C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I, p. 857-862, 1989

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Un théorème de pureté locale

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE, Raman PARIMALA et Ramaiyengar SRIDHARAN

Résumé — En utilisant la K-théorie des schémas de Severi-Brauer on établit un théorème de pureté locale pour les espaces principaux homogènes au-dessus d'une base lisse, de groupe structural le groupe spécial linéaire d'une algèbre simple centrale d'indice premier.

A local purity theorem

Abstract — *Let* SL(D) *be the special linear group on a central simple algebra* D *over* k, *of prime index. We prove that a principal homogeneous space under* SL(D) *over an open set of a smooth variety* X *which may be extended locally in the neighbourhood of points of codimension* 1 *may also be extended locally in the neighbourhood of any point of* X. *The proof uses Quillen's computation of the* K-*theory of Severi-Brauer schemes.*

Abridged English Version — Let X be an integral algebraic variety over a field k and let $k(X)$ be its function field. Let D be a central simple algebra over k. For any commutative k-algebra A, we set $D_A = D \otimes_k A$ and let Nrd: $D_A^* \to A^*$ be the reduced norm. We define the following subgroups of $k(X)^*$:

$$N_D^1(X) = \{f \in k(X)^* \mid \forall P \in X^{(1)},\ \exists u_P \in O_{X,P}^*,\ \exists g_P \in \mathrm{Nrd}(D_{k(X)})^*,\ f = u_P . g_P\};$$

$$N_D(X) = \{f \in k(X)^* \mid \forall P \in X,\ \exists u_P \in O_{X,P}^*,\ \exists g_P \in \mathrm{Nrd}(D_{k(X)})^*,\ f = u_P . g_P\}$$

[here $X^{(1)}$ denotes the set of points of codimension 1 on X].

THEOREM 1. — *Let* X *be a smooth integral variety over a field* k *and let* D *be a central simple algebra of square-free index over* k. *Then* $N_D^1(X) = N_D(X)$.

COROLLARY. — *With* D *as above, the group* $N_D^1(X)$ *is a* k-*birational invariant of smooth proper integral* k-*varieties* X.

The proof of Theorem 1 is achieved through a reduction to the following:

THEOREM 2. — *Let* Z *be the Severi-Brauer variety associated to a central simple algebra of prime index* p *over a field* k. *Let* R *be a local ring of a smooth integral* k-*variety and* $Z_R = Z \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, R$. *Then* $CH^p(Z_R) = 0$.

We first explain how this reduction is achieved. We may replace X by the spectrum of the local ring R at a point P of X. We shall write X = Spec R. Let $d = \dim X = p - 1$. In diagram ($*$) below, $\pi : Z_R \to \mathrm{Spec}\, R$ is the proper map given by projection. We have:

$$\pi_*(\oplus_{P \in Z_R^{(d)}} k(P)^*) = \pi_*(\oplus_{P \in Z_{k(X)}^{(d)}} k(P)^*)$$

and this group is known to be the image of the reduced norm $D_{k(X)}^* \to k(X)^*$. If $f \in k(X)^*$ belongs to $N_D^1(X)$, then div(f) lies in $\pi_*(\oplus_{P \in Z_R^{(d)}} k(P)^*)$. By Theorem 2, $CH^p(Z_R) = 0$, and the commutativity of diagram ($*$) yields that $N_D^1(X) = N_D(X)$.

The main ingredients which go into the proof of Theorem 2 are Quillen's computation [9] of the group K_0 of Brauer-Severi schemes and the precise relationship between the filtration by codimension of support on K_0 and the Chow groups, provided by the Riemann-Roch theorem without denominators due to Jouanolou.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

1. NOTATIONS ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME. — Étant donnée une variété algébrique intègre X définie sur un corps k, on note $k(\mathrm{X})$ son corps des fonctions et $\mathrm{X}^{(i)}$, pour i entier, l'ensemble des points de codimension i du schéma X. Pour toute k-algèbre commutative A, on note X_{A} le produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, \mathrm{A}$. On note R^* le groupe multiplicatif des unités d'un anneau unitaire R. Si D est une algèbre simple centrale sur k, pour toute k-algèbre commutative A, on note $\mathrm{D}_{\mathrm{A}} = \mathrm{D} \otimes_k \mathrm{A}$ et $\mathrm{Nrd} : \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^* \to \mathrm{A}^*$ la norme réduite. On appelle indice de D l'entier dont le carré est la dimension de D sur k.

Introduisons deux sous-groupes du groupe multiplicatif $k(\mathrm{X})^*$:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{D}}^1(\mathrm{X}) = \{ f \in k(\mathrm{X})^* \mid \forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{X}^{(1)},\ \exists\, u_{\mathrm{P}} \in \mathrm{O}_{\mathrm{X},\mathrm{P}}^*,\ \exists\, g_{\mathrm{P}} \in \mathrm{Nrd}(\mathrm{D}_{k(\mathrm{X})})^*,\ f = u_{\mathrm{P}} \cdot g_{\mathrm{P}} \};$$

$$\mathrm{N}_{\mathrm{D}}(\mathrm{X}) = \{ f \in k(\mathrm{X})^* \mid \forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{X},\ \exists\, u_{\mathrm{P}} \in \mathrm{O}_{\mathrm{X},\mathrm{P}}^*,\ \exists\, g_{\mathrm{P}} \in \mathrm{Nrd}(\mathrm{D}_{k(\mathrm{X})})^*,\ f = u_{\mathrm{P}} \cdot g_{\mathrm{P}} \}.$$

THÉORÈME 1. — *Si* X *est une variété intègre lisse sur le corps k et si* D *est une k-algèbre centrale simple d'indice premier, le groupe* $\mathrm{N}_{\mathrm{D}}^1(\mathrm{X})$ *coïncide avec son sous-groupe* $\mathrm{N}_{\mathrm{D}}(\mathrm{X})$.

On en déduit immédiatement le :

COROLLAIRE 1. — *Si* D *est une k-algèbre centrale simple d'indice premier, le groupe* $\mathrm{N}_{\mathrm{D}}^1(\mathrm{X})$ *est un invariant k-birationnel des variétés intègres* X *propres et lisses sur k.* ■

Remarque. — La démonstration donnée ci-dessous permet d'établir un énoncé légèrement plus fort que celui du théorème 1 : on peut imposer aux fonctions de s'écrire semi-localement comme produit d'une unité par une fonction rationnelle représentée par la norme réduite, et on peut prendre pour D une algèbre dont l'indice est sans facteur carré, algèbre qui est alors isomorphe à un produit tensoriel d'algèbres d'indice premier. On commence par établir la version semi-locale du théorème dans le cas où D est d'indice premier, et un argument de transfert donne le cas général.

2. UNE RÉDUCTION GÉNÉRALE. — Soit Z une k-variété. Si P est un point fermé de Z et $k(\mathrm{P})$ son corps résiduel, on note $\mathrm{N}(k(\mathrm{P})^*)$ l'image de la norme $\mathrm{N} : k(\mathrm{P})^* \to k^*$. Soit $\mathrm{N}_{\mathrm{Z}}(k)$ le sous-groupe de k^* engendré par les sous-groupes $\mathrm{N}(k(\mathrm{P})^*)$, pour P parcourant tous les points fermés de Z. Pour toute extension L/k de corps, posons $\mathrm{N}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{L}) = \mathrm{N}_{\mathrm{Z}_{\mathrm{L}}}(\mathrm{L})$. Pour toute k-variété intègre X, définissons les groupes :

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Z}}^1(\mathrm{X}) = \{ f \in k(\mathrm{X})^* \mid \forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{X}^{(1)},\ \exists\, u_{\mathrm{P}} \in \mathrm{O}_{\mathrm{X},\mathrm{P}}^*,\ \exists\, g_{\mathrm{P}} \in \mathrm{N}_{\mathrm{Z}}(k(\mathrm{X})),\ f = u_{\mathrm{P}} \cdot g_{\mathrm{P}} \} \subset k(\mathrm{X})^*$$

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{X}) = \{ f \in k(\mathrm{X})^* \mid \forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{X},\ \exists\, u_{\mathrm{P}} \in \mathrm{O}_{\mathrm{X},\mathrm{P}}^*,\ \exists\, g_{\mathrm{P}} \in \mathrm{N}_{\mathrm{Z}}(k(\mathrm{X})),\ f = u_{\mathrm{P}} \cdot g_{\mathrm{P}} \} \subset \mathrm{N}_{\mathrm{Z}}^1(\mathrm{X}).$$

Ces définitions généralisent celles du premier paragraphe :

LEMME 1. — *Si* Z *est la variété de Severi-Brauer associée à une k-algèbre simple centrale* D, *les sous-groupes* $\mathrm{N}_{\mathrm{Z}}(k)$ *et* $\mathrm{Nrd}(\mathrm{D}^*)$ *de* k^* *coïncident.* ■

PROPOSITION 1 (M. Rost). — *Soit* X *une k-variété lisse intègre, et soit* Z *une k-variété propre intègre de dimension d. Si pour tout anneau local* R *du schéma* X, *le groupe de Chow* $\mathrm{CH}^{d+1}(\mathrm{Z}_{\mathrm{R}})$ *est nul, alors les groupes* $\mathrm{N}_{\mathrm{Z}}^1(\mathrm{X})$ *et* $\mathrm{N}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{X})$ *coïncident.*

Démonstration. — La question étant locale sur X, on peut remplacer X par le spectre de l'anneau local R de X en un point P et écrire X = Spec R. Le diagramme suivant commute ([5], prop. 1.4) :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{\mathrm{P} \in \mathrm{Z}_{\mathrm{R}}^{(d)}} k(\mathrm{P})^* & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \bigoplus_{\mathrm{P} \in \mathrm{Z}_{\mathrm{R}}^{(d+1)}} \mathbf{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ k(\mathrm{X})^* & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \bigoplus_{\mathrm{P} \in \mathrm{X}^{(1)}} \mathbf{Z} \end{array}$$

où $\pi: Z_R \to \operatorname{Spec} R$ désigne l'application propre donnée par la projection, et où les flèches horizontales associent à une fonction son diviseur (au sens de la théorie des cycles). On a : $\pi_*(\oplus_{P \in Z_R^{(d)}} k(P)^*) = \pi_*(\oplus_{P \in Z_{k(X)}^{(d)}} k(P)^*) = N_Z(k(X))$.

Si $f \in k(X)^*$ appartient à $N_Z^1(X)$, alors son diviseur $\operatorname{div}(f)$ est dans $\pi_*(\oplus_{P \in Z_R^{(d+1)}} \mathbf{Z})$. Sous l'hypothèse $CH^{d+1}(Z_R)=0$, la flèche horizontale supérieure est surjective, et le diagramme donne alors $N_Z^1(X)=N_Z(X)$. ■

3. Démonstration du théorème 1. — D'après le lemme 1 et la proposition 1, le théorème 1 résulte du :

Théorème 2. — *Soit* Z *la variété de Severi-Brauer associée à une algèbre simple centrale d'indice premier p sur un corps k. Soit* R *un anneau local d'une k-variété intègre et lisse* X. *Alors* $CH^p(Z_R)=0$.

Démonstration. — Soit M le point (schématique) de X dont R est l'anneau local. Si $D_{k(X)}$ est déployée, alors on a un $k(X)$-isomorphisme $Z_{k(X)} \simeq \mathbb{P}_{k(X)}^{p-1}$ et R étant un anneau local régulier, il y a un R-isomorphisme $Z_R \simeq \mathbb{P}_R^{p-1}$ ([6], I. 8. 4 et II. 1. 8). Par passage à la limite sur les voisinages ouverts de M, le calcul du groupe de Chow d'un fibré projectif ([5], Theorem 3. 3) donne $CH^p(\mathbb{P}_R^{p-1}) \simeq \oplus_{i=1}^p CH^i(\operatorname{Spec} R)$. Le théorème dans ce cas résulte de la nullité de chacun des groupes $CH^i(\operatorname{Spec} R)$ pour $i \geqq 1$, nullité qu'on peut établir en recourant au lemme de déplacement de Chow [10] appliqué aux voisinages ouverts affines (lisses) du point M dans X, ou encore, comme le remarque H. Esnault, en utilisant l'exactitude de la résolution de Gersten de $K_i R$ et la formule de Bloch-Quillen $H^p(X, \mathscr{K}_p) \simeq CH^p(X)$ ([9], 5.11 et 5.14). Nous supposons dans la suite que $D_{k(X)}$ est non déployée, et est donc une algèbre à division.

Soit Y une k-variété intègre, quasi projective et lisse, et soit $K_0(Y)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents localement libres sur Y, groupe qui coïncide avec celui défini à partir de tous les faisceaux cohérents sur Y. Soit alors, pour i entier, $F^i K_0(Y)$ le sous-groupe engendré par les faisceaux à support de codimension au moins i, et soit $\operatorname{Gr}^i K_0(Y) = F^i K_0(Y)/F^{i+1} K_0(Y)$. Il y a une surjection naturelle $CH^i(Y) \to \operatorname{Gr}^i K_0(Y)$ dont le noyau est annulé par $(i-1)!$ (Grothendieck/Jouanolou, [1], XIV, [5], 15.3.6). Par des passages à la limite faciles (*cf.* [1], IV 3.2.1), ceci vaut encore pour tout schéma $Y_R = Y \times_k \operatorname{Spec} R$, où Y est comme ci-dessus et R est un anneau local d'une k-variété lisse.

(*a*) Montrons que, pour $i \leqq p$, les surjections $CH^i(Z) \to \operatorname{Gr}^i K_0(Z)$ et $CH^i(Z_R) \to \operatorname{Gr}^i K_0(Z_R)$ sont en fait des isomorphismes. Soit L/k une extension de degré p de k qui déploie D. Alors $Z_L \simeq \mathbb{P}_L^{p-1}$ et $Z_{R_L} \simeq \mathbb{P}_{R_L}^{p-1}$. Le calcul du groupe de Chow d'un fibré projectif et le lemme de déplacement de Chow, appliqué aux ouverts $U_L \subset X_L$ pour U parcourant les voisinages ouverts affines (lisses) du point M dans X, montrent que les groupes $CH^i(Z_L)$ et $CH^i(Z_{R_L})$ sont sans torsion. Si $\gamma \in CH^i(Z)$ (resp. $CH^i(Z_R)$) est dans le noyau de l'application $CH^i(Z) \to \operatorname{Gr}^i K_0(Z)$ (resp. $CH^i(Z_R) \to \operatorname{Gr}^i K_0(Z_R)$), alors $(i-1)!\gamma=0$. L'image de γ dans $CH^i(Z_L)$ (resp. $CH^i(Z_{R_L})$) est donc nulle. Mais le noyau de l'application image réciproque $CH^i(Z) \to CH^i(Z_L)$ (resp. $CH^i(Z_R) \to CH^i(Z_{R_L})$) est de p-torsion (argument de transfert). Ainsi, $p\gamma=0$. Comme $(i-1)!$ est premier à p, on conclut $\gamma=0$.

(*b*) Montrons que l'image réciproque $\pi^*: K_0(Z) \to K_0(Z_R)$ par le morphisme $\pi: Z_R \to Z$ *est un isomorphisme*. Le calcul par Quillen du groupe K_0 d'un schéma de Severi-Brauer

([9], § 8) donne un diagramme d'isomorphismes horizontaux, compatibles via π^* :

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(Z) & \xrightarrow{\simeq} & K_0(k) & \oplus\; K_0(D) & \oplus \ldots & \oplus K_0(D^{\otimes p-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle\pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle\pi^*} & \downarrow{\scriptstyle\pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle\pi^*} \\ K_0(Z_R) & \xrightarrow{\simeq} & K_0(R) & \oplus\; K_0(D_R) & \oplus \ldots & \oplus K_0(D_R^{\otimes p-1}). \end{array}$$

La première application $\pi^*: K_0(k) \to K_0(R)$ est l'identité $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$. Montrons que pour $1 \leqq i \leqq p-1$ les applications $\pi^*: K_0(D^{\otimes i}) \to K_0(D_R^{\otimes i})$ sont des isomorphismes. Comme D est non déployée d'indice p, pour tout tel i, l'algèbre $D^{\otimes i}$ est isomorphe à une algèbre de matrices $M_{p^{i-1}}(D_i)$ sur un corps gauche D_i d'indice p sur son centre k. Comme $D_{k(X)}$ est un corps gauche par hypothèse, il en est de même de chaque $D_{i_{k(X)}}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_0(D_i) & \simeq & K_0(M_{p^{i-1}}(D_i)) \\ \downarrow{\scriptstyle\pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle\pi^*} \\ K_0(D_{i_R}) & \simeq & K_0(M_{p^{i-1}}(D_{i_R})) \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont données par la théorie de Morita : à M (resp. N) un D_i- (resp. D_{i_R}-) module à gauche, elles associent $(D_i)^{p^{i-1}} \otimes M$ (resp. $(D_{i_R})^{p^{i-1}} \otimes N$). Chaque application $\pi^*: K_0(D_i) \to K_0(D_{i_R})$ est un isomorphisme :

Lemme 2. — *Soit* D *un corps gauche d'indice p sur son centre k. Soient* R *une k-algèbre locale intègre et* K *son corps des fractions. Si* D_K *est un corps gauche, la restriction* $K_0(D) \to K_0(D \otimes_k R)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que tout D_R-module (à gauche) projectif P est libre. Puisque D_K est un corps gauche, $P \otimes_R K$ est libre sur D_K. Le rang de P sur R est donc un multiple de p^2. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R. Par la théorie de Morita, on voit que $P \otimes_R R/\mathfrak{m}$ est libre sur $D \otimes_R R/\mathfrak{m}$, et donc (Nakayama) P est libre sur D_R. ■

(*c*) Soit L/k un corps de décomposition de degré p de D. On a un diagramme commutatif ($r = r_{L/k}$) :

$$\begin{array}{ccc} CH^i(Z) & \xrightarrow{\pi^*} & CH^i(Z_R) \\ \downarrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle r^*} \\ CH^i(Z_L) & \xrightarrow{\pi^*} & CH^i(Z_{R_L}). \end{array}$$

Des isomorphismes $Z_L \simeq \mathbb{P}_L^{p-1}$ et $Z_{R_L} \simeq \mathbb{P}_{R_L}^{p-1}$ on déduit que, pour $i \leqq p-1$, l'application π^* inférieure est l'identité $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$. Merkur'ev et Suslin ont montré ([8], § 8, [11], prop. 1.1) que les applications $r^*: CH^i(Z) \to CH^i(Z_L)$ sont injectives. Ainsi les applications $\pi^*: CH^i(Z) \to CH^i(Z_R)$ $(0 \leqq i \leqq p-1)$ sont aussi injectives.

(*d*) Comme l'image réciproque $\pi^*: K_0(Z) \to K_0(Z_R)$ par le morphisme π préserve la filtration par la codimension du support ([1], Exp. 0, App., § 4), les isomorphismes établis en (*a*) donnent lieu, pour $0 \leqq i \leqq p-1$, à un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K_0(Z)^{(i+1)} & \to & K_0(Z)^{(i)} & \to & CH^i(Z) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle\pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle\pi^*} & & \\ 0 & \to & K_0(Z_R)^{(i+1)} & \to & K_0(Z_R)^{(i)} & \to & CH^i(Z_R) & \to & 0. \end{array}$$

D'après (*c*), l'application π^* de droite est injective. D'après (*b*), l'application $\pi^*: K_0(Z) \to K_0(Z_R)$ est un isomorphisme, *i. e.* $K_0(Z)^{(0)} \simeq K_0(Z_R)^{(0)}$. Par récurrence sur i, on en déduit $K_0(Z)^{(i)} \simeq K_0(Z_R)^{(i)}$ pour $0 \leqq i \leqq p$. Mais $K_0(Z)^{(p)}=0$ puisque Z est de dimension $p-1$, et donc $K_0(Z_R)^{(p)}=0$.

De l'isomorphisme $CH^p(Z_R) \simeq Gr^p K_0(Z_R)$ établi en (*a*) on déduit alors que $CH^p(Z_R)=0$. ■

4. PERSPECTIVES. — Soient X une k-variété, G un k-groupe algébrique linéaire et $G_X = G \times_{\mathrm{Spec}\, k} X$. Soit $H^1(X, G) = H^1(X_{fppf}, G_X)$ l'ensemble de cohomologie qui classifie les espaces principaux homogènes sur X sous le groupe G.

PROBLÈME. — Si X est une k-variété intègre lisse, les deux ensembles $\bigcap_{P \in X^{(1)}} [\mathrm{Im}(H^1(O_{X,P}, G) \to H^1(k(X), G)]$ et $\bigcap_{P \in X} \mathrm{Im}[(H^1(O_{X,P}, G) \to H^1(k(X), G)]$ coïncident-ils? En d'autres termes, si un espace principal homogène sous G au-dessus du point générique de X s'étend localement en codimension 1, s'étend-il partout localement?

Si tel est le cas pour les k-variétés lisses d'une dimension donnée, l'ensemble $\bigcap_{P \in X^{(1)}} [\mathrm{Im}(H^1(O_{X,P}, G) \to H^1(k(X), G)] \subset H^1(k(X), G)$ est un invariant k-birationnel de ces variétés (*cf.* [4], 6.10 et 6.16).

Pour G un k-groupe réductif et $d = \dim X \leqq 2$, ou pour G un k-groupe de type multiplicatif (*e.g.* un k-tore) et d quelconque, le problème a une réponse affirmative (on a même alors une propriété d'extension globale [4], § 6).

Soient D une k-algèbre simple centrale, et GL(D), resp. SL(D), le groupe linéaire, resp. spécial linéaire, associé à D. Pour A une k-algèbre locale, l'ensemble $H^1(A, GL(D))$ est trivial. La suite exacte de k-groupes algébriques

$$1 \to SL(D) \to GL(D) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}} \mathbb{G}_m \to 1$$

permet alors de réinterpréter le théorème 1 comme une réponse affirmative au problème pour $G = SL(D)$ lorsque l'indice de D est premier.

Le cas particulier où D est une algèbre de quaternions pourrait être généralisé dans une autre direction. Soit Φ une forme de Pfister sur un corps k (car. $(k) \neq 2$) ([7], chap. 10). On peut se demander ([2], 6.3.2) si, pour X une k-variété intègre lisse, les deux sous-groupes suivants de $k(X)^*$ coïncident :

$$N_\Phi^1(X) = \{ f \in k(X)^* \mid \forall P \in X^{(1)}, \exists u_P \in O_{X,P}^*, \exists g_P \in k(X)^*, \\ g_P \text{ représentée par } \Phi \text{ sur } k(X),\ f = u_P . g_P \};$$

$$N_\Phi(X) = \{ f \in k(X)^* \mid \forall P \in X, \exists u_P \in O_{X,P}^*, \exists g_P \in k(X)^*, \\ g_P \text{ représentée par } \Phi \text{ sur } k(X),\ f = u_P . g_P \}.$$

En utilisant [2], § 1 et [3], 3.1, on peut montrer que c'est le cas lorsque k est le corps des réels, $\Phi = \langle 1, 1 \rangle^{\otimes d}$, $d = \dim X$ et X est propre et lisse sur **R**. L'invariant birationnel obtenu se déduit du nombre de composantes connexes de l'espace $X(\mathbf{R})$ des points réels.

L'idée de la proposition 1 est due à Markus Rost, que nous remercions pour d'utiles discussions.

Ce travail a été réalisé à Bombay, lors d'un séjour du premier auteur à l'Institut Tata de Recherche fondamentale [soutien du C.N.R.S. (France) et du N.B.H.M. (Inde)].

Note remise et acceptée le 13 juin 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK et L. ILLUSIE, Théorie des intersections et théorème de *Riemann-Roch*, *Sém. de géométrie algébrique du Bois-Marie*, 1966-1967, (SGA 6); *Lecture Notes in Math.*, 225, Springer-Verlag, 1971.

[2] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques, *Bull. Soc. math. France*, 106, 1978, p. 113-151; deux compléments, *ibid.*, 108, 1980, p. 213-227.

[3] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et R. PARIMALA, *Real components of algebraic varieties and étale cohomology*, preprint, 1989.

[4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles, *Math. Ann.*, 244, 1979, p. 105-134.

[5] W. FULTON, *Intersection Theory*, Ergeb. der Math. und ihrer Grenzg., 3. Folge, Band 2, 1984, Springer-Verlag.

[6] A. GROTHENDIECK, Le groupe de Brauer, I, II, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[7] T. Y. LAM, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin/Cummings, 1980.

[8] A. S. MERKUR'EV et A. A. SUSLIN, K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism, *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Ser. Mat.*, 46, 1982 (=*Math. U.S.S.R. Izvestiya*, 21, 1983, p. 307-340).

[9] D. QUILLEN, Higher algebraic K-theory, I, in *Algebraic K-theory*, I (Proc. Conf. Seattle 1972); *Lecture Notes in Math.*, 341, Springer-Verlag, 1973, p. 85-147.

[10] J. ROBERTS, Chow's moving lemma, in *Algebraic Geometry*, Oslo 1970, F. OORT éd., Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972, p. 89-96.

[11] A. A. SUSLIN, Torsion in K_2 of fields, *K-Theory*, 1, 1987, p. 5-29.

J.-L. C.-T. : *C.N.R.S., Mathématiques*, Bât. n° 425, *Université de Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex*;

R. P. et R. S. : *School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Bombay* 400005, *Inde*.