GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres.* Note (*) de **Jean-Louis Colliot-Thélène** et **Jean-Jacques Sansuc**, transmise par M. Jean-Pierre Serre.

Pour une variété rationnelle définie sur un corps de nombres, les torseurs universels [(1), (2)] fournissent une analyse systématique des obstructions connues au principe de Hasse (3) et à l'approximation faible, et la première descente (2) se réduit à l'étude d'un nombre fini de torseurs universels.

The technique of universal torsors is applied to rational varieties over number fields*: Hasse principle, weak approximation, first descent.*

NOTATIONS. — On conserve les notations et conventions de [(1), (2)], mais, ici, k désigne un corps de nombres. Soit Ω_k l'ensemble des places de k. Si $v \in \Omega_k$, on note k_v le complété de k en v et $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\, k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ l'invariant local. Si M est un $\mathfrak{g}$-module continu et Σ une partie de Ω_k, on note $Ш^i_\Sigma(k, \mathrm{M})$ le noyau de la restriction $\mathrm{H}^i(k, \mathrm{M}) \to \prod_{v \notin \Sigma} \mathrm{H}^i(k_v, \mathrm{M})$ et on pose $Ш^i(k, \mathrm{M}) = Ш^i_\varnothing(k, \mathrm{M})$. Étant donné un k-tore S, on désigne par $Ч^1(k, \mathrm{S})$ le conoyau de la restriction $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{S}) \to \coprod_v \mathrm{H}^1(k_v, \mathrm{S})$ et, pour $v \in \Omega_k$, par τ_v l'application duale de la restriction de groupes abéliens finis $\mathrm{H}^1(k, \hat{\mathrm{S}}) \to \mathrm{H}^1(k_v, \hat{\mathrm{S}})$. Les dualités locales et globale de Tate-Nakayama (4) définissent alors la suite exacte naturelle

$$0 \to Ч^1(k, \mathrm{S}) \xrightarrow{\Sigma\tau_v} \mathrm{H}^1(k, \hat{\mathrm{S}})^\sim \to Ш^2(k, \mathrm{S}) \to 0,$$

où l'on désigne par $\sim$ la dualité des groupes abéliens finis.

Soit X une k-variété. Pour $v \in \Omega_k$, on pose $\mathrm{X}_v = \mathrm{X} \times_k k_v$. Soit Br X le groupe de Brauer étale $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbf{G}_m)$. Pour X rationnelle, complète et lisse, il coïncide avec le groupe des classes d'algèbres d'Azumaya sur X et $\mathrm{Br}\,\mathrm{X}/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\,k) = \mathrm{H}^1(k, \mathrm{Pic}\,\overline{\mathrm{X}})$. Soient K/k une extension de corps, $\mathrm{P} \in \mathrm{X}(\mathrm{K})$ et S un k-tore : on note $\mathrm{A}(\mathrm{P}) \in \mathrm{Br}\,\mathrm{K}$ la valeur en P d'un élément A de Br X et $\mathscr{T}(\mathrm{P})$ la classe dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathrm{S})$ de la fibre en P d'un torseur $\mathscr{T}$ sur X sous S. Soient $a \in \mathrm{Z}^1(k, \mathrm{S})$, de classe α dans $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{S})$, et $\mathscr{T}^a$ le torseur déduit de $\mathscr{T}$ par torsion par a. La condition $\mathscr{T}^a(\mathrm{K}) = \varnothing$ ne dépend que de α et de la classe de $\mathscr{T}$, ce qui donne un sens à l'expression, *a priori* abusive, $\mathscr{T}^\alpha(\mathrm{K}) = \varnothing$.

I. OBSTRUCTIONS AU PRINCIPE DE HASSE. — Dans tout ce paragraphe, X désigne une variété de $\mathscr{R}^c_k$ possédant partout localement un point rationnel. On considère un k-tore S et un élément λ de $\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(\hat{\mathrm{S}}, \hat{\mathrm{S}}_0)$.

PROPOSITION 1. — *Chacune des conditions ci-dessous est une obstruction à l'existence d'un point rationnel sur* X :

(0_λ) *pour tout torseur* $\mathscr{T}$ *de type* λ, *il existe une place* v *telle que* $\mathscr{T}(k_v) = \varnothing$;

$(0'_\lambda)$ *il n'existe pas de torseur de type* λ;

$(0''_\lambda)$ *il existe un torseur* $\mathscr{T}$ *de type* λ, *et, pour tout* $\alpha \in \mathrm{H}^1(k, \mathrm{S})$, *il existe une place* v *telle que* $\mathscr{T}^\alpha(k_v) = \varnothing$.

L'obstruction (0_λ) équivaut à « $(0'_\lambda)$ *ou* $(0''_\lambda)$ ». L'obstruction (0_{λ_0}) est la plus fine des (0_λ) : on l'appelle *obstruction de Picard au principe de Hasse.* Les obstructions $(0'_{\lambda_0})$ et $(0''_{\lambda_0})$ sont dites respectivement *première* et *seconde* obstruction : la première obstruction n'est autre que l'obstruction élémentaire $\partial(\lambda_0)$ (2); c'est la plus fine des obstructions $(0'_\lambda)$.

PROPOSITION 2. — *La première obstruction coïncide avec l'obstruction de Manin* (5) *associée au noyau de la restriction* $\mathrm{Br}\, X \to \prod_v \mathrm{Br}\, X_v/\mathrm{Br}\, k_v$. *La trivialité de cette obstruction équivaut à l'existence d'un torseur universel.*

En effet, cette obstruction se traduit par la non-nullité de l'élément $\partial(\lambda_0)$ du groupe fini $Ш^2(k, S_0)$, isomorphe, par la dualité de Tate, à $Ш^1(k, \mathrm{Pic}\, \overline{X})^\sim$. Elle équivaut donc aussi à l'existence d'une classe A d'algèbres d'Azumaya sur X, partout localement constante et vérifiant $\sum_v \mathrm{inv}_v(A) \neq 0$ (6).

On appelle *place de bonne réduction* d'un torseur $\mathscr{T}$ sur X sous S toute place finie v telle que $(X, S, \mathscr{T})$ admette, au-dessus de l'anneau local O_v de v, un prolongement $(X', S', \mathscr{T}')$, tel que X' soit un O_v-schéma propre et lisse, S' un O_v-tore et $\mathscr{T}'$ un torseur sur X' sous S'. On note $\Sigma(\mathscr{T})$ l'ensemble fini formé des places à l'infini et des places finies où $\mathscr{T}$ n'a pas bonne réduction. L'assertion ci-dessous montre que le calcul de $(0''_\lambda)$ se ramène à un nombre *fini* de vérifications, vu le libre choix de $\mathscr{T}$ en (i) et (ii) :

PROPOSITION 3. — *L'obstruction* $(0''_\lambda)$ *équivaut à chacune des conditions :*

(i) *il existe un torseur* $\mathscr{T}$ *de type* λ *ayant la propriété suivante : pour tout élément* α *du groupe fini* $Ш^1_{\Sigma(\mathscr{T})}(k, S)$, *il existe* $v \in \Sigma(\mathscr{T})$ *telle que* $\mathscr{T}^\alpha(k_v) = \varnothing$;

(ii) *il existe un torseur* $\mathscr{T}$ *de type* λ, *tel que, pour tout* $(P_v) \in \prod_v X(k_v)$, *on ait*

$$\sum_v \tau_v[\mathscr{T}(P_v)] \neq 0.$$

Soient n un entier, K/k une extension finie, $S = R_{K/k}\, \mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m$ et $\lambda \in \mathrm{Hom}_g(\hat{S}^n, \hat{S}_0)$. L'obstruction $(0''_\lambda)$ peut se calculer au moyen d'algèbres d'Azumaya sur X trivialisées par K/k. D'ailleurs, l'obstruction de Manin associée à Br (X, K) équivaut à l'existence d'une obstruction $(0''_\lambda)$ comme ci-dessus.

THÉORÈME. — *L'obstruction de Picard au principe de Hasse coïncide avec l'obstruction de Manin associée à* Br X. *La trivialité de cette obstruction équivaut à l'existence d'un torseur universel ayant partout localement un point rationnel.*

COROLLAIRE. — *Si* $H^1(k, \mathrm{Pic}\, \overline{X}) = 0$, *il existe un tel torseur sur* X.

Remarque. — La plupart des contre-exemples connus au principe de Hasse s'interprètent, soit au moyen de la première obstruction (6), soit au moyen d'obstructions $(0''_\lambda)$ relatives à un tore $S = R^1_{K/k}\, \mathbf{G}^n_m$ défini par une extension cyclique K/k [(7), (8)] : pour $S = R^1_{K/k}\, \mathbf{G}^n_m$, les calculs sont facilités, même pour K/k finie quelconque, par l'interprétation de $H^1(X, S)$ au moyen des k-fonctions rationnelles dont les diviseurs sont des normes de K-diviseurs [*cf.* (1)].

II. LA PREMIÈRE DESCENTE. — La méthode de la première descente sur une variété X de $\mathscr{R}^c_k$ a été décrite en général en (2). Elle se précise comme suit dans le cas d'un corps de nombres :

(*a*) s'il existe une place v de k telle que $X(k_v) = \varnothing$, *a fortiori* $X(k) = \varnothing$;

(*b*) sinon, la non-trivialité de l'obstruction de Picard au principe de Hasse implique encore $X(k) = \emptyset$;

(*c*) sinon, il existe, à isomorphisme de torseurs près, un nombre *fini*, non nul, de torseurs universels $\mathcal{T}_i \xrightarrow{p_i} X$ ayant partout localement un point rationnel. Ces torseurs fournissent une partition finie $\{ p_i [\mathcal{T}_i(k)] \}$ de $X(k)$. Par analogie avec la théorie des courbes elliptiques, on appelle cet ensemble fini de torseurs l'*ensemble de Selmer* de X.

L'itération de cette méthode à des k-compactifiées lisses X_i des $\mathcal{T}_i$ ne donne rien : d'après le paragraphe 1 et le théorème 1 de (2), les obstructions usuelles au principe de Hasse sont triviales sur les X_i. On voit de même qu'on manque d'obstructions pour voir si les variétés associées par Manin (9) aux surfaces de Châtelet ont, ou non, un point rationnel.

III. L'APPROXIMATION FAIBLE. — Soit Z une k-variété possédant un point rationnel : on dit qu'elle vérifie l'*approximation faible* lorsque $Z(k)$ est dense dans le produit $\prod_v Z(k_v)$. Dans tout ce paragraphe, X désigne une variété de $\mathcal{R}_k^c$ ayant un point rationnel.

PROPOSITION 4. — *Soit* X *comme ci-dessus. On suppose qu'il existe un torseur* $\mathcal{T}$ *sur* X *sous un k-tore* S *tel que* $\mathcal{T}(k) \neq \emptyset$ *et que* $\mathcal{T}$ *vérifie l'approximation faible. Il existe alors une partie finie* Σ *de* Ω_k, *telle que* $X(k)$ *soit dense dans le produit* $\prod_{v \notin \Sigma} X(k_v)$.

Cette proposition s'applique par exemple lorsqu'il existe un torseur universel k-rationnel : c'est le cas sur les modèles lisses des surfaces de Châtelet et sur les k-compactifiées lisses des tores.

PROPOSITION 5. — *Soit* X *comme ci-dessus. Si* S *est un k-tore et si* $\lambda \in \mathrm{Hom}_g(\hat{S}, \hat{S}_0)$, *la condition suivante est une obstruction à l'approximation faible pour* X :

(a_λ) *il existe un torseur* $\mathcal{T}$ *de type* λ *et* $(P_v) \in \prod_v X(k_v)$ *tels que* $\sum_v \tau_v [\mathcal{T}(P_v)] \neq 0$.

L'obstruction (a_{λ_0}) *est la plus fine des* (a_λ). *Elle équivaut à la condition :*

(*b*) *il existe* $A \in \mathrm{Br}\, X$ *et* $(P_v) \in \prod_v X(k_v)$, *tels que* $\sum_v \mathrm{inv}_v [A(P_v)] \neq 0$.

Cette dernière obstruction est parfois la seule obstruction à l'approximation faible : c'est le cas pour les groupes algébriques linéaires connexes (10). Elle est triviale si $Ш^1(k, S_0) = 0$, *a fortiori* si $H^1(k, \mathrm{Pic}\, \overline{X}) = 0$.

Exemples. — (*a*) Soient (x, y, z, s, t) les coordonnées homogènes de $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^4$ et X la surface de Del Pezzo de degré 4, intersection lisse dans $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^4$ des deux quadriques d'équations

$$st = x^2 + y^2, \qquad (4t - 3s)(4s - t) = x^2 + z^2.$$

Cette surface X *appartient à* $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}^c$, *possède un point rationnel, mais* $X(\mathbf{Q})$ *n'est pas dense dans* $X(\mathbf{Q}_2)$.

D'abord, $(0, 2, 0, 1, 4) \in X(\mathbf{Q})$. Considérons ensuite l'ouvert U de X défini par $s(4t - 3s)(4s - t) \neq 0$ et la fonction $g = (4s - t)/s$, inversible sur U. Soient $i = \sqrt{-1}$ et $K = \mathbf{Q}(i)$. On voit aisément que, pour toute place $v \neq 2$ et tout $P \in U(\mathbf{Q}_v)$, l'élément $g(P)$ est une norme de $\mathbf{Q}_v(i)/\mathbf{Q}_v$. En revanche, l'ouvert W de $U(\mathbf{Q}_2)$ formé des P tels que $g(P)$ ne soit pas une norme de $\mathbf{Q}_2(i)/\mathbf{Q}_2$ est non vide, car $(1, 1, \sqrt{-15}, 2, 1) \in W$. Or, un point P de $U(\mathbf{Q})$ ne peut appartenir à W, car $g(P)$ ne peut être une norme locale de $\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}$ en toute place $v \neq 2$ sans l'être aussi en 2.

INTERPRÉTATION. — Le diviseur de g est la norme d'un diviseur de X_K. L'équation $g = r^2+w^2$ définit alors [*cf.* (1)] un torseur sur U sous $S = R^1_{K/Q} G_m$ qui se prolonge en un torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S. L'obstruction utilisée dans le calcul ci-dessus n'est autre que $(a_{\lambda(\mathcal{T})})$.

(*b*) Swinnerton-Dyer (7) a donné un exemple de surface X de $\mathcal{R}^c_{\mathbf{Q}}$ telle que $X(\mathbf{Q})$ soit non vide, mais non dense dans $X(\mathbf{R})$. Cet exemple s'interprète de la même manière que l'exemple (*a*).

(*) Séance du 21 mars 1977.

(1) J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976, p. 1113.

(2) J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 967.

(3) Cette Note prolonge, du point de vue des torseurs universels, l'analyse développée, à l'aide du groupe de Brauer, par Yu. I. MANIN, in *Cubic forms*, Nauka, Moscou, chap. VI, 1972 (traduction anglaise North-Holland, Amsterdam, 1974).

(4) J. TATE, *Nagoya Math. J.*, 27, 1966, p. 709-719.

(5) Yu. I. MANIN, *loc. cit.* 1.22 (traduction 41.22).

(6) Cette obstruction a été discutée par Yu. I. MANIN (*loc. cit.* 1.23, trad. 41.23) dans le cas des espaces principaux homogènes de variétés abéliennes et par J.-J. SANSUC (*Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires* (à paraître)) dans le cas des espaces principaux homogènes de groupes linéaires.

(7) H. P. F. SWINNERTON-DYER, *Mathematika*, 9, 1962, p. 54-56.

(8) B. J. BIRCH et H. P. F. SWINNERTON-DYER, *J. reine angew. Math.*, 274/275, 1975, p. 164-174.

(9) *Cf.* MANIN, *loc. cit.*, fin du paragraphe 5 (traduction § 45).

(10) J.-J. SANSUC, *loc. cit.*

E.N.S.,
45, *rue d'Ulm,*
75230 *Paris Cedex* 05.