GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles.* Note (*) de **Jean-Louis Colliot-Thélène** et **Friedrich Ischebeck,** présentée par Jean-Pierre Serre.

On présente une extension en dimension quelconque d'un théorème de Witt sur les courbes réelles. Comme application, on obtient en particulier que deux points réels d'une $\mathbb{R}$-variété X projective, lisse, connexe et $\mathbb{C}$-rationnelle, sont rationnellement équivalents sur X si et seulement s'ils sont dans la même composante connexe de $X(\mathbb{R})$. Les résultats valent sur un corps réel clos quelconque.

We study rational equivalence on 0-cycles of real algebraic varieties. We get higher-dimensional analogues of Witt's classical results. As a corollary, we prove that two real points of a smooth, projective, connected, $\mathbb{C}$-rational real variety X *are rationally equivalent if and only if they lie in the same connected component of* $X(\mathbb{R})$.

1. RAPPELS ET NOTATIONS. — Soit k un corps et X une k-variété algébrique. On note $Z_0(X)$ le groupe abélien libre sur les points fermés de X (groupe des 0-cycles). Le (k-)degré d'un 0-cycle $\Sigma\, n_M[M]$ est défini par linéarité à partir de $\deg([M])=\dim_k k(M)$ pour le 0-cycle [M] associé au point fermé M de corps résiduel $k(M)$. On note $\tilde{Z}_0(X)$ le sous-groupe de $Z_0(X)$ formé des 0-cycles de degré 0. On note $A_0(X)$, resp., pour X propre, $\tilde{A}_0(X)$, le quotient de $Z_0(X)$, resp. $\tilde{Z}_0(X)$, par l'équivalence rationnelle, telle que définie par W. Fulton [1], dont nous utilisons les notations. Soit R un corps réel clos (« corps ordonné maximal », dans la terminologie de N. Bourbaki), et soit X une R-variété. Un point fermé P de X est appelé réel ou complexe selon que $\dim_R R(P)$ vaut 1 ou 2. Les points réels sont identifiés aux points de $X(R)$ (points R-rationnels). Deux points P et Q de $X(R)$ sont dits liés s'ils sont égaux ou s'il existe une R-courbe lisse D, un R-morphisme propre $\pi : D \to X$, et, sur $D(R)$, un intervalle fermé [A, B] (*cf.* [2], § 1), tels que $\pi(A)=P$ et $\pi(B)=Q$. Deux points de $X(R)$ sont dits dans la même composante (par arcs) de $X(R)$ s'il existe une suite finie $P=P_0, P_1, \ldots, P_n=Q$ de points de $X(R)$ tels que P_i et P_{i+1} soient liés. Cette notion a été étudiée par Knebusch et Delfs ([2], [3]), qui ont montré que $X(R)$ n'a qu'un nombre fini de composantes, nombre noté s dans la suite (*cf.* [3], th. 4.1), et que ces composantes sont ouvertes pour la topologie forte (définie par l'ordre de R : *cf.* [3], th. 4.3). Dans le cas où R est le corps $\mathbb{R}$ des réels ordinaires, la notion d'intervalle sur $D(\mathbb{R})$, pour D une $\mathbb{R}$-courbe lisse, coïncide avec la notion usuelle : les composantes de $X(\mathbb{R})$ ne sont donc alors que les composantes connexes usuelles. Dans le cas $R=\mathbb{R}$, et au moins pour $X/\mathbb{R}$ lisse, le théorème des fonctions implicites permet d'obtenir rapidement l'équivalence des deux définitions : on n'a pas alors besoin de la théorie fine de Knebusch [2].

2. CARACTÉRISATION DES COMPOSANTES DE $X(R)$, POUR X/R PROPRE, AU MOYEN DE L'ÉQUIVALENCE RATIONNELLE. — 2.0. Soit $\pi : X \to Y$ un R-morphisme propre de R-variétés, et soit P un point fermé de X. Si P est réel, $\pi(P)$ l'est aussi, et $\pi_*([P])=[\pi(P)]$. Si P est complexe, et $\pi(P)$ réel, $\pi_*([P])=2[\pi(P)]$. Si P et $\pi(P)$ sont complexes, $\pi_*([P])=[\pi(P)]$.

LEMME 2.1. — *Soit* $\pi : D \to X$ *un* R-*morphisme (propre) d'une* R-*courbe propre, lisse et intègre* D *dans une* R-*variété propre* X. *Soit* $g \in R(D)$ *une fonction rationnelle non nulle sur* D, *et soit* $\mathrm{div}_D(g)$ *son diviseur. Le* 0-*cycle* $\pi_*(\mathrm{div}_D(g))=\Sigma\, n_M[M]$ *a la propriété suivante : si* B *est une composante de* $X(R)$, *la somme des* n_M *pour* M *réel dans* B *est paire.*

Démonstration. — En utilisant 2.0 et le fait que π respecte les composantes (par arcs), on se restreint au cas où π est l'identité de D, établi dans [2], th. 3.4 (et évident quand $R=\mathbb{R}$).

THÉORÈME 2.2. — *Soit* X *une* R-*variété propre. Pour* P *et* Q *dans* X(R), *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) P *et* Q *sont dans la même composante de* X(R);

(ii) *le* 0-*cycle* [P]−[Q] *est, sur* X, *rationnellement équivalent à un* 0-*cycle* $\Sigma\, n_M [M]$, *avec* n_M *pair lorsque* M *est un point réel.*

Démonstration. — (i) ⇒ (ii). On peut supposer $P \neq Q$ et P et Q liés. Puisque X est propre, on dispose d'une R-courbe propre lisse intègre D, d'un intervalle $[A, B] \subset D(R)$ et d'un R-morphisme propre $\pi : D \to X$, avec $\pi(A) = P$ et $\pi(B) = Q$. Les résultats de Witt sur les courbes réelles s'étendent ([2], th. 4.5) : le 0-cycle [A]−[B] est, sur D, rationnellement équivalent à un 0-cycle du type indiqué en (ii); d'après 2.0, il en est de même de $[P]-[Q] = \pi_*([A]-[B])$ sur X.

(ii) ⇒ (i). Si le 0-cycle [P]−[Q] est rationnellement équivalent à un 0-cycle du type indiqué en (ii), le lemme 2.1 montre que le 0-cycle [P]−[Q] est *égal* à un 0-cycle du type indiqué dans le lemme : ceci n'est possible que si P et Q sont dans la même composante.

2.3. On voit ainsi que pour X/R propre, deux points réels de X qui sont rationnellement équivalents sont dans la même composante. Le lemme 2.1 permet également de montrer que si $P_1, \ldots, P_s$ sont des points réels de la R-variété propre X situés dans des composantes distinctes deux à deux, le 0-cycle $P_1 + \ldots + P_{s-1} - P_s$, de degré $(s-2)$, n'est pas rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif.

3. APPLICATIONS. — 3.0. Soit X une R-variété, soit $C = R(\sqrt{-1})$, et soit $\pi : X_C = X \times_R C \to X$ la projection naturelle, qui est un R-morphisme propre. On peut ici compléter 2.0 : si M est un point fermé réel, resp. complexe, de X, il existe un point fermé P de X_C avec $\pi(P) = M$, et $\pi_*([P]) = 2[M]$, resp. $\pi_*([P]) = [M]$. Pour $z \in Z_0(X_C)$, on a $\deg_R(\pi_*(z)) = 2 \deg_C(z)$.

PROPOSITION 3.1. — *Soit* X *une* R-*variété propre, et soit s le nombre de composantes connexes de* X(R). *Le groupe* $A_0(X)/\pi_* A_0(X_C)$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/2)^s$. *Le groupe* $\tilde{A}_0(X)/\pi_* \tilde{A}_0(X_C)$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/2)^{s-1}$ *si* X(R) *est non vide, est nul sinon.*

Démonstration. — Lorsque X(R) est vide, ceci résulte de 3.0. Supposons X(R) non vide, et soit I l'ensemble des composantes de X(R). Soit θ l'application $\mathbb{Z}$-linéaire surjective de $Z_0(X)$ dans $(\mathbb{Z}/2)^I$ qui envoie un point fermé complexe sur 0 et un point réel sur la fonction caractéristique de sa composante. Le lemme 2.1 montre que θ passe au quotient par l'équivalence rationnelle, et 3.0 montre qu'on obtient même ainsi un homomorphisme surjectif $A_0(X)/\pi_* A_0(X_C) \to (\mathbb{Z}/2)^I$. Que cette application soit injective résulte alors de 3.0 et du théorème 2.2 ((i) ⇒ (ii)). Les assertions sur $\tilde{A}_0(X)$ résultent de la formule sur les degrés indiquée en 3.0.

PROPOSITION 3.2. — *Soit* X *une* R-*variété projective et lisse connexe avec* X(R) *non vide.*

(i) *Le sous-groupe* $\pi_* \tilde{A}_0(X_C)$ *de* $\tilde{A}_0(X)$ *coïncide avec le sous-groupe* $2\tilde{A}_0(X)$; *c'est aussi le plus grand sous-groupe divisible de* $\tilde{A}_0(X)$. *On a* $\tilde{A}_0(X)/2\tilde{A}_0(X) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{s-1}$ *et* $A_0(X)/2A_0(X) \simeq (\mathbb{Z}/2)^s$.

(ii) *Si deux points réels* P *et* Q *de* X *sont dans la même composante de* X(R), *le* 0-*cycle* [P]−[Q] *est rationnellement équivalent à un* 0-*cycle dont le support ne contient que des points complexes.*

Démonstration. — C'est une conséquence connue d'un théorème de Bertini que le groupe $\tilde{A}_0(X_C)$ est divisible. On a donc :

$$\pi_* \tilde{A}_0(X_C) = \pi_*(2\tilde{A}_0(X_C)) = 2\pi_* \tilde{A}_0(X_C) \subset 2\tilde{A}_0(X).$$

De 3.0 résulte $2\tilde{A}_0(X) \subset \pi_* \tilde{A}_0(X_C)$. Comme ce dernier groupe est divisible, puisque $\tilde{A}_0(X_C)$ l'est, la proposition 3.1 suffit alors à établir (i). Le (ii) est un raffinement de 2.2. Pour l'obtenir, il suffit de voir que pour P point réel de X, le 0-cycle 2 [P] est rationnellement équivalent à un 0-cycle du type indiqué. C'est connu quand X est une courbe (*cf.* [2], 2.14 ou [4]) : pour se ramener à ce cas, on peut soit invoquer Bertini sur R, soit plus simplement utiliser un raffinement de [2], *loc. cit.*, sur la désingularisée d'une courbe intègre tracée sur X ayant un point lisse en P.

PROPOSITION 3.3. — *Soit* X *une* R-*variété projective et lisse, géométriquement intègre,* C-*rationnelle, avec* $X(R) \neq \emptyset$. *Deux points réels de* X *sont rationnellement équivalents si et seulement s'ils sont dans la même composante de* X(R). *Le groupe* $\tilde{A}_0(X)$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/2)^{s-1}$.

Démonstration. — Rappelons que pour X comme ci-dessus (X est dite C-rationnelle si le corps des fractions de X_C est transcendant pur sur C), le groupe $\tilde{A}_0(X_C)$ est nul. L'énoncé résulte alors de 3.1.

4. REMARQUES. — La démarche présentée dans cette Note a été développée dans [4], où l'on donne également des informations sur l'équivalence rationnelle des diviseurs sur les variétés réelles. Les résultats obtenus ici améliorent ceux de [5] et [6] à plusieurs égards : énoncés valables dans le cas propre non nécessairement lisse, énoncés valables sur un corps réel clos quelconque, ce que l'utilisation du théorème de Stone-Weierstrass dans [5] et [6] ne permet pas d'obtenir. Même dans le cas projectif et lisse sur $\mathbb{R}$, les résultats sont meilleurs (comparer [6], 3.2 avec 3.3 ci-dessus) : ceci tient principalement à la caractérisation (Knebusch-Delfs) des composantes connexes de $X(\mathbb{R})$ comme composantes par arcs (algébriques) et secondairement à l'utilisation de la définition de Fulton ([1], 1.8) de l'équivalence rationnelle, plus souple que la définition classique ([1], 2.2) utilisée dans [5]. Partant de cette nouvelle définition, on obtient d'ailleurs une autre démonstration du théorème 4.3 de [5] en utilisant la :

PROPOSITION. — *Soit* C *une k-courbe propre lisse intègre et* Φ *une forme de Pfister sur le corps k. Soit* $f \in k(C)^*$ *une fonction rationnelle qui, partout semi-localement sur* C, *s'écrit comme le produit d'une unité par un élément de* $k(C)^*$ *représenté par* Φ *sur* $k(C)$. *Si* $g \in k(C)^*$ *a un diviseur* $\Sigma\, n_M [M]$ *étranger à celui de f, alors le produit de normes :*

$$\prod_M N_{k(M)/k}(f(M))^{n_M},$$

est un élément de k^* *représenté par* Φ *sur k.*

(*) Remise le 27 avril 1981.

[1] W. FULTON, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 45, 1975, p. 147-167.
[2] M. KNEBUSCH, *Math. Z.*, 150, 1976, p. 49-70.
[3] H. DELFS et M. KNEBUSCH, *Math. Z.*, 177, 1981, p. 107-129.
[4] F. ISCHEBECK, *Reelle Divisoren und Nullzyklen*, Vorabdruck, Münster, 1979.
[5] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, *Bull. Soc. math. France*, 106, 1978, p. 113-151.
[6] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, *Bull. Soc. math. France*, 108, 1980, p. 213-227.

J.-L. C.-T. : C.N.R.S., *Mathématiques*, Bât. 425, *Université de Paris-Sud*, 91405 *Orsay*;
F. I. : *Mathematisches Institut, Roxeler Strasse* 64, D-4400 *Münster*.