27 août 2023

Correction pour l'article :
Zéro-cycles sur les surfaces de del Pezzo (Variations sur un thème de Daniel Coray)
par J.-L. Colliot-Thélène
L'Enseignement mathématique (2) 66 (2020) 447–487.

Comme vient de me le signaler Kai Huang (UST China), que je remercie, il y a un argument incorrect dans la démonstration des Propositions 2.3 et 2.4. L'erreur se produit à la page 455, ligne 15 ("Ceci implique"). L'erreur est essentiellement la suivante. Soit L/k une extension finie de corps. Soit X/k une k-variété algébrique et $Y = R_{L/k}(X_L)$ la restriction des scalaires. Le fait que $X(L)$ soit Zariski dense dans X_L n'implique pas que $Y(k)$ (qui s'identifie à $X(L)$) est Zariski dense dans la k-variété Y.

D'après Mazur et Rubin [MR], il existe de fait de nombreux exemples de courbes elliptiques E/k sur un corps de nombres k, et d'extensions cycliques L/k de degré premier telles que $E(k)$ est de rang 1 et l'inclusion naturelle $E(k) \subset E(L)$ est surjective. Dans un tel cas, $E(L)$ est Zariski dense dans E_L mais le k-plongement diagonal $f : E \to Y = R_{L/k}(E_L)$ satisfait $f(E(k)) = Y(k)$ et donc $Y(k)$ n'est pas Zariski dense dans Y.

Corrigendum

Soit k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe.

On dit dans l'article publié que la k-variété X satisfait la propriété de densité si l'on a :

(D) *Pour toute extension finie de corps L/k telle que $X(L) \neq \emptyset$, l'ensemble $X(L)$ est dense dans X_L pour la topologie de Zariski.*

Disons ici que la k-variété X satisfait la propriété de densité (Dbis) si l'on a

(Dbis) *Pour toute extension finie de corps L/k telle que $X(L) \neq \emptyset$, les k-points de la k-variété $R_{L/k}(X_L)$ sont Zariski denses dans Y.*

Lemme. *Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété géométriquement intègre telle que pour toute extension finie L/k avec $X(L) \neq \emptyset$, la L-variété X_L est L-unirationelle. Alors pour tout tel L, la K-variété $Y = R_{L/K}(X_L)$ est k-unirationnelle, et $Y(k)$ est Zariski dense dans Y.* QED

Ainsi X satisfait la propriété (Dbis)

On dit dans l'article publié que la k-variété X satisfait la propriété de R-densité si l'on a :

(RD) *Pour toute extension finie de corps L/k et tout point de $P \in X(L)$, les points $Q \in X(L)$ qui sont R-équivalents à P dont denses dans X_L pour la topologie de Zariski.*

Disons ici que la k-variété X satisfait la propriété de R-densité (RDbis) si l'on a

(RDbis) *Pour toute extension finie de corps L/k et tout k-point P de Y, les k-points de la k-variété $R_{L/k}(X_L)$ qui sont R-équivalents à P sont Zariski denses dans Y.*

Proposition 2.1 bis. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Toute k-hypersurface cubique lisse X dans $\mathbf{P}^n_k$, $n \geq 3$ satisfait la propriété de R-densité (RDbis).*

Démonstration. Soient L/k fini et $P \in Y(k) \simeq X(L)$. On procède comme dans la démonstration de la proposition 2.1 sur le corps L. On trouve un L-morphisme dominant $f : W \to X_L$ avec W ouvert d'un espace affine sur L et $P = f(Q)$ avec $Q \in W(L)$. On considère alors le k-morphisme $R_{L/k}(W) \to Y = R_{L/k}(X_L)$. Les k-points de $R_{L/k}(W)$ sont Zariski denses, leur image dans $Y(k)$ est Zariski-dense et consiste en points tous R-équivalents à $P \in Y(k)$. QED

Note: La proposition 2.1 bis n'est pas nécessaire dans les démonstrations des théorèmes principaux du travail. Le cas des variétés rationnellement connexes sur les corps fertiles (Théorème 2.2 bis) suffit.

Théorème 2.2 bis. *Soit k un corps fertile de caractéristique zéro. Si X est une k-variété projective et lisse géométriquement rationnellement connexe, alors elle satisfait la propriété de R-densité (RDbis).*

Démonstration. Si L/k est une extension finie de corps, la k-variété $Y = R_{L/k}(X_L)$ qui géométriquement est un produit d'exemplaires de X est géométriquement rationnellement connexe. L'énoncé résulte alors du théorème 2.2 appliqué à Y. QED

Proposition 2.3 bis. *Dans l'énoncé, remplacer l'hypothèse : "si X satisfait la propriété de R-densité" par "si X satisfait la propriété de R-densité (RDbis)".*

Démonstration. Notons $s = [L : k]$. Utiliser le k-morphisme $Y = R_{L/k}(X_L) \to Sym^s X$. Si deux k-points de Y sont R-équivalents, alors leur image définit des zéro-cycles rationnellement équivalents sur X. QED

Proposition 2.4 bis. *Dans l'énoncé, remplacer l'hypothèse : "si X satisfait la propriété de densité" par "si X satisfait la propriété de densité (Dbis)".*

Dans la démonstration du Théorème 2.9, remplacer les références aux propositions 2.3 et 2.4 par des références aux propositions 2.3 bis et 2.4 bis.

Référence

[MR] B. Mazur, and K. Rubin, Diophantine stability. With an appendix by Michael Larsen. Amer. J. Math. **140** (2018), no.3, 571–616.

Autres commentaires

p. 460 ligne 2, remplacer "la la" par "la"

p. 484, ligne 6 :
La surface W est l'éclatée d'une surface de del Pezzo en son point canonique.

Précisions sur la preuve du théorème 7.1

Elle montre que si l'on a une surface cubique lisse sans point rationnel et que tous les points de degré 3 sont alignés, alors on peut fabriquer des $Y \to P^1_k$ de fibration jacobienne $W \to \mathbf{P}^1_k$, où W est l'éclatée d'une surface de del Pezzo de degré 1, et pour tout $m \in \mathbf{P}^1(k)$ à fibre lisse, on a $Y_m(k) = W_m(k)[3]$.

Et donc $W(k)$ n'est pas Zariski dense.