

THÉORIE DES NOMBRES. — Intersections de deux quadriques et surfaces de Châtelet. Note de **Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Remise le 12 mars 1984.

Le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour l'ouvert de lissité de certaines intersections de deux quadriques dans l'espace projectif de dimension au moins 5 sur un corps de nombres. La théorie de la descente permet alors de compléter et de généraliser l'étude arithmético-géométrique de certaines surfaces introduites par F. Châtelet. Nous répondons ainsi affirmativement à une question de Yu. I. Manin [1].

NUMBER THEORY. — Intersections of two Quadrics and Châtelet Surfaces.

The Hasse principle and weak approximation hold for the smooth locus of certain intersections of two quadrics in n -dimensional projective space ($n \geq 5$) over a number field. Using descent theory for rational surfaces one can then complete, and extend, the arithmetico-geometric analysis of Châtelet surfaces. In particular, this answers a question of Yu. I. Manin in the affirmative.

I. NOTATIONS ET RAPPELS. — On désigne par k un corps de caractéristique zéro, par \bar{k} une clôture algébrique de k , par $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois de \bar{k} sur k . On désigne par \mathbf{P}_k^n l'espace projectif de dimension n sur k . On dit qu'une k -variété algébrique géométriquement intègre X est k -rationnelle si elle est k -birationnelle à \mathbf{P}_k^d (pour $d = \dim X$), et qu'elle est rationnelle si $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ est \bar{k} -rationnelle. On désigne par X_{lisse} l'ouvert de lissité d'une k -variété X , par $\text{Br } X = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbf{G}_m)$ son groupe de Brauer cohomologique, et, pour K/k une extension de corps, par $X(K)$ l'ensemble de ses points K -rationnels. On renvoie à [1] pour la définition de la R -équivalence sur $X(K)$.

Soit k un corps de nombres. Une k -variété X avec $X(k) \neq \emptyset$ satisfait l'approximation faible si, pour tout ensemble fini S de places v de k , l'ensemble $X(k)$ est dense dans le produit topologique $\prod_{v \in S} X(k_v)$ (où k_v désigne le complété de k en v). Une classe de

k -variétés (et, par abus, une variété) satisfait le principe de Hasse si, pour X une variété dans cette classe, la condition $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k implique $X(k) \neq \emptyset$.

II. GÉOMÉTRIE DES INTERSECTIONS DE DEUX QUADRIQUES. — Dans ce numéro et le suivant, on désigne par $V \subset \mathbf{P}_k^n$, avec $n \geq 4$, une intersection de deux quadriques vérifiant, sauf mention contraire, la condition suivante :

(*) V est pure, géométriquement intègre et non conique.

Une telle variété est rationnelle. Elle définit et est définie par le pinceau $D \cong \mathbf{P}_k^1$ des quadriques qui la contiennent. Définissons les cas exceptionnels (E) et (E') par les conditions :

(E) $n = 5$, et il existe au moins deux points de $D(\bar{k})$ correspondant à des quadriques définies par des formes quadratiques de rang au plus 4;

(E') $n = 4$ ou 5, et il existe deux points de $D(\bar{k})$, qui sont globalement invariants sous $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ et correspondent à des quadriques définies par des formes quadratiques de rang exactement 4.

PROPOSITION 1. — Soit X un modèle propre et lisse de V . On a $\text{Br } X/\text{Br } k = 0$ si :

- (i) $n \geq 5$, et V n'est pas du type (E) ;
- (ii) $n = 4$, et V est lisse et non du type (E').

On se ramène au cas $V_{\text{lisse}}(k) \neq \emptyset$ en passant de V à $V \times_k k(V)$ [où $k(V)$ est le corps des fonctions de V]. Pour $M \in V_{\text{lisse}}(k)$, on établit le résultat en utilisant le pinceau des

hyperplans contenant l'espace tangent en M , ce qui munit V (k -birationnellement) d'une structure de fibration en quadriques (de \mathbf{P}^{n-2}) sur \mathbf{P}_k^1 .

Remarque 1. — Dans chacun des contre-exemples connus au principe de Hasse ou à l'approximation faible pour V comme ci-dessus ([2] à [6]) on est dans le cas (E'), et l'obstruction passe par le groupe $\text{Br } X/\text{Br } k \neq 0$.

PROPOSITION 2. — Soit $V \subset \mathbf{P}_k^{2n}$, avec $n \geq 2$, une intersection de deux quadriques, pure, géométriquement intègre, éventuellement conique mais non singulière en codimension 2, avec $V_{\text{lisse}}(k) \neq \emptyset$. Si V contient un couple de \mathbf{P}^{n-1} conjugués par $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ et d'intersection vide, V est k -rationnelle.

La démonstration est analogue à celle qui permet d'établir qu'une k -surface cubique lisse qui possède deux droites gauches conjuguées est k -rationnelle.

III. ARITHMÉTIQUE DES INTERSECTIONS DE DEUX QUADRIQUES. — Dans ce numéro, k est un corps de nombres.

PROPOSITION 3. — Soit $V \subset \mathbf{P}_k^n$ une intersection de deux quadriques satisfaisant (*), avec $n \geq 5$ et V non du type (E). On suppose $V_{\text{lisse}}(k) \neq \emptyset$. Alors V_{lisse} satisfait l'approximation faible.

La démonstration (un peu délicate pour $n=5$) utilise la même fibration en quadriques qu'à la proposition 1.

THÉORÈME 1. — Soit $V \subset \mathbf{P}_k^n$ une intersection de deux quadriques satisfaisant (*), avec $n \geq 4$ et V non du type (E'). L'ouvert V_{lisse} satisfait le principe de Hasse dans chacun des cas suivants :

- (i) V contient une paire globalement k -rationnelle de droites;
- (ii) V contient une paire globalement k -rationnelle de points singuliers;
- (iii) V contient une quadrique lisse de dimension 2 définie sur k .

Principe de la démonstration. — On commence par traiter le cas (i), sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

(α) Les deux droites ne se rencontrent pas, l'espace $H_0 \cong \mathbf{P}_k^3$ qu'elles engendrent rencontre \bar{V} en 4 droites formant un quadrilatère gauche;

(α') V est comme en (α), et aucun des sommets du quadrilatère n'est singulier sur \bar{V} .

Pour $n=5$, l'idée est de se ramener au cas $n=4$ de (i), où le résultat est essentiellement connu ([1], chap. IV, § 8), en remplaçant V par $V \cap H$, pour H un hyperplan convenable, défini sur k et contenant H_0 . Il faut choisir H tel que $(H \cap V)_{\text{lisse}}(k_v)$ soit non vide pour toute place v de k . En utilisant l'approximation forte dans le corps k , le théorème des fonctions implicites sur un corps local et l'existence d'une infinité de places v avec $(H_0 \cap V)(k_v) \neq \emptyset$, on trouve un ensemble fini S de places contenant les places archimédiennes, et un hyperplan H contenant H_0 , avec $(H \cap V)_{\text{lisse}}(k_v)$ non vide pour $v \in S$, et tels qu'on puisse, pour $v \notin S$, parler de l'intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}_{\kappa(v)}^4$ [où $\kappa(v)$ est le corps fini résiduel en v], réduction de $H \cap V \subset H \cong \mathbf{P}_k^4$ en v . Si toutes ces réductions sont géométriquement intègres, il résulte des estimations de Lang-Weil-Nisnevich ([7], [8]) que, si l'on a pris soin de mettre dans S toutes les places « trop petites », ces réductions ont un point lisse dans $\kappa(v)$; le lemme de Hensel assure alors l'existence d'un k_v -point rationnel lisse sur $H \cap V$. Le point délicat est d'assurer que ces réductions sont géométriquement intègres; pour ce faire, nous prenons des équations explicites, et c'est ainsi qu'apparaît la condition (E'), bien nécessaire d'après les contre-exemples ([4], [5]). Pour $n > 5$, on procède par réduction au cas $n=5$ [et V non du type (E')!] encore par sections hyperplanes, mais les détails sont plus simples.

La démonstration de la plupart des autres cas non triviaux du théorème 1 passe par le théorème 3 ci-dessous, et le théorème d'irréductibilité de Hilbert, qui permet d'étendre l'énoncé (iii) de ce théorème à des variétés de dimension plus grande. Dans certains cas, nous devons tantôt recourir à une descente analogue à celle qui mène au théorème 3 pour nous ramener au cas (i) (α'), tantôt établir le principe de Hasse pour les espaces principaux homogènes sous certains tores, par des techniques connues [9].

Remarque 2. — Nous disposons d'une tout autre démonstration du principe de Hasse dans le cas suivant :

(α'') V est comme en (α), et les quatre sommets du quadrilatère sont singuliers sur \bar{V} .

Cette démonstration est une extension de celle donnée en [4]. Inversement, les méthodes de cette Note redonnent les principaux résultats de [4]. Les deux approches fournissent une réponse affirmative à des questions de Manin ([1], chap. VI, fin du § 5).

PROPOSITION 4. — Soit $V \subset \mathbb{P}_k^n$ une intersection pure, lisse, de deux quadriques, avec $n \geq 7$ et $V(k) \neq \emptyset$. Pour v place non archimédienne de k , on a $V(k_v)/R = 0$, et pour v place réelle, $V(k_v)/R$ est la décomposition de $V(k_v)$ en composantes connexes. L'application $V(k) \rightarrow \prod_{v \text{ réelle}} V(k_v)$ induit une bijection entre $V(k)/R$, qui est fini, et l'ensemble des composantes connexes du produit.

Pour $n=6$, nous avons encore des résultats de finitude pour $V(k)/R$, mais sans contrôle *a priori* par les seules places réelles.

IV. SURFACES DE CHÂTELET GÉNÉRALISÉES. — On appelle ainsi tout modèle projectif et lisse X d'une k -surface d'équation affine :

$$y^2 - az^2 = P(x),$$

avec $a \in k^*$, et $P \in k[x]$ un polynôme séparable de degré 3 ou 4 (chez Châtelet [10] et Manin [1], P a toutes ses racines dans k).

THÉORÈME 2. — Supposons $X(k)$ non vide.

(i) L'ensemble $X(k)/R$ des classes pour la R -équivalence est en bijection avec le groupe $A_0(X)$ des zéro-cycles de degré zéro modulo l'équivalence rationnelle sur X .

(ii) $X(k)/R$ et $A_0(X)$ sont finis si k est de type fini sur \mathbb{Q} .

(iii) Si k est un corps de nombres, leur ordre est effectivement calculable, et la conjecture A de [11] vaut pour X .

Remarque 3. — Jusqu'à présent, la conjecture A de [11] n'avait été vérifiée que dans des cas numériques ([11], [15], [14]).

THÉORÈME 3. — Soit k un corps de nombres. L'obstruction de Manin ([1], [6]) au principe de Hasse sur X est la seule ; pour $X(k) \neq \emptyset$, l'obstruction de Brauer [6] à l'approximation faible est la seule. Ainsi :

(i) On dispose d'une méthode effective pour décider si X possède un point k -rationnel, et si un point de $\prod_{v \in S} X(k_v)$ (S ensemble fini de places de k) est dans l'adhérence de $X(k)$.

(ii) Si le polynôme P est irréductible de degré 3, alors $X(k)$ est non vide et X satisfait l'approximation faible.

(iii) Si P est irréductible de degré 4, alors X satisfait le principe de Hasse et, si $X(k)$ est non vide, l'approximation faible.

La démonstration de ces théorèmes repose sur la théorie de la descente sur les surfaces rationnelles ([6], [12]) et sur les faits suivants. Pour X un modèle convenable, on a :

(a) Tout torseur universel \mathcal{T} sur X avec $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$ est une variété k -rationnelle. Des équations locales pour \mathcal{T} [12] permettent en effet ici de se ramener à la proposition 2.

(b) Pour k un corps de nombres, les toseurs universels sur X satisfont le principe de Hasse (et l'approximation faible) : on se ramène ici encore à des intersections de deux quadriques auxquelles le théorème 1 (i) (α') s'applique (et la proposition 3).

(c) Pour $X(k) \neq \emptyset$, on a une surjection naturelle de $X(k)/\mathbb{R}$ sur $A_0(X)$ [13].

(d) Dans les cas (ii) et (iii) du théorème 3, on a $\text{Br } X/\text{Br } k = 0$ ([4], [14]).

Comme application du théorème 3 (iii), notons le résultat suivant :

COROLLAIRE. — Soit $n = 2^{4r+i}m$ un entier naturel, avec r, i, m entiers, $0 \leq i \leq 3$ et m impair. Alors $n = a^2 + b^2 + c^4$ avec a, b, c rationnels sauf dans les cas :

(i) $i = 0$ et $m \equiv 7 \pmod{8}$,

(ii) $i = 2$ et $m \equiv 3 \pmod{4}$.

PROPOSITION 5. — Soient k un corps, $a \in k^*$, a non carré, et $P(x) \in k[x]$ un polynôme irréductible de degré 3, de discriminant a . Soit X la k -surface affine d'équation :

$$y^2 - az^2 = P(x).$$

Alors $X \times_k \mathbb{P}_k^9$ est k -birationnelle à \mathbb{P}_k^{11} , mais X n'est pas k -rationnelle.

La k -rationalité « stable » de X se voit en utilisant la propriété (a) ci-dessus, et la non- k -rationalité est due à Iskovskih [16]. On obtient ainsi une réponse négative à une question de Zariski [17], pour un corps de base non algébriquement clos. Ce résultat est développé dans [18], où, en collaboration avec Beauville, nous obtenons aussi une réponse négative au problème de Zariski sur un corps algébriquement clos.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] YU. I. MANIN, *Formes cubiques*, Nauka, Moscou, 1972, trad. ang. North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [2] V. A. ISKOVSKIH, *Mat. Zametki*, 10, 1971, p. 253-257 (trad. ang. *Math. Notes*, 10, 1971, p. 575-577).
- [3] B. J. BIRCH et H. P. F. SWINNERTON-DYER, *J. reine angew. Math.*, 274, 1975, p. 164-174.
- [4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. CORAY et J.-J. SANSUC, *J. reine angew. Math.*, 320, 1980, p. 150-191.
- [5] W. HÜRLIMANN, *Lecture Notes in Math.*, n° 917, 1982, p. 43-65, Springer-Verlag.
- [6] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976, p. 1113-1116; 284, série A, 1977, p. 967-970; 284, série A, 1977, p. 1215-1218.
- [7] S. LANG et A. WEIL, *Amer. J. Math.*, 76, 1954, p. 819-827.
- [8] L. B. NISNEVIČ, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 99, 1954, p. 17-20.
- [9] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 4^e série, 10, 1977, p. 175-229.
- [10] F. CHÂTELET, *Enseignement Math.*, 5, 1959, p. 153-170.
- [11] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Duke Math. J.*, 48, 1981, p. 421-447.
- [12] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, in *Journées de géométrie algébrique d'Angers*, A. BEAUVILLE éd., 1979, p. 223-237, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.
- [13] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et D. CORAY, *Compositio Math.*, 39, 1979, p. 301-332.
- [14] J.-J. SANSUC, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, exp. n° 33, 1981-1982.
- [15] B. E. KUNIAVSKIĬ et M. A. TSFASMAN, *Uspekhi Mat. Nauk*, 37, 1982, p. 163-164.
- [16] V. A. ISKOVSKIH, *Mat. Sb.*, 88, 1972, p. 31-37 (= *Math. U.S.S.R. Sb.*, 17, 1972, p. 30-36).
- [17] B. SEGRE, *Colloque d'Algèbre et de Théorie des Nombres*, Paris, 1949, p. 135-138, C.N.R.S., Paris, 1950.
- [18] A. BEAUVILLE, J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC et SIR P. SWINNERTON-DYER, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, prépublication.

J.-L. C.-T. : C.N.R.S., Mathématiques, Bât. 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay ;

J.-J. S. : École Normale supérieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05 ;

Sir P. Sw.-D. : U.G.C., 14, Park Crescent, London W1N 4DH.