Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

# Approximation faible pour les intersections de deux quadriques en dimension 3

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE et Alexei Nikolaïevitch SKOROBOGATOV

***Résumé*** — Soient $k$ un corps de nombres et V une intersection complète de deux quadriques dans l'espace projectif $\mathbb{P}_k^5$, supposée géométriquement intègre et non conique. Si V possède un point $k$-rationnel lisse, alors pour tout modèle projectif et lisse X de V, la seule obstruction à l'approximation faible est l'obstruction de Brauer-Manin. Ceci achève l'étude de l'approximation faible pour les variétés rationnelles définies par deux formes quadratiques.

## Weak approximation for intersections of two quadrics in dimension 3

***Abstract*** — *Let k be a number field and let* V *be a complete intersection of two quadrics in projective space* $\mathbb{P}_k^5$. *Assume that* V *is geometrically integral and not a cone, and that* V *contains a smooth k-rational point. Then for any smooth projective model* X *of* V, *the Brauer-Manin obstruction to weak approximation is the only obstruction. This completes the study of weak approximation for rational varieties defined by two quadratic forms.*

***Abridged English Version*** — Let $k$ be a number field and $\Omega$ the set of places of $k$. For $v\in\Omega$ one denotes by $k_v$ the completion of $k$ at $v$. Let X be a smooth $k$-variety with a $k$-point. For every $v\in\Omega$ the topology of $k_v$ induces a topology on the set $X(k_v)$ of $k_v$-points of X. Consider the diagonal embedding $X(k)\to\prod_{v\in\Omega}X(k_v)$ of the set $X(k)$ of $k$-points into the topological product of the $X(k_v)$'s. One says that weak approximation holds for X, if the image of $X(k)$ is dense in $\prod_{v\in\Omega}X(k_v)$.

Let $Br(X)=H^2_{ét}(X, \mathbb{G}_m)$ be the Brauer-Grothendieck group of X. For $\alpha\in Br(X)$, and $P\in X(K)$, where K is an overfield of $k$, we denote by $\alpha(P)\in Br(K)$ the value of $\alpha$ at P. Let $\mathrm{inv}_v : Br(k_v)\hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ be the local invariant. Assume that X is smooth and proper over $k$. The condition:

(*) There exist $(P_v)\in\prod_{v\in\Omega}X(k_v)$ and $\alpha\in Br(X)$ such that the (finite) sum

$$\sum_{v\in\Omega}\mathrm{inv}_v(\alpha(P_v))\neq 0\in\mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

is the Brauer-Manin obstruction to weak approximation [2].

Let $\mathscr{M}_k$ be the class of geometrically integral non-conical complete intersections of two quadrics in $\mathbb{P}_k^5$ containing a smooth $k$-point.

THEOREM 1. — *Let k be a number field and* V *be a variety in* $\mathscr{M}_k$. *Then for any smooth proper model* X *of* V, *the only obstruction to weak approximation on* X *is that of Brauer-Manin.*

THEOREM 2. — *Let k be a field of characteristic* 0. *Any variety* V *in* $\mathscr{M}_k$ *is k-birationally equivalent to a k-variety of one of the following types:*

(i) *projective space* $\mathbb{P}_k^3$;

(ii) *a proper and geometrically integral k-variety fibred into quadrics over* $\mathbb{P}_k^1$, *with at most two reducible geometric fibres;*

(iii) *an algebraic k-torus.*

---

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0764-4442/92/03140127 $ 2.00 

Theorem 2 implies Theorem 1: this is obvious in case (i), and it follows from [9] in case (ii), and from [8] in case (iii).

We also answer a question left open in [4] (§ 16, Problem 4): if V is a variety in $\mathcal{M}_k$ such that the pencil of quadrics passing through V contains 3 quadrics of rank 4 globally defined over $k$, but none of them defined individually over $k$, then any smooth proper model of V satisfies the Hasse principle and weak approximation.

---

1. INTRODUCTION ET RAPPELS. — Soient $k$ un corps et X une $k$-variété algébrique. Pour tout corps K contenant $k$, on désigne par $X(K)=\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}(K), X)$ l'ensemble des points K-rationnels, ou K-points, de X. Par définition, le groupe de Brauer-Grothendieck $\mathrm{Br}(X)=H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ est le second groupe de cohomologie étale de X à valeurs dans le faisceau défini par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m=\mathbb{G}_{m,k}$. Pour tout $\alpha\in\mathrm{Br}(X)$ et tout $P\in X(K)$, on note par $\alpha(P)\in\mathrm{Br}(K)$ l'évaluation de $\alpha$ en P. Une $k$-variété géométriquement intègre X est dite $k$-rationnelle si elle est $k$-birationnelle à un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$, et elle est dite rationnelle s'il en est ainsi après extension finie du corps $k$.

Si $k$ est un corps de nombres, et $v$ une place de $k$, on note $k_v$ le complété de $k$ en $v$. On désigne par $\Omega$ l'ensemble des places de $k$. Soit X une $k$-variété algébrique lisse possédant un $k$-point. Pour toute place $v$ de $k$, la topologie de $k_v$ induit une topologie sur $X(k_v)$. On dispose de l'application diagonale $X(k)\to\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ de $X(k)$ dans le produit topologique des $X(k_v)$. On dit que l'approximation faible vaut pour X si l'image de $X(k)$ par cette application est dense ou, ce qui est équivalent, si pour tout ensemble fini S de places l'image de l'application diagonale $X(k)\to\prod_{v\in S} X(k_v)$ est dense.

Supposons X propre et lisse. La condition :

(∗) Il existe $(P_v)\in\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ et $\alpha\in\mathrm{Br}(X)$ tels que la somme (finie)

$$\sum_{v\in\Omega}\mathrm{inv}_v(\alpha(P_v))\neq 0\in\mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

où les $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(k_v)\hookrightarrow\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ désignent les invariants locaux, est une obstruction à l'approximation faible ([2]; [3], 3.7.3), appelée de Brauer-Manin, car modelée sur l'obstruction similaire au principe de Hasse définie par Manin ([6], chap. VI).

Dans cette Note, nous montrons :

THÉORÈME 1. — *Soit $k$ un corps de nombres, et soit $V\subset\mathbb{P}^5_k$ une intersection complète, géométriquement intègre, et non conique, de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_k$, possédant un $k$-point lisse. Alors, pour tout modèle projectif et lisse X de V, la seule obstruction à l'approximation faible pour X est l'obstruction de Brauer-Manin.*

*Remarques.* — (i) La conclusion peut encore s'exprimer sous la forme suivante : soit $(P_v)\in\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$. Si pour tout élément $\alpha\in\mathrm{Br}(X)$ la somme (finie) $\sum_{v\in\Omega}\mathrm{inv}_v(\alpha(P_v))\in\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est nulle, alors $(P_v)$ est dans l'adhérence de $X(k)$ par l'application diagonale.

(ii) Pour les variétés considérées ci-dessus, les conditions à examiner sont en nombre fini. En effet, d'une part, pour $\alpha\in\mathrm{Br}(X)$, il existe un ensemble fini $S_\alpha\subset\Omega$ tel que $\alpha(P_v)=0$ pour tout $P_v\in X(k_v)$ et $v\notin S_\alpha$, d'autre part l'obstruction ne dépend que de la classe de $\alpha$ dans $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$, groupe fini, car X est une variété rationnelle ([4], 3.3).

(iii) Le théorème 1 vaut en fait pour $V \subset \mathbb{P}_k^n$ et tout $n \geqq 4$. Pour $n=4$, cela vient d'être établi dans [7], et pour $n \geqq 6$, l'approximation faible vaut toujours ([4], 3.11). Pour $n=4$, resp. 5, il y a des contre-exemples à l'approximation faible ([2], resp. [1], § 7), si bien que l'énoncé est alors le meilleur possible.

Le théorème 1 est une conséquence de théorèmes arithmétiques déjà connus et du théorème purement algébrique suivant.

THÉORÈME 2. — *Soient $k$ un corps,* car. $(k)=0$, *et* $V \subset \mathbb{P}_k^5$ *une intersection complète, géométriquement intègre, et non conique, de deux quadriques dans l'espace projectif* $\mathbb{P}_k^5$, *possédant un $k$-point lisse. Alors* V *est $k$-birationnelle à une $k$-variété de l'un des types suivants :*

(i) *l'espace projectif* $\mathbb{P}_k^3$;

(ii) *une variété propre et géométriquement intègre, fibrée en quadriques au-dessus de* $\mathbb{P}_k^1$, *avec au plus deux fibres géométriques réductibles;*

(iii) *un $k$-tore algébrique.*

*Déduction du théorème* 1 *à partir du théorème* 2. — Soient donc $k$, V comme au théorème 1. Comme V possède un $k$-point lisse, tout modèle projectif et lisse X de V possède un $k$-point (Lang-Nishimura ([5]; [1] 3.1.1). Par ailleurs, la conclusion du théorème ne dépend pas du modèle projectif et lisse X choisi (ceci résulte de la continuité des applications $X(k_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ définies par $M \mapsto \mathrm{inv}_v(\alpha(M))$ pour $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$).

Toute variété lisse $k$-rationnelle satisfait l'approximation faible de façon évidente. Si X est un modèle projectif et lisse d'un fibré en quadriques $Z/\mathbb{P}_k^1$ avec au plus une fibre géométrique réductible, et $X(k) \neq \varnothing$, alors X satisfait l'approximation faible ([4], 3.10; *voir* aussi 3.11 (ii)). Si le fibré possède au plus deux fibres géométriques réductibles, l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule, comme il a été établi par l'un d'entre nous ([9], Cor. 4.1) par application de la méthode de la descente ([3]). Enfin, si X est une $k$-compactification lisse d'un $k$-tore algébrique, l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible sur X est la seule (Sansuc, [8], Cor. 8.13). ■

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — Soient $k$ un corps, car. $(k)=0$, $\bar{k}$ une clôture algébrique de $k$, et soit $V \subset \mathbb{P}_k^5$ comme au théorème 2, contenant un $k$-point lisse. D'après le lemme de Lang-Nishimura, tout modèle birationnel X de V propre sur $k$ possède un $k$-point. La variété V est définie par l'annulation de deux formes quadratiques $Q_1$ et $Q_2$ à coefficients dans $k$. Soit $P(\lambda, \mu)=\mathrm{dét}(\lambda Q_1+\mu Q_2)$ le polynôme homogène de degré 6 qui est le déterminant de la matrice symétrique associée à la forme $\lambda Q_1+\mu Q_2$. Si le polynôme $P(\lambda, \mu)$ est identiquement nul, ou si V possède un $k$-point singulier, alors V est $k$-rationnelle ([4], 3.1). Nous exclurons ces deux cas dans la suite.

Notons $D=\mathbb{P}_k^1$ la droite projective de coordonnées homogènes $(\lambda, \mu)$. S'il existe une forme de rang au plus 3 dans le pinceau $\lambda Q_1+\mu Q_2$ $((\lambda, \mu) \in D(\bar{k}))$, on est dans la situation du théorème 3.20 de [4], cas (iv) et (v). Dans le cas (iv), on peut choisir X produit d'espaces projectifs et de quadriques lisses, donc $k$-rationnelle puisque $X(k) \neq \varnothing$. Dans le cas (v), une analyse un peu plus raffinée que celle de *loc. cit.* montre qu'on peut choisir X produit de $\mathbb{P}_k^1$ et de la restriction des scalaires à la Weil $R_{K/k}(C)$ d'une K-conique lisse C, pour une extension quadratique K de $k$. De $X(k) \neq \varnothing$ on déduit $C(K) \neq \varnothing$, et X est alors $k$-rationnelle.

On supposera donc toute forme dans le pinceau $\lambda Q_1+\mu Q_2$ $((\lambda, \mu) \in D(\bar{k}))$ de rang au moins 4. On sait ([4], 1.15) que la multiplicité $m$ d'un zéro $(\lambda_0, \mu_0) \in D(\bar{k})$ de $P(\lambda, \mu)$ et le rang $r$ de la forme associée $\lambda_0 Q_1+\mu_0 Q_2$ satisfont $m \geqq 6-r$. Il y a donc $s \leqq 3$ formes de rang $r=4$ dans le pinceau $\lambda Q_1+\mu Q_2$. D'après [4], 3.2, la variété V est $k$-birationnelle à une $k$-variété Z fibrée en quadriques de dimension 2 au-dessus de la droite projective $\mathbb{P}_k^1$, et les paramètres des fibres géométriques singulières de la fibration $Z/\mathbb{P}_k^1$ sont donnés par les zéros de $P(\lambda, \mu)$. Le rang de la forme quadratique qui définit la quadrique fibre en un point $(\lambda_0, \mu_0)$ de $\mathbb{P}_k^1(\bar{k})$, est le rang de la forme $\lambda_0 Q_1+\mu_0 Q_2$, diminué de 2 ([4] (3.4)). Ainsi les fibres géométriques réductibles sont exactement données par les points $(\lambda_0, \mu_0)$ tels que le rang de $\lambda_0 Q_1+\mu_0 Q_2$ soit égal à 4, et le nombre de ces fibres est $s \leqq 3$.

Pour établir le théorème 2, il reste donc à étudier le cas où $s=3$, qui est une conséquence du théorème 3 ci-après. En effet, l'hypothèse $V_{\text{lisse}}(k) \neq \varnothing$ entraîne que l'espace homogène principal S sous le $k$-tore T (théorème 3) possède un $k$-point, *i.e.* est $k$-isomorphe au $k$-tore T lui-même, comme il résulte soit de l'analyse de la première obstruction à l'existence d'un $k$-point ([3], 2.2.11), soit de la $k$-unirationalité de V ([4], 2.3).

Théorème 3. — *Soit $k$ un corps,* car. $(k)=0$, *et soit* $V \subset \mathbb{P}_k^5$ *une intersection complète géométriquement intègre et non conique de deux quadriques définies sur $k$. Soient* $D \simeq \mathbb{P}_k^1$ *le pinceau des quadriques contenant* V, *et* $P(\lambda, \mu)=\text{dét}(\lambda Q_1+\mu Q_2)$ *comme ci-dessus. S'il existe* 3 *points de* $D(\bar{k})$ *correspondant à une quadrique définie par une forme quadratique de rang* 4, *alors soit* $P(\lambda, \mu)$ *est identiquement nul, et* V *est $k$-birationnelle à une quadrique, soit* V *contient un ouvert qui est un espace homogène principal* S *sous un $k$-tore* T.

*Démonstration.* — Si $P(\lambda, \mu)$ est identiquement nul, alors V possède un $k$-point singulier ([4], 1.14), et donc V est $k$-birationnelle à une quadrique ([4], 2.1).

Supposons désormais $P(\lambda, \mu)$ non identiquement nul. Les rappels faits ci-dessus montrent qu'alors $P(\lambda, \mu)=c(R(\lambda, \mu))^2$ avec $c \in k^*$ et $R(\lambda, \mu)$ polynôme séparable de degré 3 à coefficients dans $k$, dont les trois racines dans $\bar{k}$ correspondent exactement aux formes quadratiques singulières dans le pinceau $\lambda Q_1+\mu Q_2$, toutes de rang 4. En particulier l'ensemble des 3 points donnés $\{M_i\}_{i=1,2,3} \in D(\bar{k})$ est globalement stable sous l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Les formes quadratiques $\Phi_i (i=1, 2, 3)$ à coefficients dans $\bar{k}$ correspondant aux points $\{M_i\}_{i=1,2,3}$ sont chacune définies à un facteur près; on les choisira telles que $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ les permute (non nécessairement transitivement) comme il permute les points $\{M_i\}_{i=1,2,3}$. La variété $\bar{V}=V \times_k \bar{k}$ est définie par l'annulation de deux quelconques des formes $\Phi_i$, et chacune de ces trois formes est une combinaison linéaire, à coefficients non nuls, des deux autres.

Soit E l'espace vectoriel de dimension 6 sur $\bar{k}$ tel que $\mathbb{P}_k^5(\bar{k})=\mathbb{P}(E)$. Soit $L_i \subset E (i=1, 2, 3)$ le sous-espace vectoriel de dimension 2 noyau de la forme quadratique $\Phi_i$. Puisque V n'est pas un cône, $L_i \cap L_j=0$ pour $i \neq j$ ([4], 1.12). La restriction à $L_i$ d'une forme quadratique s'annulant sur V et non proportionnelle à $\Phi_i$ est une forme quadratique binaire $\varphi_i$ bien définie à multiplication par un scalaire près. On choisira les formes $\varphi_i$ telles que $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ les permute comme il permute les points $\{M_i\}$.

Après une transformation linéaire inversible de $(\lambda, \mu)$ sur $\bar{k}$, nous pouvons écrire $P(\lambda, \mu)=\text{dét}(\lambda \Phi_1+\mu \Phi_2)$. Un calcul direct montre que si la forme $\varphi_1$ est identiquement nulle, resp. est de rang 1, alors $P(\lambda, \mu)$ est divisible par $\mu^4$, resp. par $\mu^3$, ce qui est exclu. Ainsi la forme $\varphi_1$ est-elle de rang deux, et de même les formes $\varphi_2$ et $\varphi_3$.

Montrons que E est somme directe des trois espaces $L_i$. Soit $B_i$ la forme bilinéaire associée à la forme quadratique $\Phi_i$. Soient $\alpha\varphi_1$, resp. $\beta\varphi_2$, avec $\alpha, \beta \in \bar{k}^*$, les restrictions de $\Phi_3$ à $L_1$, resp. $L_2$. On a vu plus haut qu'on avait $L_1 \cap L_2=0$. Pour $v=(v_1, v_2) \in L_1 \oplus L_2$, on a $B_3(v_1, v_2)=0$, puisque $B_3$ est combinaison linéaire de $B_1$ et

$B_2$. On a donc :

$$\Phi_3(v)=\alpha\varphi_1(v_1)+\beta\varphi_2(v_2),$$

et la restriction de $\Phi_3$ à $L_1 \oplus L_2$, qui est la somme orthogonale de deux formes quadratiques binaires non dégénérées, est non dégénérée. Il en résulte $L_3 \cap (L_1 \oplus L_2)=0$, ce qui établit $E=L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$. Soit $F \subset V$ le fermé défini par les égalités :

$$\varphi_1(v_1)=\varphi_2(v_2)=\varphi_3(v_3)=0.$$

Ce fermé est clairement défini sur $k$. Après changement de variables sur $\bar{k}$, son complémentaire U dans V admet sur $\bar{k}$ les équations homogènes suivantes :

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 = x_5 x_6 \neq 0.$$

Ainsi $\bar{U}$ est $\bar{k}$-isomorphe à un produit de groupes multiplicatifs $\mathbb{G}_m$.

Pour établir le théorème, il reste à rappeler le lemme suivant :

LEMME. — *Soient $k$ un corps parfait et $\bar{k}$ une clôture algébrique de $k$. Soit* U *une $k$-variété algébrique telle que $\bar{U}=U \times_k \bar{k}$ soit $\bar{k}$-isomorphe à un $\bar{k}$-tore. Alors il existe un $k$-tore* T *tel que* U *soit $k$-isomorphe à un espace homogène principal sous* T.

*Démonstration.* — Si $\bar{k}[U]^*$ désigne le groupe multiplicatif des fonctions inversibles sur la variété affine $\bar{U}$, le $k$-tore T est le $k$-tore dont le module des caractères est le module galoisien $\hat{T}=\bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$. Soit $\mathfrak{g}=\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Manin ([6], 30.3.5) explique comment construire un $k$-morphisme de U vers un espace homogène principal S sous T dont la classe dans $H^1(k, T)=\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(\hat{T}, \bar{k}^*)$ est la classe de l'extension :

$$1 \to \bar{k}^* \to \bar{k}[U]^* \to \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \to 1.$$

Comme chez Manin ([6], 30.3.1), qui s'intéresse à un ouvert particulier d'une surface de Del Pezzo — mais la démonstration est identique — on vérifie que le $k$-morphisme de U vers S devient un isomorphisme sur $\bar{k}$, donc est un isomorphisme sur $k$. ■

*Remarques.* — 1. Le théorème 3 éclaire les calculs explicites de [4], p. 139/140.

2. Soient $Q(x, y, z)$ et $R(x, y, z)$ deux formes quadratiques de rang 3 à coefficients dans $k$, et $c \in k^*$. Supposons $\det(\lambda Q+\mu R)$ non nul, séparable. L'intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_k$ définie par le système d'équations :

$$Q_1=Q(x_0, x_1, x_2)+cQ(x_3, x_4, x_5)=0.$$
$$Q_2=R(x_0, x_1, x_2)+cR(x_3, x_4, x_5)=0,$$

est alors du type étudié au théorème 3, avec $P(\lambda, \mu)=c^3(\det(\lambda Q+\mu R))^2$.

3. UN COMPLÉMENT. — Nous résolvons ici le problème du cas $(F_5)$ ([4], (§ 16, Problem 4) :

THÉORÈME 4. — *Soit* $V \subset \mathbb{P}^5_k$ *comme au théorème* 3. *Supposons que les* 3 *points de* $D(\bar{k})$ *qui correspondent à une quadrique définie par une forme quadratique de rang* 4 *forment une seule orbite sous* $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. *Alors pour tout modèle projectif et lisse* X *de* V, *le groupe* Br X/Br $k$ *est nul.*

*Démonstration.* — Rappelons que le groupe Br X/Br $k$ est un sous-groupe de $H^1(k, \mathrm{Pic}\,\bar{X})$, où $\bar{X}=X \times_k \bar{k}$. Nous allons montrer que $H^1(k, \mathrm{Pic}\,\bar{X})=0$. Pour cela, quitte à remplacer $k$ par le corps des fonctions rationnelles $k(X)$ de X, on peut supposer $X(k) \neq \varnothing$ ([3], Thm. 2.B.1). On a alors $V(k) \neq \varnothing$. Si V possède un $k$-point singulier, alors V est $k$-birationnelle à une quadrique et le résultat est clair. Supposons donc $V_{\text{lisse}}(k) \neq \varnothing$. On peut alors, comme plus haut, transformer V en une fibration en quadriques $Z/\mathbb{P}^1_k$. Il y a ici exactement 3 points $M_i$ $(i=1, 2, 3)$ dans $\mathbb{P}^1_k(\bar{k})$ au-dessus desquels les fibres (géométriques) sont singulières, et celles-ci sont réductibles : elles sont définies par des quadriques de $\mathbb{P}^3$ données par une forme quadratique de rang 2. Le fibré en quadriques $Z/\mathbb{P}^1_k$ est « admissible » au sens de [9], p. 58. Comme toutes les fibres dégénérées sont « essentiellement singulières », ce fibré en quadriques est, avec les notations de [9], p. 63, de type II ou III (ce qui reflète le fait que le déterminant $P(\lambda, \mu)$ a toutes ses racines doubles). Il y a exactement un point fermé, soit M, de $\mathbb{P}^1_k$, correspondant à une fibre dégénérée (cette hypothèse n'est pas affectée par le passage de $k$ au corps des fonctions $k(X)$, car $k$ est algébriquement clos dans $k(X)$). Si Z est de type III, ceci suffit à conclure $H^1(k, \operatorname{Pic}\bar{X})=0$ ([9], Cor. 3.2).

Supposons Z de type II. Soit K le corps résiduel de M, et soient F et L les extensions quadratiques de K associées à la situation ([9], p. 59/60). Si F et L diffèrent, on a encore $H^1(k, \operatorname{Pic}\bar{X})=0$ ([9], Cor. 3.2). Supposons que F et L coïncident. Au voisinage de M, on peut définir la fibration par l'annulation d'une forme quadratique $x^2-ay^2+\pi(z^2-bt^2)$, avec $a$ et $b$ unités en M, et $\pi$ uniformisante en M. Ainsi le déterminant de cette forme est, à un carré près, égal à $ab \in k(t)$, dont la classe $\widetilde{ab}$ dans $K^*/K^{*2}$ doit être triviale ($F=K(\sqrt{\tilde{a}})$ et $L=K(\sqrt{\tilde{b}})$). Par ailleurs, par définition du type II, le dit déterminant doit être égal à la classe d'une constante $c \in k^*$ non triviale dans $k(t)^*/k(t)^{*2}$. Mais si la classe de $c$ dans $k^*/k^{*2}$ devient triviale dans $K^*/K^{*2}$, comme $K/k$ est une extension de degré 3, elle est déjà triviale dans $k^*/k^{*2}$, et Z est de type III, ce qui était exclu. ■

COROLLAIRE. — *Soient $k$ un corps de nombres, et* V *et* X *comme au théorème* 3. *Alors l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour* X *est la seule obstruction. Dans la situation du théorème* 4, i.e. *dans le cas* ($F_5$), *le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour* X.

*Démonstration.* — Ceci résulte immédiatement des théorèmes 3 et 4 et des résultats de Sansuc sur l'arithmétique des espaces homogènes principaux de groupes algébriques linéaires ([8], Cor. 8.7 et 8.13; pour le deuxième énoncé on peut simplement utiliser la suite exacte de Voskresenskiĭ pour les tores ([10], 6.38)). ■

A. N. Skorobogatov remercie l'Université de Paris-VII pour son hospitalité.

Note remise et acceptée le 17 octobre 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. CORAY et J.-J. SANSUC, *J. reine angew. Math.*, 320, 1980, p. 150-191.

[2] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, et J.-J. SANSUC, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 284, série A, 1977, p. 1215-1218.

[3] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, et J.-J. SANSUC, *Duke Math. J.*, 54, 1987, p. 375-492.

[4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC et Sir Peter SWINNERTON-DYER, *J. reine ang. Math.*, I, 373, 1987, p. 37-107; II, 374, 1987, p. 72-168.

[5] S. LANG, *Amer. J. Math.*, 76, 1954, p. 362-374.

[6] Yu. I. MANIN, *Cubic Forms*, Second edition, North-Holland, 1986.

[7] P. SALBERGER et A. N. SKOROBOGATOV, *Duke Math. J.*, 63, 1991, p. 517-536.

[8] J.-J. SANSUC, *J. reine angew. Math.*, 327, 1981, p. 12-80.

[9] A. N. SKOROBOGATOV, *J. reine angew. Math.*, 407, 1990, p. 57-74.

[10] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Tores algébriques* (en russe), Nauka, Moscou, 1977.

J.-L. C.-T. : *C.N.R.S., Mathématiques*, Bât. n° 425, *Université de Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex*;

A. N. S. : *Institute for Problems of Information Transmission*, 19 *Ermolovoy ul.*, 101447 *Moscow*, *U.S.S.R.*