Reprinted from JOURNAL OF ALGEBRA
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London

Vol. 84, No. 2, October 1983
Printed in Belgium

Quelques gammes sur les formes quadratiques

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE* ET JEAN-JACQUES SANSUC†

* *C.N.R.S., Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France, and* † *E.N.S., 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France*

Communicated by R. G. Swan

Received May 12, 1982

INTRODUCTION

Dans cet article, nous étudions la validité de l'énoncé suivant, où k désigne un corps de caractéristique différente de 2, et où $K = k(t)$ est le corps des fractions rationnelles à une variable sur le corps k:

(E) *Soit* $\Phi = \langle 1, a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_n \rangle$ *une n-forme de Pfister à coefficients dans K, et soit* $f \in K^*$ *tel que la forme* $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ *soit K-isomorphe à une forme définie sur* $k \subset K$. *Il existe alors* $a \in k^*$ *tel que* $f \cdot \Phi$ *soit K-isomorphe à* $a \cdot \Phi$.

Cet énoncé peut sembler exotique. Cependant, la question de sa validité dans le cas $n = 2$ est apparue naturellement dans l'étude de l'équivalence rationnelle sur les zéro-cycles des surfaces fibrées en coniques sur la droite projective (S. Bloch [1], les auteurs [4]). De plus, comme on le verra dans cet article-ci, le cas $n = 1$ est intimement lié à une autre situation géométrique simple: étant donnée une courbe hyperelliptique définie sur le corps k, existe-t-il des algèbres simples centrales non triviales qui sont décomposées par le corps des fonctions de la courbe?

On voit facilement que l'énoncé (E) vaut si Φ est définie sur k, ou s'il existe $t_0 \in k$ tel que la forme spécialisée $\Phi(t_0)$ soit isotrope. Mais la validité de l'énoncé (E) pour *toutes* les n-formes de Pfister dépend de la nature du corps k. On verra ici que l'énoncé (E) vaut pour $k = \mathbb{R}$ et n quelconque, pour $n \geqslant 2$ et k corps p-adique ou corps de nombres, pour tout $n \geqslant r$ si le corps k est C_r (en particulier pour tout n si k est algébriquement clos ou fini). Mais on donnera des contre-exemples à (E) avec $n = 1$ et k corps de nombres ou k corps p-adique, ainsi que des contre-exemples à (E) avec $n = 2$ et $k = \mathbb{Q}(X)$, ou $\mathbb{Q}_p(X)$, ou $\mathbb{Q}_p((X))$, ou $\mathbb{C}(X, Y, Z)$, ou $\mathbb{C}((X))((Y))((Z))$: tous ces exemples avec $n = 2$ apportent une réponse négative à la question soulevée

0021-8693/83 $3.00

dans [4, p. 437]. On voit ainsi qu'un certain homomorphisme "caractéristique" (voir Paragraphe 3):

$$A_0(X) \to H^1(k, S)$$

utilisé dans l'étude de l'équivalence rationnelle sur les zéro-cycles des surfaces rationnelles fibrées en coniques sur la droite projective [1, 4], injectif lorsque la surface X possède un point k-rationnel [4, Théorème 2], ne l'est pas forcément si l'on omet cette condition. Ceci répond à une question de S. Bloch ([1], fin de l'introduction).

Le premier Paragraphe contient les résultats positifs (hypothèse sur Φ, ou sur f, ou sur le corps k), et décrit un groupe mesurant l'éventuelle obstruction au problème, pour k et Φ donnés. Le second Paragraphe décrit en détail le cas $n = 1$ et la géométrie associée, ce qui permet de construire des contre-exemples de façon raisonnée. Dans le troisième Paragraphe, après avoir brièvement rappelé le lien du cas $n = 2$ avec les surfaces fibrées en coniques sur la droite projective, on donne des contre-exemples, inspirés par le cas $n = 1$.

Notations et rappels

Les notations sont celles adoptées dans [4], c'est-à-dire essentiellement celles du livre de Lam [5]. Etant donné un polynôme irréductible $\pi \in k[t]$, on note $\partial_{1,\pi}$ l'homomorphisme de premier résidu de l'anneau de Witt $W(K)$ dans l'anneau de Witt $W(k_\pi)$ du corps $k_\pi = k[t]/(\pi)$, et l'on note $\partial_{2,\pi}$ l'homomorphisme de second résidu (homomorphisme de groupes abéliens, dépendant du choix de π) de $W(K)$ dans $W(k_\pi)$. On sait qu'on a la suite exacte de Milnor:

$$0 \to W(k) \xrightarrow{j} W(K) \xrightarrow{\{\partial_{2,\pi}\}} \bigoplus_{\pi} W(k_\pi) \to 0 \tag{1.1}$$

où π parcourt les polynômes unitaires irréductibles de $k[t]$. Cette suite induit des suites exactes pour les puissances de l'idéal fondamental [8, Lemma 5.7]:

$$0 \to I^n k \xrightarrow{j} I^n K \xrightarrow{\{\partial_{2,\pi}\}} \bigoplus_{\pi} I^{n-1} k_\pi \to 0 \tag{1.2}$$

et aussi, par passage aux quotients:

$$0 \to I^n k/I^{n+1} k \xrightarrow{j} I^n K/I^{n+1} K \xrightarrow{\{\partial_{2,\pi}\}} \bigoplus_{\pi} I^{n-1} k_\pi/I^n k_\pi \to 0. \tag{1.3}$$

Etant donné un corps L, on appelle L-forme une forme quadratique définie sur L, c'est-à-dire à coefficients dans L. Etant donnée une extension de corps L/K, on dit qu'une L-forme vient de K si elle est L-isomorphe à une forme à coefficients dans K. On utilisera tacitement le théorème de simplification de Witt: deux formes quadratiques de même rang sont isomorphes si et seulement si leurs classes dans l'anneau de Witt sont identiques. On note $\langle\langle a_1,..., a_n\rangle\rangle$ la n-forme de Pfister $\langle 1, a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_n\rangle$.

1. Cas de validité de l'énoncé (E)

Proposition 1. *Soit Φ une forme quadratique définie sur k, et soit $f \in K^*$ tel que la forme $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vienne de k. Il existe alors $a \in k^*$ tel que $f \cdot \Phi$ soit K-isomorphe à $a \cdot \Phi$.*

Démonstration. Par hypothèse, $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vient de k; si une k-forme est isotrope sur $k(t)$, elle l'est sur k, ce qui, joint au théorème de simplification de Witt, montre l'existence d'une k-forme Ψ telle que $f \cdot \Phi$ soit K-isomorphe à Ψ. Supposons k infini. Il existe alors π de degré 1 tel que $v_\pi(f) = 0$ (v_π désigne la valuation attachée à π). De l'égalité $f \cdot \Phi = j(\Psi)$ dans $W(K)$, on tire par application de $\partial_{1,\pi}$:

$$\bar{f} \cdot \Phi = \Psi \in W(k)$$

($\bar{f}$ désignant la classe de f modulo π) puisque $\partial_{1,\pi} \circ j$ est l'identité de $W(k)$. Comme toutes les formes considérées ont le même rang, on obtient un K-isomorphisme $f \cdot \Phi \cong \bar{f} \cdot \Phi$, avec $\bar{f} \in k_\pi^* = k^*$. Si k est fini, il existe au moins un polynôme π irréductible de degré impair tel que $v_\pi(f) = 0$. Un argument de transfert permet alors d'obtenir le résultat (utiliser [5, Chapitre 7, Théorème 1.3 (Réciprocité) et Théorème 1.7]).

Proposition 2. *Soit Φ une K-forme quadratique, et soit $f \in K^*$ tel que $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vienne de k. S'il existe un polynôme irréductible π de degré impair tel que $\partial_{1,\pi}(\Phi) = 0$, alors $f \cdot \Phi$ est K-isomorphe à Φ.*

Démonstration. On peut supposer Φ donnée sous la forme $\langle a_1,..., a_r\rangle \perp \pi\langle b_1,..., b_s\rangle$, avec $v_\pi(a_i)$ et $v_\pi(b_j)$ nuls pour tout i et j. On peut aussi supposer $v_\pi(f) = 0$ ou 1. Pour $c \in K^*$ de valuation $v_\pi(c)$ nulle, on note $\bar{c}$ la classe de c dans k_π^*. L'hypothèse $\partial_{1,\pi}(\Phi) = 0$ se traduit par:

$$\langle \bar{a}_1,..., \bar{a}_r\rangle = 0 \in W(k_\pi). \tag{1.4}$$

Supposons d'abord $v_\pi(f) = 0$. Alors

$$\partial_{1,\pi}(f \cdot \Phi \perp -\Phi) = \bar{f} \cdot \langle \bar{a}_1,..., \bar{a}_r\rangle \perp -\langle \bar{a}_1,..., \bar{a}_r\rangle = 0,$$

d'après (1.4). Supposons maintenant $v_\pi(f)=1$, soit $f=\pi g$ avec $v_\pi(g)=0$. Comme $f\cdot\Phi\perp-\Phi$ vient de k, on a:

$$0=\partial_{2,\pi}(f\cdot\Phi\perp-\Phi)=\bar{g}\cdot\langle\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_r\rangle\perp-\langle\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_s\rangle\in W(k_\pi)$$

et donc, compte tenu de (1.4):

$$\langle\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_s\rangle=0\in W(k_\pi). \tag{1.5}$$

Conjuguant (1.4) et (1.5), on obtient:

$$\partial_{1,\pi}(f\cdot\Phi\perp-\Phi)=\bar{g}\cdot\langle\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_s\rangle\perp-\langle\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_r\rangle=0\in W(k_\pi).$$

Ainsi, quelle que soit la valuation de f, on a:

$$\partial_{1,\pi}(f\cdot\Phi\perp-\Phi)=0.$$

Si maintenant Ψ désigne une k-forme telle que $f\cdot\Phi\perp-\Phi$ soit K-isomorphe à Ψ, on obtient $\partial_{1,\pi}\circ j(\Psi)=0$ dans $W(k_\pi)$. Comme l'application composée $\partial_{1,\pi}\circ j$ n'est autre que l'application naturelle $W(k)\to W(k_\pi)$, et que celle-ci est injective car k_π/k est de degré impair (théorème de Springer), on conclut $\Psi=0\in W(k)$, et donc $f\cdot\Phi\perp-\Phi=0\in W(K)$, d'où un K-isomorphisme $f\cdot\Phi\cong\Phi$.

PROPOSITION 3. *Soient $a_1,\dots,a_n$ des polynômes non nuls de $k[t]$, sans facteur multiple, et premiers entre eux deux à deux. Supposons que l'un des a_i a un facteur irréductible de degré impair. Soit $\Phi=\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$, et soit $f\in K^*$ tel que $f\cdot\Phi\perp-\Phi$ vienne de k. Alors $f\cdot\Phi$ est K-isomorphe à Φ.*

Démonstration. Soit π un polynôme (unitaire) irréductible de degré impair divisant l'un des a_i, qu'on peut appeler a_1. Un calcul simple montre qu'il existe $u\in k_\pi^*$ tel que pour $f\in k(t)^*$ on ait:

$$\partial_{1,\pi}(f\cdot\Phi)=u\cdot\partial_{2,\pi}(f\cdot\Phi)$$

(cf. [4, Section 3, Lemma 4]; u n'est autre que la classe de a_1/π dans k_π^*). Pour $f\in K^*$ tel que $f\cdot\Phi\perp-\Phi$ soit K-isomorphe à une k-forme Ψ, on a donc:

$$\begin{aligned}\partial_{1,\pi}(\Psi)&=\partial_{1,\pi}(f\cdot\Phi\perp-\Phi)=u\cdot\partial_{2,\pi}(f\cdot\Phi\perp-\Phi)\\&=u\cdot\partial_{2,\pi}(\Psi)=0\in W(k_\pi)\end{aligned}$$

puisque les seconds résidus des formes constantes sont nuls. Ainsi $\Psi\in W(k)$ devient nulle dans $W(k_\pi)$, et comme k_π/k est une extension de degré impair, $\Psi=0\in W(k)$, d'où un K-isomorphisme $f\cdot\Phi\cong\Phi$.

Pour Φ d'un type assez simple, et $n = 1$ ou 2, la géométrie nous permettra d'obtenir encore quelques résultats positifs: *voir* Paragraphe 2, Proposition 9, et Paragraphe 3, Proposition 11. Voici maintenant un résultat dépendant d'une hypothèse sur f.

PROPOSITION 4. *Soit Φ une K-forme quadratique, et soit $f \in K^*$ tel que $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vienne de k. S'il existe π polynôme irréductible de degré impair tel que $v_\pi(f) = 0$ et que la classe $\bar{f}$ de f dans k_π^* soit un carré, alors $f \cdot \Phi$ et Φ sont K-isomorphes.*

Démonstration. Soit Ψ une k-forme telle que $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ soit K-isomorphe à Ψ, et soit π comme dans l'énoncé. On a alors

$$\partial_{1,\pi} \circ j(\Psi) = \bar{f} \cdot \partial_{1,\pi}(\Phi) \perp -\partial_{1,\pi}(\Phi) = 0 \in W(k_\pi)$$

et donc (théorème de Springer) $\Psi = 0$ dans $W(k)$.

On pourrait déjà utiliser les résultats obtenus pour donner des hypothèses sur le corps k assurant que l'énoncé (E) vaut pour certaines valeurs de n (corps quadratiquement clos, corps C_i, corps $\mathfrak{p}$-adiques); mais la proposition suivante donnera des résultats plus fins. Nous avons besoin de quelques *notations*. Etant donnée $\Phi = \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ une n-forme de Pfister à coefficients dans K, on note $D_K(\Phi)$ le sous-groupe de K^* formé des éléments f représentés par Φ sur K, i.e., des f tels que $f \cdot \Phi$ et Φ soient K-isomorphes. On note

$$K_\Phi^* = \{f \in K^* \mid f \cdot \Phi \perp -\Phi \in j(W(k))\},$$
$$k_\Phi^* = \{a \in k^* \mid a \cdot \Phi \perp -\Phi \in j(W(k))\}.$$

Il est clair que l'*ensemble* K_Φ^* contient $D_K(\Phi)$, et l'on vérifie sur la définition que $k_\Phi^* = k^* \cap K_\Phi^*$ est un sous-groupe de k^*. En fait:

PROPOSITION 5. *L'ensemble K_Φ^* est un sous-groupe de K^*. Le quotient $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ s'identifie à un sous-groupe de $I^{n+1}k/I^{n+2}k$. Pour Φ donnée, l'énoncé* (E) *vaut pour tout $f \in K^*$ si et seulement si le groupe-quotient $K_\Phi^*/k_\Phi^* \cdot D_K(\Phi)$ est trivial.*

COROLLAIRE 1. *Soit Φ une n-forme de Pfister à coefficients dans K. L'énoncé* (E) *vaut pour Φ dans les cas suivants:*

(i) *k est quadratiquement clos;*

(ii) *k est fini;*

(iii) *k est un corps C_i avec $i \leqslant n$;*

(iv) *k est un corps $\mathfrak{p}$-adique et $n \geqslant 2$;*

(v) *k est un corps global sans plongement réel (corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, ou corps de nombres totalement imaginaire) et $n \geqslant 2$.*

C'est clair, car $I^{n+1}k = 0$ dans tous ces cas.

Démonstration de la Proposition 5. La dernière partie se vérifie immédiatement. Pour établir les deux premières, considérons l'application $K^* \to I^{n+1}K/I^{n+2}K$ donnée par $f \mapsto f \cdot \Phi \perp -\Phi$. On voit facilement que c'est un homomorphisme (car on a quotienté par $I^{n+2}K$), qui en induit un autre:

$$\theta : K^*/D_K(\Phi) \to I^{n+1}K/I^{n+2}K.$$

Le théorème d'Arason–Pfister [5, Chapitre 10, Corollaire 3.4, p. 290] montre que θ est *injectif.* Pour établir que K_Φ^* est un groupe, et que le quotient $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ s'identifie à un sous-groupe de $I^{n+1}k/I^{n+2}k$, il suffit de montrer: un élément f de K^* est dans K_Φ^* si et seulement si $\theta(f)$ a une image nulle par chacune des applications $\partial_{2,\pi}$ dans la suite exacte (1.3). Cette condition est clairement nécessaire. Supposons maintenant que, pour π un polynôme unitaire irréductible, l'on ait: $\partial_{2,\pi}(f \cdot \Phi \perp -\Phi) \in I^{n+1}k_\pi$. Un calcul simple montre que l'image par $\partial_{2,\pi}$ d'une m-forme de Pfister sur K (de rang 2^m) est la classe d'une forme sur k_π de rang au plus 2^{m-1}. Ainsi $\partial_{2,\pi}(f \cdot \Phi \perp -\Phi)$ est la classe d'une forme sur k_π de rang au plus 2^n, qui est par hypothèse dans $I^{n+1}k_\pi$: le théorème d'Arason–Pfister sur le corps k_π implique $\partial_{2,\pi}(f \cdot \Phi \perp -\Phi) = 0 \in W(k_\pi)$. Si maintenant ceci vaut pour chaque π unitaire irréductible, on conclut de (1.1) ou (1.2) que $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vient de k.

Remarque 1. Précisons comment se calcule la flèche $K_\Phi^*/D_K(\Phi) \hookrightarrow I^{n+1}k/I^{n+2}k$. On peut supposer k infini (cf. Corollaire 1). Soit $f \in K_\Phi^*$. Choisissons $\pi(t) = t - t_0$ avec $t_0 \in k$ tel que $v_\pi(a_i) = 0$ pour chaque i et $v_\pi(f) = 0$. L'image de f est alors la classe de $f(t_0) \cdot \langle\langle a_1(t_0),\dots, a_n(t_0)\rangle\rangle \perp -\langle\langle a_1(t_0),\dots, a_n(t_0)\rangle\rangle$.

On a déjà vu à la Proposition 1 un exemple où la validité de (E) ne résultait pas de la nullité de $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ (à la différence des Propositions 2 et 3). En voici un autre:

PROPOSITION 6. *Soit $k = \mathbb{R}$, le corps des réels. Soit Φ une K-forme du type $\langle 1, a\rangle \otimes q$, avec $a \in K^*$, et q une K-forme quelconque. Si $f \in K^*$ est tel que $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vienne de $\mathbb{R}$, alors il existe $\varepsilon = \pm 1 \in \mathbb{R}^*$ tel que $f \cdot \Phi$ et $\varepsilon \cdot \Phi$ soient K-isomorphes.*

Démonstration. On peut supposer la fonction a semi-définie positive. Sinon, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a(t_0)$ soit strictement négatif et qu'aucun des coefficients de q (prise diagonale) n'ait de pôle ni de zéro en t_0. Alors $\partial_{1,t-t_0}(\Phi) = 0$, et la Proposition 2 montre que $\varepsilon = +1$ convient. On peut aussi supposer f semi-définie négative sur $\mathbb{R}$, sinon la Proposition 4 montre que $\varepsilon = +1$ convient. On a donc $f = -g$, avec g semi-définie positive. Mais puisque g et a sont semi-définies positives, on a un K-isomorphisme $g \cdot \langle 1, a \rangle \cong \langle 1, a \rangle$, grâce à l'argument bien connu suivant. Il suffit de voir que g est représentée par $\langle 1, a \rangle$ sur le corps $K = \mathbb{R}(t)$. Mais g est — trivialement — une somme de 2 carrés dans $\mathbb{R}(t)$, i.e., est une norme pour l'extension $\mathbb{C}(t)/\mathbb{R}(t)$. Comme $\mathbb{C}(t)$ est un corps C_1 (Tsen), la forme $\langle 1, a \rangle$ est universelle sur $\mathbb{C}(t)$. Un argument de transitivité de normes permet de conclure, le cas où a est un carré dans $\mathbb{C}(t)$ étant trivial. Ainsi, sur K, $g \cdot \Phi \cong \Phi$, donc $f \cdot \Phi \cong -\Phi$, autrement dit $\varepsilon = -1$ convient.

Le lecteur adaptera la démonstration pour k réel clos quelconque. Nous terminerons ce Paragraphe en montrant que le Corollaire 1(v) vaut en fait pour k un corps global quelconque.

Proposition 7. *Soit k un corps de nombres, et soit Φ une n-forme de Pfister sur K, avec $n \geqslant 2$. L'énoncé* (E) *vaut pour Φ.*

Démonstration. Le cas $n = 2$ fait l'objet de [4, Théorème 5(iii)]. Supposons donc $n \geqslant 3$, et soit $f \in K_\Phi^*$. Pour v place finie ou complexe de k, la suite de Milnor (1.2) donne $I^{n+1} k_v(t) = 0$, où k_v désigne le complété de k en v; ainsi, pour tout $\alpha \in k_v^*$ (et même $\alpha \in k_v(t)^*$), on a un $k_v(t)$-isomorphisme entre $f \cdot \Phi$ et $\alpha \cdot \Phi$. Par ailleurs, pour chaque place réelle v de k, il existe $\alpha_v = \pm 1 \in k_v^*$ tel que $f \cdot \Phi \cong \alpha_v \cdot \Phi$ sur $k_v(t)$; en effet $f \in k(t)_\Phi^*$ entraîne $f \in k_v(t)_\Phi^*$, et il suffit d'appliquer la Proposition 6. Par approximation faible, on peut trouver $\alpha \in k^*$ tel que $\alpha/\alpha_v \in k_v^*$ soit un carré pour chaque place réelle v. Les $k(t)$-formes $f \cdot \Phi$ et $\alpha \cdot \Phi$ sont alors isomorphes sur chaque $k_v(t)$, et l'on sait [3, Corollaire 1.1.1.] que ceci implique qu'elles sont isomorphes sur $k(t)$.

Remarque 2. Nous ne savons pas si, dans le cas $n = 2$, on peut éviter la longue analyse géométrique qui, dans [4], mène à la démonstration du Théorème 5(iii).

2. Le cas d'une forme de Pfister binaire

Dans ce Paragraphe, $\Phi = \langle 1, a \rangle$ est une forme binaire, et k est supposé parfait (car. $k \neq 2$). Le résultat principal est l'interprétation géométrique des groupes $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ et $K_\Phi^*/k_\Phi^* \cdot D_K(\Phi)$ introduits au Paragraphe 1 (cf. Proposition 5) et qui mesurent le défaut de validité de l'énoncé (E). Les résultats classiques (Roquette, Lichtenbaum) sur l'*indice* d'une courbe permettent alors très facilement de donner des contre-exemples à (E) pour $n = 1$ et k p-adique.

On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, et $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. On peut supposer a polynôme de $k[t]$, sans facteur carré. Si a est un carré dans $\bar{k}(t)^*$, alors a appartient à k^*, et (E) vaut (Proposition 1). On supposera donc $a \notin k$. De plus, (E) vaut si k est un corps fini, et l'on a même alors $K_\Phi^*/D_K(\Phi) = 0$: on supposera k infini.

La Proposition 5 identifie ici $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ à un sous-groupe de I^2k/I^3k. Ce dernier sous-groupe s'envoie homomorphiquement dans la 2-torsion du groupe de Brauer $\mathrm{Br}\, k$ de k, par l'invariant c de Clifford [5, Chapitre 5, Section 3]. D'après la Remarque 1, l'image de $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ est formée de classes de formes quaternioniennes, sur lesquelles on sait que l'invariant de Clifford est injectif. Ainsi, $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ s'identifie à un sous-groupe de ${}_2\mathrm{Br}\, k$ (en particulier, (E) vaut si la dimension cohomologique de k est au plus 1): nous allons identifier ce sous-groupe.

Les hypothèses faites sur a montrent que la courbe affine d'équation $y^2 = -a(t)$ (coordonnées y et t) est une k-courbe lisse et géométriquement intègre. On note C une k-courbe projective et lisse de modèle affine donné par $y^2 = -a(t)$: une telle courbe se construit facilement par recollement. La coordonnée t permet de voir C comme un revêtement double de la droite projective $\mathbb{P}_k^1$. On note $L = k(C)$ le corps des fonctions rationnelles de C, on note $\bar{L} = \bar{k}(C)$ le corps des fonctions rationnelles de $\bar{C} = C \times_k \bar{k}$. On note de même $\bar{K} = \bar{k}(t)$. Le groupe $D_K(\Phi)$ n'est autre que l'image $N_{L/K}L^*$ de la norme de L à K.

PROPOSITION 8. *Le groupe* $K_\Phi^*/N_{L/K}L^* = K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ *est isomorphe au noyau de l'application naturelle* $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, L$.

Démonstration. On dispose du diagramme commutatif et évident de suites exactes de G-modules:

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \bar{k}^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bar{K}^* \arrow[r] \arrow[d] & \bar{K}^*/\bar{k}^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \bar{k}^* \arrow[r] & \bar{L}^* \arrow[r] \arrow[d] & \bar{L}^*/\bar{k}^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & \bar{L}^*/\bar{K}^* \arrow[r, equal] \arrow[d] & \bar{L}^*/\bar{K}^* \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

et de l'isomorphisme de G-modules:

$$\bar{K}^*/\bar{k}^* \simeq \bigoplus_{P \in \mathbb{A}_k^1} \mathbb{Z}[G/G_P]$$

où P parcourt les points fermés de la droite affine, $k(P)$ désigne le corps résiduel en P, et $G_P = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k(P))$. En utilisant le Théorème 90 de Hilbert, le théorème de Tsen ($\mathrm{Br}\,\bar{K} = 0 = \mathrm{Br}\,\bar{L}$), la nullité du H^1 d'un G-module de permutation (i.e., du type $\oplus_i \mathbb{Z}[G/H_i]$ pour H_i sous-groupe ouvert de G), la suite de Kummer et des suites de restriction-inflation (cf. [10, Chapitre VII, Section 6, Proposition 5, et X, Section 4]), on obtient, à partir de la suite de cohomologie déduite de la suite exacte verticale de droite du diagramme ci-dessus, la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\,k \to \mathrm{Br}\,L) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\,K \to \mathrm{Br}\,L) \to \bigoplus_{P \in \mathbb{A}_k^1} k(P)^*/k(P)^{*2}, \tag{2.1}$$

la dernière flèche provenant de flèches de "résidu":

$$\zeta_P : {}_2\mathrm{Br}\,K \to H^1(k(P), \mathbb{Z}/2)$$

(cf. [1, Lemma 3.15], ou [4, p. 431]).

Pour π polynôme unitaire irréductible de $k[t]$ définissant le point fermé P de $\mathbb{A}_k^1$, de corps résiduel $k(P) = k_\pi$, on dispose du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & {}_2\mathrm{Br}\,K \arrow[r, "\zeta_P"] & k(P)^*/k(P)^{*2} \\
K^*/NL^* \arrow[ur] \arrow[dr, "\theta"'] & & \\
 & I^2K/I^3K \arrow[uu, "c_K"'] \arrow[r, "\partial_{2,\pi}"] & I^1k(P)/I^2k(P) \arrow[uu, "\wr", "\text{dét}"']
\end{tikzcd}$$

où la flèche $K^* \to {}_2\mathrm{Br}\,K$ associe à $f \in K^*$ la classe de l'algèbre de quaternions $(\frac{-a,f}{K})$, flèche qui induit donc l'isomorphisme $K^*/NL^* \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\,K \to \mathrm{Br}\,L)$. Que le triangle commute résulte d'un calcul immédiat (*Note:* tous les groupes sont annulés par 2). La commutativité du carré résulte d'un calcul simple et de la description explicite de ζ_P, qui à l'algèbre de quaternions $(\frac{c,d}{K})$ associe, comme le symbole modéré en K-théorie, la classe, dans $k(P)^*/k(P)^{*2}$, de l'élément $(-1)^{ij}\,(\overline{d^i/c^j})$, avec $i = v_\pi(c)$ et $j = v_\pi(d)$, où $\bar{\alpha}$ désigne la classe modulo π d'un élément α de $k(t)^*$ de v_π-valuation nulle. Précisons que dét désigne ici le déterminant signé [5, Chapitre 2, Section 2], donc $\text{dét}(\langle c, d\rangle) = -cd$.

On a vu au Paragraphe 1 (démonstration de la Proposition 5) que K_Φ^*/NL^* est le noyau de l'application composée:

$$K^*/NL^* \xrightarrow{\theta} I^2K/I^3K \xrightarrow{\{\partial_{2,\pi}\}} \bigoplus_\pi I^1k_\pi/I^2k_\pi;$$

d'après le diagramme ci-dessus, c'est donc aussi le noyau de l'application composée:

$$K^*/NL^* \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\, K \to \mathrm{Br}\, L) \xrightarrow{\{\zeta_P\}} \bigoplus_{P \in \mathbb{A}^1_k} k(P)^*/k(P)^{*2}.$$

La suite exacte (2.1) permet alors de conclure.

Remarque 3. On peut vérifier que l'isomorphisme

$$K^*_\Phi/N_{L/K}L^* \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, L)$$

issu des calculs précédents est obtenu par la composition des applications $K^*_\Phi/D_K(\Phi) \to I^2k/I^3k$ de la Proposition 5 et de l'invariant de Clifford $c: I^2k/I^3k \to \mathrm{Br}\, k$. Pour établir ce fait, qui ne sera pas utilisé dans la suite, on utilise les suites de cohomologie tirées du diagramme commutatif de suites exactes de G-modules:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[d] & \\
 & 1 \arrow[d] & & \bar K^*/\bar k^* \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \bar k^* \arrow[r] \arrow[d] & \bar L^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bar L^*/\bar k^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \bar K^* \arrow[r] \arrow[d] & \bar L^* \arrow[r] & \bar L^*/\bar K^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & \bar K^*/\bar k^* \arrow[d] & & 1 & \\
 & 1 & & &
\end{tikzcd}$$

ainsi que l'*injection* $\mathrm{Br}\, k \hookrightarrow \mathrm{Br}\, K$.

COROLLAIRE 2. (i) *Le groupe* $K^*_\Phi/N_{L/K}L^*$ *est isomorphe au conoyau de l'application naturelle* $\mathrm{Pic}\, C \to (\mathrm{Pic}\, \bar C)^G$;

(ii) *Il est isomorphe au noyau de l'application naturelle* $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, C$;

(iii) *Il est nul si* C *possède un* 0*-cycle de degré impair;*

(iv) *Il est isomorphe à* $\mathbb{Z}/2$ *si* C *ne possède pas de* 0*-cycle de degré* 1, *et que* k *est soit le corps* $\mathbb{R}$ *des réels, soit une extension finie de* $\mathbb{Q}_p$;

(v) *Il est fini si* k *est de type fini sur* $\mathbb{Q}$.

Démonstration. (i) Ici Pic X désigne le groupe de Picard d'une variété X. Pour obtenir la suite (2.1), on a utilisé l'isomorphisme $H^1(G, \bar{L}^*/\bar{k}^*) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} L)$. On sait bien (e.g., [7]) comment obtenir alors l'énoncé en utilisant la suite exacte de G-modules:

$$1 \to \bar{L}^*/\bar{k}^* \to \operatorname{Div} \bar{C} \to \operatorname{Pic} \bar{C} \to 1$$

où la flèche $\bar{L}^* \to \operatorname{Div} \bar{C}$ associe à une fonction son diviseur (on utilise $\operatorname{Div} C = (\operatorname{Div} \bar{C})^G$ et $H^1(G, \operatorname{Div} \bar{C}) = 0$, qui résulte du lemme de Shapiro car $\operatorname{Div} \bar{C}$ est un G-module de permutation).

(ii) On sait que le groupe de Brauer $\operatorname{Br} C$ de la k-variété *lisse* C s'injecte dans le groupe de Brauer de son corps des fonctions $k(C)$.

(iii) Comme C possède un 0-cycle de degré 2 (car C est un revêtement double de $\mathbb{P}^1_k$), elle possède un 0-cycle de degré 1 dès qu'elle en possède un de degré impair. On sait qu'alors la suite de G-modules

$$1 \to \bar{k}^* \to \bar{L}^* \to \bar{L}^*/\bar{k}^* \to 1$$

est G-scindée. On en déduit $0 = H^1(G, \bar{L}^*/\bar{k}^*) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} L)$. On trouvera une démonstration plus élémentaire dans la Remarque 4.

(iv) Pour $k = \mathbb{R}$, Witt a montré qu'une courbe lisse C sur $\mathbb{R}$ est sans point réel si et seulement si (-1) est une somme de 2 carrés dans $\mathbb{R}(C)$, i.e., si et seulement si le noyau de la flèche $\mathbb{Z}/2 = \operatorname{Br} \mathbb{R} \to \operatorname{Br} \mathbb{R}(C)$ est tout $\operatorname{Br} \mathbb{R}$ (*Note:* si C possède un 0-cycle de degré impair, elle possède un point réel).

Le cas d'un corps p-adique a été étudié par Roquette [9] et Lichtenbaum [6, 7] en liaison avec les problèmes d'*indice* et de *période* pour les courbes. Le théorème de Roquette, dont la démonstration complète a été donnée par Lichtenbaum dans [7], dit que pour une courbe C projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps k p-adique, le noyau de l'application $\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(C)$ est d'ordre fini égal à l'indice I de C, c'est-à-dire au p.g.c.d. des degrés des points fermés de C. Ceci donne le résultat, puisqu'ici $I = 1$ ou 2.

(v) D'après (i), le groupe K_Φ^*/NL^* est un quotient de torsion de $(\operatorname{Pic} \bar{C})^G$, qui est lui-même extension de $\mathbb{Z}$ par le groupe des points k-rationnels de la jacobienne de C: pour k de type fini sur $\mathbb{Q}$, ce groupe est de type fini (théorème de Mordell–Weil–Néron).

Remarque 4 (autre démonstration de (iii)). Si C possède un 0-cycle de degré impair, elle possède un point fermé P de degré $[k(P):k]$ impair. Supposons d'abord P dans l'ouvert affine U d'équation $y^2 = -a(t)$, et soit Q le point fermé de $\mathbb{A}^1_k$ image de P par la projection $U \to \mathbb{A}^1_k$ définie par la coordonnée t. Le point Q est défini par un polynôme unitaire irréductible $\pi \in k[t]$ de degré impair, car le corps $k_\pi = k(Q)$ est une sous-extension de $k(P)/k$. Si

π ne divise pas a, on voit sur l'équation que la classe de $(-a(t))$ dans k_π est un carré dans $k(P)$, donc dans $k(Q)$ puisque $k(P)/k(Q)$ est de degré impair. Autrement dit, $\partial_{1,\pi}(\Phi)=0$, et alors $K_\Phi^*/D_K(\Phi)=0$ d'après la Proposition 2. Ceci vaut encore si π divise a, d'après la Proposition 3. Pour conclure, on peut soit raisonner sur un modèle explicite de C (obtenu par recollement de deux situations du type $U/\mathbb{A}_k^1$), soit observer que le lemme de déplacement des diviseurs implique l'existence sur C d'un point fermé de degré impair dans tout ouvert de Zariski non vide (on peut ainsi éviter aussi le recours à la Proposition 3).

On a vu à la Proposition 5 que l'énoncé (E) vaut pour Φ si et seulement si l'application naturelle $k_\Phi^* \to K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ est surjective. Dans la situation de ce Paragraphe, on calcule facilement le groupe k_Φ^*:

LEMME 1. *Soit $a=\prod_i a_i$ un polynôme produit de polynômes irréductibles premiers entre eux deux à deux, et soit $\Phi=\langle 1,a\rangle$. Notons $k_i=k[t]/a_i$. Le sous-groupe k_Φ^* de k^* coïncide avec le noyau de l'application naturelle $k^*\to\prod_i k_i^*/k_i^{*2}$.*

Démonstration. Par définition, et par la suite (1.1), k_Φ^* est l'ensemble des $\lambda\in k^*$ tels que tous les seconds résidus de $\lambda\cdot\Phi\perp-\Phi$ par rapport aux π unitaires irréductibles soient nuls. Il suffit de faire le calcul.

Remarque 5. On voit ainsi que si l'un des a_i est de degré impair, k_Φ^* coïncide avec k^{*2} (qui est toujours contenu dedans). D'un point de vue géométrique, les a_i correspondent aux points de ramification du revêtement double $C\to\mathbb{P}_k^1$, à l'exception du point à l'infini de $\mathbb{P}_k^1$, qui est un point de ramification si et seulement si a est de degré impair. On voit donc que dans l'énoncé du lemme on aurait pu tout aussi bien faire parcourir à k_i l'ensemble des corps résiduels aux points de ramification du morphisme $C\to\mathbb{P}_k^1$ (cf. d'un autre point de vue [5, Chapitre IX, Théorème 4.2] — loi de réciprocité de Scharlau).

Les calculs précédents permettent de décrire encore un cas où (E) vaut:

PROPOSITION 9. *Pour $\Phi=\langle 1,a\rangle$, avec a polynôme irréductible du second degré, l'énoncé* (E) *vaut.*

Démonstration. On peut supposer $a(t)$ de la forme $\lambda(t^2-b)$, avec λ et b dans k^*, et $b\notin k^{*2}$. La courbe C est une conique d'équation affine

$$y^2=-\lambda(t^2-b).$$

On peut supposer C sans point rationnel (sinon (E) vaut d'après le Corollaire 2(iii)). Dans ce cas, $(\operatorname{Pic}\bar{C})^G/\operatorname{Pic} C=\mathbb{Z}/2$ et donc (Corollaire 2(i) et (ii)):

$$K_\Phi^*/N_{L/K}L^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(\operatorname{Br} k\to\operatorname{Br} k(C))\cong\mathbb{Z}/2.$$

Comme $(-\lambda)$ n'est pas une norme de $k(\sqrt{b})/k$ (sinon C aurait un point k-rationnel), et que $(-\lambda)$ est une norme de $L(\sqrt{b})/L$ (voir l'équation), la classe de l'algèbre de quaternions $\left(\frac{-\lambda, b}{k}\right)$ est le générateur de $\operatorname{Ker}(\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(C))$. Par ailleurs, d'après le Lemme 1, b est dans k_Φ^* (b engendre en fait k_Φ^*/k^{*2}), et donc la forme

$$b \cdot \langle 1, \lambda(t^2 - b)\rangle \perp -\langle 1, \lambda(t^2 - b)\rangle$$

vient de k. On calcule la forme dont elle vient en faisant $t = 0$; au signe près, c'est la norme de l'algèbre de quaternions ci-dessus, et donc son invariant de Clifford coïncide avec la classe de cette algèbre: l'application $k_\Phi^* \to K_\Phi^*/N_{L/K}L^*$ est surjective.

Construction d'un contre-exemple à (E), *dans le cas* $n = 1$, *avec* $k = \mathbb{Q}_p$. Ici $\mathbb{Q}_p$ est le corps p-adique usuel, avec $p \neq 2$. Soit $u \in \mathbb{Z}_p^*$ avec u non carré, par exemple $u = -1$ si $p \equiv 3 \mod 4$. Soit $a(t) = -p(t^2 - u)(t^2 - p)$. La courbe C associée a donc un modèle affine lisse d'équation

$$y^2 = p(t^2 - u)(t^2 - p). \tag{2.2}$$

En discutant suivant la valuation p-adique de $t \in \mathbb{Q}_p$, on voit que (2.2) n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}_p$. Ainsi C n'a pas de point dans $\mathbb{Q}_p$ (un point rationnel lisse d'une variété sur $\mathbb{Q}_p$ est entouré d'autres). Comme C est de genre 1, le théorème de Riemann–Roch montre qu'elle ne possède pas non plus de 0-cycle de degré 1 (on peut aussi donner un argument de valuation sur (2.2) considérée dans une extension finie de degré impair de $\mathbb{Q}_p$). Ainsi (Corollaire 2(iv)):

$$K_\Phi^*/N_{L/K}L^* \cong \mathbb{Z}/2.$$

Un élément de $\mathbb{Q}_p^*$ qui est un carré dans $\mathbb{Q}_p(\sqrt{u})$ *et* dans $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$ est un carré dans $\mathbb{Q}_p$. Ainsi (Lemme 1) $\mathbb{Q}_{p,\Phi}^* = \mathbb{Q}_p^{*2}$, et l'application

$$\mathbb{Q}_{p,\Phi}^* \to K_\Phi^*/N_{L/K}L^* \cong \mathbb{Z}/2$$

a une image nulle. On a donc bien un contre-exemple à (E) (cf. Proposition 5).

Remarques 6. (a) On vérifiera que $a(t) = -p(t^2 - u)(t^2 - \alpha^2 u)$, avec u comme ci-dessus, et $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, $\alpha \neq \pm 1$, bien que donnant une courbe C sans 0-cycle de degré 1, ne donne pas de contre-exemple: $K_\Phi^*/k_\Phi^* \cdot N_{L/K}L^* = 0$.

(b) L'analyse du cas $n = 1$ donnée ici permet de montrer facilement l'*existence* de contre-exemples à (E). Mais les nullités de groupes de cohomologie utilisées dans la Proposition 5 font qu'il est malaisé, même lorsqu'on connaît explicitement un élément de $\operatorname{Ker}(\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(C))$, de trouver l'élément de $K_\Phi^*/N_{L/K}L^*$ qui lui correspond. Il est d'ailleurs aussi malaisé de décrire l'inverse de l'isomorphisme:

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{Pic}\, C \to (\mathrm{Pic}\, \bar{C})^G) \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, k(C)).$$

Dans le contre-exemple ci-dessus, on vérifiera que $f = u(t^2 - p)$ est le générateur de $K_\Phi^*/N_{L/K}L^* \cong \mathbb{Z}/2 \subset \mathrm{Br}\, \mathbb{Q}_p$. Quant à écrire l'inverse de l'isomorphisme ci-dessus mentionné, il faudrait par exemple savoir écrire explicitement p sous la forme $\alpha^2 - u\beta^2$, avec α et β dans $\mathbb{Q}_p(C)$.

(c) Au vu des résultats positifs obtenus dans ce Paragraphe et dans le précédent, le lecteur se convaincra que le contre-exemple ci-dessus est "le plus petit possible".

Contre-exemple à (E), *dans le cas* $n = 1$, *avec* $k = \mathbb{Q}$. Il suffit de reprendre le contre-exemple donné pour $k = \mathbb{Q}_p$. Choisissons $p = 3$ et $u = -1$, puis $f = u(t^2 - p)$ et $\Phi = \langle 1, -p(t^2 - u)(t^2 - p)\rangle$. Des calculs immédiats de seconds résidus donnent:

$$\begin{aligned}\partial_{2,t^2-u}(f \cdot \Phi \perp -\Phi) &= p \cdot \langle -u, u - p\rangle = 3 \cdot \langle 1, -4\rangle \\ &= 0 \in W(\mathbb{Q}(\sqrt{-1})), \\ \partial_{2,t^2-p}(f \cdot \Phi \perp -\Phi) &= \langle u, p(p - u)\rangle = \langle -1, 3 \cdot 4\rangle \\ &= 0 \in W(\mathbb{Q}(\sqrt{3})).\end{aligned}$$

Ainsi $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vient de $\mathbb{Q}(t)$, mais il n'existe certainement pas $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ tel que $f \cdot \Phi \cong \alpha \cdot \Phi$ sur $\mathbb{Q}(t)$, puisque ce n'est déjà pas le cas sur $\mathbb{Q}_3(t)$, avec $\alpha \in \mathbb{Q}_3^*$.

3. Le cas d'une forme de Pfister quaternaire

Soit $\Phi = \langle 1, a(t)\rangle \otimes \langle 1, b(t)\rangle$, avec $a(t)$ et $b(t)$ dans $k[t]$, non nuls et sans facteur multiple. On a décrit dans [4] les liens étroits — et bien connus — entre la $k(t)$-forme Φ et les k-surfaces X, projectives et lisses, fibrées en coniques sur la droite projective $\mathbb{P}_k^1$, admettant pour modèle affine la surface de $\mathbb{A}_k^3$ (avec coordonnées y, z, t) d'équation:

$$y^2 + a(t)\, z^2 + b(t) = 0,$$

la projection sur l'axe des t correspondant à la fibration. On note toujours $K = k(t)$. Le sous-groupe $D_K(\Phi)$ de K^* n'est autre que l'ensemble des éléments de K^* représentés par la norme réduite de l'algèbre de quaternions $\left(\frac{-a, -b}{K}\right)$. On note $A_0(X)$ le quotient du groupe des 0-cycles de degré 0 sur X par l'équivalence rationnelle, et on note S le k-tore dual du G-module $\mathbb{Z}$-libre de type fini $\mathrm{Pic}\, \bar{X}$. Bloch a étudié dans [1] une application naturelle

$\lambda : A_0(X) \to H^1(k, S)$, et ses calculs complétés par ceux de [4] montrent l'existence d'une suite exacte [4, Section 3, Proposition 2]:

$$1 \to K_\Phi^*/k_\Phi^* \cdot D_K(\Phi) \to A_0(X) \xrightarrow{\lambda} H^1(k, S). \tag{3.1}$$

Grâce à cette suite, la question de l'injectivité de λ, posée par Bloch, est ramenée à une pure question de formes quadratiques: *l'énoncé* (E) *vaut-il pour* Φ? Rappelons les résultats obtenus dans [4, Théorèmes 4 et 5], avec les notations de la Proposition 5:

PROPOSITION 10. *Pour* $\Phi = \langle 1, a(t) \rangle \otimes \langle 1, b(t) \rangle$ *et* X *comme ci-dessus:*

(i) *Si* X *possède un* 0*-cycle de degré impair* (*donc un point fermé de degré résiduel impair*), $K_\Phi^*/D_K(\Phi) = 0$;

(ii) *Si* k *est un corps* $\mathfrak{p}$*-adique*, $K_\Phi^*/D_K(\Phi) = 0$;

(iii) *Si* k *est le corps des réels*, $K_\Phi^*/k_\Phi^* \cdot D_K(\Phi) = 0$;

(iv) *Si* k *est un corps de nombres*, $K_\Phi^*/k_\Phi^* \cdot D_K(\Phi) = 0$.

La démonstration de (i) utilise un peu de géométrie et des cas particuliers des Propositions 2 et 3 du présent article (ainsi motivées; cf. aussi Remarque 4). La démonstration de (ii) est celle du Corollaire 1(iv). Celle donnée pour (iii) [4, pp. 439–440] utilise de la géométrie et un cas particulier de la Proposition 1: la Proposition 6 fournit une autre démonstration, sans géométrie. Pour (iv), voir Proposition 7 et Remarque 2.

Voici un résultat positif supplémentaire:

PROPOSITION 11. *Soit* $a \in k^*$, *et soit* $b \in k[t]$, *non nul, de degré* $\leqslant 2$. *L'énoncé* (E) *vaut pour* $\Phi = \langle 1, a \rangle \otimes \langle 1, b \rangle$.

Démonstration. Pour surface associée X, de modèle affine

$$y^2 + az^2 + b(t) = 0,$$

on peut prendre une surface fibrée en coniques d'invariant $r \leqslant 2$ (l'invariant r est le nombre de fibres géométriques dégénérées — cf. [2, 1.2]; pour les modèles, cf. [2, p. 326] ou [3, p. 176]). Il résulte alors de [2, Théorème C], que tout 0-cycle sur X de degré $\geqslant 0$ est rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif, donc tout 0-cycle de degré 0 est rationnellement équivalent à 0, soit $A_0(X) = 0$. L'énoncé résulte alors de la suite exacte (3.1).

Remarque 7. La même démonstration montre que pour toute quadrique lisse X dans $\mathbb{P}_k^3$, avec ou sans point rationnel, $A_0(X) = 0$; pour une telle surface on a d'ailleurs aussi $H^1(k, S) = 0$, car Pic $\bar{X}$ est un G-module de permutation.

Nous allons maintenant donner des contre-exemples à (E) pour $n = 2$.

Comme ceux du Paragraphe 2 pour $n=1$, ils seront "minimaux" compte tenu des résultats positifs obtenus.

Contre-exemple à (E), *dans le cas* $n=2$, *avec* $k=\mathbb{Q}_p((X))$. Soit p un nombre premier impair et soit $k=\mathbb{Q}_p((X))$ le corps des séries formelles à une variable sur $\mathbb{Q}_p$. Considérons

$$\Phi = \langle\langle -X, -p(t^2-u)(t^2-p)\rangle\rangle,$$
$$f = u(t^2-p),$$

avec $u \in \mathbb{Z}_p^*$, et u non carré.

Nous allons montrer que la $k(t)$-forme $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vient de k, mais qu'il n'existe pas $a \in k^*$ tel que $f \cdot \Phi$ soit $k(t)$-isomorphe à $a \cdot \Phi$.

Pas 1. La forme $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vient de k. Il suffit (cf. (1.1)) de calculer les seconds résidus en (t^2-p) et (t^2-u):

$$\partial_{2,t^2-u}(f \cdot \Phi \perp -\Phi) = \langle 1, -X\rangle \otimes p \cdot \langle u-p, -u\rangle \in W(\mathbb{Q}_p((X))(\sqrt{u})),$$
$$\begin{aligned}\partial_{2,t^2-p}(f \cdot \Phi \perp -\Phi) &= \langle 1, -X\rangle \otimes \langle u, p(p-u)\rangle \\ &= \langle 1, -X\rangle \otimes \langle u, p-u\rangle \in W(\mathbb{Q}_p((X))(\sqrt{p}))\end{aligned}$$

qui sont tous deux nuls, car $(u-p)/u$ est un carré dans $\mathbb{Q}_p^*$.

Pas 2. La k-forme dont vient $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ n'est pas nulle dans $W(k)$. Pour calculer cette k-forme, appelons-la q, il suffit par exemple de faire $t=0$ dans Φ:

$$q = \langle 1, -X\rangle \otimes \langle 1, -u\rangle \otimes \langle -1, -up\rangle,$$

soit encore, tenant compte de $I^3\mathbb{Q}_p = 0$ et du fait que $I^2\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}/2$ est engendré par $\langle\langle -u, -p\rangle\rangle$:

$$q = \langle 1, -X\rangle \otimes \langle 1, -u\rangle \otimes \langle 1, -p\rangle.$$

Pas 3. Si $a \in k^*$ est tel que $a \cdot \Phi \perp -\Phi$ vient de k, alors $a \cdot \Phi$ et Φ sont $k(t)$-isomorphes: ce troisième pas permet de conclure.

Si $a \cdot \Phi \perp -\Phi$ vient de k, on a:

$$\begin{aligned}0 &= \partial_{2,t^2-u}(a \cdot \Phi \perp -\Phi) \\ &= p(u-p) \cdot \langle 1, -a\rangle \otimes \langle 1, -X\rangle \in W(\mathbb{Q}_p((X))(\sqrt{u})),\\ 0 &= \partial_{2,t^2-p}(a \cdot \Phi \perp -\Phi) \\ &= (p-u) \cdot \langle 1, -a\rangle \otimes \langle 1, -X\rangle \in W(\mathbb{Q}_p((X))(\sqrt{p})).\end{aligned}$$

Ainsi, a est une norme de l'extension $\mathbb{Q}_p((X))(\sqrt{u})(\sqrt{X})/\mathbb{Q}_p((X))(\sqrt{u})$, c'est-à-dire de $\mathbb{Q}_p(\sqrt{u})((X))(\sqrt{X})/\mathbb{Q}_p(\sqrt{u})((X))$, et c'est une norme de

$\mathbb{Q}_p((X))(\sqrt{p})(\sqrt{X})/\mathbb{Q}_p((X))(\sqrt{p})$, soit de $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})((X))(\sqrt{X})/\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})((X))$. Mais on a le lemme facile:

LEMME. *Soit L un corps (car. $L \neq 2$). Si $a \in L^*$ est une norme de l'extension $L((X))(\sqrt{X})/L((X))$, c'est un carré dans L^*.*

Par ailleurs, pour $k = \mathbb{Q}_p((X))$, le quotient k^*/k^{*2} est d'ordre 8, engendré par les classes de u, de p, et de $(-X)$. Pour déterminer le sous-groupe k_Φ^* de k^* formé des a tels que $a \cdot \Phi \perp -\Phi$ vienne de k, sous-groupe qui contient k^{*2}, il suffit d'examiner des représentants de k^*/k^{*2}. Il est clair que $(-X)$ est dans k_Φ^*, car $(-X)$ est représenté par la forme de Pfister Φ, et donc $(-X) \cdot \Phi \simeq \Phi$ sur $k(t)$. Par contre, si u était dans k_Φ^*, d'après le Lemme et le calcul le précédant, u serait un carré dans $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$, ce qu'il n'est pas. De même, p n'est pas dans k_Φ^*, sinon p serait un carré dans $\mathbb{Q}_p(\sqrt{u})$, ce qu'il n'est pas: les extensions quadratiques $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$ et $\mathbb{Q}_p(\sqrt{u})$ de $\mathbb{Q}_p$ sont distinctes, et elles sont aussi distinctes de $\mathbb{Q}_p(\sqrt{pu})$, ce qui permet de voir de la même façon que up n'est pas dans k_Φ^*. Ainsi k_Φ^*/k^{*2} est engendré par $(-X)$, et $(-X) \cdot \Phi \simeq \Phi$ sur $k(t)$: le troisième pas est terminé.

Avec les notations de la Proposition 5, on voit qu'ici l'injection $K_\Phi^*/D_K(\Phi) \hookrightarrow I^3k/I^4k \simeq \mathbb{Z}/2$ est un isomorphisme, un générateur de $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ étant donné par f. Mais l'image de $k_\Phi^*/k^{*2} \simeq \mathbb{Z}/2$ dans $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ est réduite à zéro.

Autres contre-exemples à (E) *pour* $n = 2$. (1) Le contre-exemple ci-dessus en donne un sur $k = \mathbb{Q}(X)$: choisissons $p = 3$ et $u = -1$. Le même calcul qu'au pas 1 ci-dessus montre que tous les seconds résidus de $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ sont nuls ($\langle -4, 1\rangle$ est certainement nul). Ainsi, $f \cdot \Phi \perp -\Phi$ vient de $k = \mathbb{Q}(X)$. Mais il n'existe pas $a \in \mathbb{Q}(X)^*$ tel que $f \cdot \Phi$ et $a \cdot \Phi$ soient $k(t)$-isomorphes, puisque ce n'est déjà pas vrai sur $\mathbb{Q}_3((X))$.

Ceci donne des contre-exemples sur tout corps compris entre $\mathbb{Q}(X)$ et $\mathbb{Q}_3((X))$, par exemple $\mathbb{Q}_3(X)$ et $\mathbb{Q}((X))$.

(2) On peut aussi fabriquer des contre-exemples sur tout corps k intermédiaire entre $\mathbb{C}(X, Y, Z)$ (corps des fractions rationnelles à trois variables sur les complexes) et le corps des séries formelles itérées $\mathbb{C}((X))((Y))((Z))$, en utilisant

$$\Phi = \langle\langle -Z, -Y(t^2 - X)(t^2 - Y)\rangle\rangle,$$

$$f = (X - Y)(t^2 - Y).$$

Le principe des calculs est analogue au précédent. On a, pour $k = \mathbb{C}((X))((Y))((Z))$,

$$I^3k/I^4k = I^3k \simeq \mathbb{Z}/2;$$

il s'agit là encore d'un contre-exemple "minimal." Sur ce dernier corps, on peut d'ailleurs aussi prendre $f = X(t^2 - Y)$.

Remarques finales. Comme on a pu le voir, l'étude de l'énoncé (E) suscite un jeu à plusieurs partenaires (peut-on en imaginer d'autres?) qu'on peut représenter ainsi:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \text{Formes de Pfister sur } k(t) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{Revêtements doubles de } \mathbb{P}^1_k & & k\text{-surfaces fibrées en coniques sur } \mathbb{P}^1_k \\ \cap & & \cap \\ k\text{-courbes} & & k\text{-surfaces rationnelles.} \end{tikzcd}$$

On a le tableau suivant, où C est comme au Paragraphe 2, et X comme au Paragraphe 3 (ou en [4]):

n-formes de Pfister sur $k(t)$	revêtements doubles de $\mathbb{P}^1_k$ $(n=1)$	k-surfaces fibrées en coniques sur $\mathbb{P}^1_k$ $(n=2)$
$K^*_\Phi/D_K(\Phi)$	$H^1(G, \bar{k}(C)^*/\bar{k}^*)$ $= \operatorname{Ker}(\operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} k(C))$	$H^1(G, K_2\bar{k}(X)/K_2\bar{k})$
$K^*_\Phi/k^*_\Phi \cdot D_K(\Phi)$		$\operatorname{Ker}(A_0(X) \to H^1(k, S))$
k^*_Φ	$\operatorname{Ker}\left(k^* \to \prod_i k_i^*/k_i^{*2}\right)$	$\operatorname{Ker}\left(k^* \to \prod_i k(y_i)^*/Nk(x_i)^*\right)$

(pour la dernière ligne, cf. Remarque 5, et [4, Proposition 2]).

Un énoncé dans une colonne en suggère un autre dans les autres; se posent les questions de démontrer ce nouvel énoncé, respectivement de le démontrer sans passer par une autre colonne. Ainsi:

(a) Pour $C(k) \neq \varnothing$, et C une k-courbe (lisse) quelconque, on sait $H^1(G, \bar{k}(C)^*/\bar{k}^*) = 0$ (cf. Corollaire 2(iii)); on connaît la version "formes de Pfister" de ce résultat (cf. Remarque 4) pour tout n (Propositions 2 et 3); mais on doit pour l'instant passer par là pour obtenir $H^1(G, K_2\bar{k}(X)/K_2\bar{k}) = 0$ pour une k-surface X fibrée en coniques sur $\mathbb{P}^1_k$ avec $X(k) \neq \varnothing$, alors qu'on aimerait obtenir ce résultat pour toute k-surface rationnelle avec $X(k) \neq \varnothing$.*

(b) Supposons k de type fini sur $\mathbb{Q}$. Pour $n = 1$, la géométrie (Corollaire 2(v)) permet de montrer que $K^*_\Phi/k^*_\Phi \cdot D_K(\Phi)$ est un groupe fini

* *Note ajoutée sur épreuves*: Ce résultat a été établi depuis, cf. J.-L. Colliot-Thélène, Hilbert's Theorem 90 for K_2, with Application to the Chow Groups of Rational Surfaces, *Invent. Math.* **71** (1983), 1–20.

(en fait $K_\Phi^*/D_K(\Phi)$ est fini, au moins pour Φ ne venant pas de k); s'il en était de même dans le cas $n=2$, on obtiendrait la finitude de $A_0(X)$ pour X surface fibrée en coniques sur $\mathbb{P}_k^1$ (sans supposer, comme en [4], que X admet un 0-cycle de degré 1).

(c) Soit $\Phi = \langle 1, a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_n \rangle$, avec $a_2, ..., a_n$ dans k^* et $a_1 \in k[t]$, polynôme irréductible du second degré. L'énoncé (E) vaut-il pour Φ? La géométrie nous a permis de le voir pour $n=1$ (Proposition 9) et pour $n=2$ (Proposition 11).

(d) Peut-on établir le cas $n=2$ de la Proposition 7 sans passer par la géométrie?

(e) Pour terminer, notons que la difficulté à suivre explicitement les isomorphismes relevée dans le cas $n=1$ à la Remarque 6(b) se retrouve dans le cas $n=2$. Ainsi, pour le contre-exemple donné en (2) sur le corps $k = \mathbb{C}((X))((Y))((Z))$, on peut établir $H^1(k, S) = 0$ en utilisant [4, 2.4 et 2.5]. Comme on a $K_\Phi^*/k_\Phi^* \cdot D_K(\Phi) = \mathbb{Z}/2$, on obtient $A_0(X) = \mathbb{Z}/2$. *Question*: exhiber un générateur!

Références

1. S. Bloch, On the Chow groups of certain rational surfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **14** (1981), 41–59.
2. J.-L. Colliot-Thélène et D. Coray, L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques, *Compositio Math.* **39** (1979), 301–332.
3. J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray, et J.-J. Sansuc, Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles, *J. Reine Angew. Math.* **320** (1980), 150–191.
4. J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, On the Chow groups of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch, *Duke Math. J.* **48** (1981), 421–447.
5. T.-Y. Lam, "The Algebraic Theory of Quadratic Forms," Benjamin, New York, 1973.
6. S. Lichtenbaum, The period-index problem for elliptic curves, *Amer. J. Math.* **90** (1968), 1209–1223.
7. S. Lichtenbaum, Duality theorems for curves over p-adic fields, *Invent. Math.* **7** (1969), 120–136.
8. J. Milnor, Algebraic *K*-theory and quadratic forms, *Invent. Math.* **9** (1970), 318–344.
9. P. Roquette, Splitting of algebras by function fields of one variable, *Nagoya Math. J.* **27** (1966), 625–642.
10. J.-P. Serre, "Corps locaux," (2ème éd.), Hermann, Paris, 1968.

Printed by the St. Catherine Press Ltd., Tempelhof 41, Bruges, Belgium