *Compositio mathematica* 146 (2010) 882–883.
105. Zéro-cycles de degré 1 sur les solides de Poonen, *Bull. Soc. math. France.* 138 (2) (2010) 249–257.
106. (avec T. Szamuely) Autour de la conjecture de Tate à coefficients \mathbf{Z}_l pour les variétés sur les corps finis, in *The Geometry of Algebraic Cycles* (ed. Akhtar, Brosnan, Joshua), AMS/Clay 2008 Institute Proceedings, Clay Mathematical Proceedings, 2010, pp. 83–98.
107. (avec M. Levine) Une version du théorème d'Amer et Brumer pour les zéro-cycles, in *Quadratic Forms, Linear Algebraic Groups, and Cohomology, Developments in Mathematics*, vol. 18, Springer (2010), p. 215–224

Paru en 2011

108. Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences (Cours au CIME, Septembre 2007) in *Arithmetic Geometry (CIME 2007)*, Springer LNM 2009 (2011), p. 1–44.
109. (avec B. Kunyavskii, V. L. Popov et Z. Reichstein) Is the function field of a reductive Lie algebra purely transcendental over the field of invariants of the adjoint action? *Compos. Math.* **147** (2011), no. 2, 428–466.
110. Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés p -adiques [d'après S. Saito, K. Sato et al.] Séminaire Bourbaki, 62ème année, 2009-2010, n. 2012, p. 1 à 30, Astérisque 339 (2011).

Paru, à paraître ou soumis, 2012 et 2013

111. (avec Claire Voisin) Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, *Duke Mathematical Journal* 161 (2012) 735–801.
112. Quelques cas d'annulation du troisième groupe de cohomologie non ramifiée, Actes de la conférence *Regulators III* (Barcelone), *Contemporary Mathematics* vol. **571** (2012) 43–48.
113. (avec R. Parimala et V. Suresh) Patching and local-global principles for homogeneous spaces over function fields of p -adic curves, *Commentarii Mathematici Helvetici* 87 (2012) 1011–1033.
114. (avec O. Wittenberg) Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines, *Am. J. Math.* **134** no. 5, oct. 2012, 1303–1327.
115. (avec A. N. Skorobogatov) Good reduction of the Brauer-Manin obstruction, *Trans. Amer. Math. Soc.* **365** (2013) 579–590.
116. (avec Sir Peter Swinnerton-Dyer) Zero-cycles and rational points on some surfaces over a global function field *Acta Arith.* **155** (2012) 63–70
117. (avec J. N. Iyer) Potential density for families of homogeneous spaces, *J. Ramanujan Math. Soc.* **27**, no 3 (2012) 295–303.
118. (avec B. Kahn) Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié, *J. K-Theory* **11** (2013) 1–53.
119. (avec A. N. Skorobogatov) Descente galoisienne sur le groupe de Brauer (34 pages), à paraître dans *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*.
120. Groupe de Brauer non ramifié de quotients par un groupe fini (10 pages), à paraître dans *Proc. Amer. Math. Soc.*
121. (avec Fei Xu) Strong approximation for the total space of certain quadric fibrations (26 pages), *Acta Arithmetica* **157** (2013) 169–199.
122. Invariance birationnelle et invariance homotopique : un lemme. Appendice à l'article “Birational geometry and localisation of categories” de B. Kahn et R. Sujatha (1 page)

123. Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes de tores, à paraître, Journal de théorie des nombres de Bordeaux.

124. (avec D. Harari) Approximation forte en famille, à paraître, J. für die reine und angewandte Mathematik (Crelle).

125. (avec R. Parimala et V. Suresh) Lois de réciprocité supérieures et points rationnels, soumis.

On trouvera sur ma page personnelle [http ://www.math.u-psud.fr/~colliot/](http://www.math.u-psud.fr/~colliot/) un certain nombre d'autres textes et des fichiers d'exposés.