GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles.* Note (*) de **Jean-Louis Colliot-Thélène** et **Jean-Jacques Sansuc**, transmise par M. Jean-Pierre Serre.

Suite de la Note ([1]). Soit $k$ un corps de caractéristique 0. La *première descente* sur une $k$-variété rationnelle X, lisse et complète, ramène l'étude de plusieurs questions $k$-rationnelles sur X au cas où le module galoisien Pic $\overline{\mathrm{X}}$ est de permutation. Pour une telle variété X, la première descente est inefficace et les invariants birationnels ([2]) liés au module Pic $\overline{\mathrm{X}}$ sont triviaux. Des exemples montrent qu'une telle variété peut néanmoins avoir un point rationnel sans être $k$-rationnelle.

*This Note continues a previous one. Let k be a field of characteristic zero. Let* X *vary among proper smooth k-varieties which are rational over an algebraic closure $\bar{k}$ of k. The* first descent *is a process for reducing several k-rationality questions on* X *(e. g. description of k-points) to the case where the Galois module* Pic $(\mathrm{X}\times_k \bar{k})$ *is a permutation module. For such a variety, the first descent is useless and the k-birational invariants attached to the Picard group are all trivial. However, examples show that there exist such varieties with k-points which are not k-rational.*

NOTATIONS. — On conserve les notations et conventions de ([1]) : $k$ est un corps quelconque, $\bar{k}$ une clôture séparable, $\mathbf{A}_k^n$ (resp. $\mathbf{P}_k^n$) l'espace affine (resp. projectif) de dimension $n$. Une $k$-variété X est dite *rationnelle* lorsqu'elle est $\bar{k}$-rationnelle, *stablement k-rationnelle*, lorsque, pour $n$ convenable, $\mathrm{X}\times_k\mathbf{A}_k^n$ est $k$-rationnelle. On note $\mathscr{R}_k$ la classe des $k$-variétés rationnelles lisses X telles que $\bar{k}[\mathrm{X}]^* = \bar{k}^*$, $\mathscr{R}_k^o$ la classe des X de $\mathscr{R}_k$ telles que Pic $\overline{\mathrm{X}} = 0$, $\mathscr{R}_k^c$ la classe des $k$-variétés rationnelles, lisses et complètes, et $\mathscr{R}_k^p$ la classe des X de $\mathscr{R}_k^c$ telles que le g-module Pic $\overline{\mathrm{X}}$ soit de permutation. Si Pic $\overline{\mathrm{X}}$ est dans $\mathscr{D}_g$, ce qui est le cas pour X dans $\mathscr{R}_k^c$, on note $\mathrm{S}_0$ son dual dans $\mathscr{C}_k$ et $\lambda_0$ le g-morphisme $\mathrm{id}_{\hat{\mathrm{S}}_0}$. Toute $k$-compactifiée lisse ([3]) d'une variété de $\mathscr{R}_k^o$ est dans $\mathscr{R}_k^p$. Si X est $k$-rationnelle, lisse et complète, le g-module Pic $\overline{\mathrm{X}}$ est stablement de permutation, i. e., pour M de permutation convenable, Pic $\overline{\mathrm{X}} \oplus \mathrm{M}$ est de permutation.

## 1. Les variétés de première descente.

PROPOSITION 1. — *Soient* X *une k-variété telle que* $\bar{k}[\mathrm{X}]^* = \bar{k}^*$ *et* S *dans* $\mathscr{C}_k$. *On a la suite exacte naturelle*

$$0 \to \mathrm{H}^1(k, \mathrm{S}) \xrightarrow{i_1} \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{S}) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}_g(\hat{\mathrm{S}}, \mathrm{Pic}\,\overline{\mathrm{X}}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^2(k, \mathrm{S}) \xrightarrow{i_2} \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathrm{S}).$$

*Cette suite est fonctorielle en* S *et tout point de* X $(k)$ *définit des rétractions de* $i_1$ *et* $i_2$.

On appelle *type* d'un torseur $\mathscr{T}$ sur X sous S le g-morphisme $\chi(\mathscr{T}) : \hat{\mathrm{S}} \to \mathrm{Pic}\,\overline{\mathrm{X}}$. Étant donné $\lambda \in \mathrm{Hom}_g(\hat{\mathrm{S}}, \mathrm{Pic}\,\overline{\mathrm{X}})$, il existe un torseur de type $\lambda$, si, et seulement si, $\partial(\lambda) = 0$. En ce cas, l'ensemble des classes de torseurs de type $\lambda$ forme un espace homogène principal sous $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{S})$. Il en est ainsi lorsque X a un point rationnel P : la classe des torseurs de type $\lambda$ et fibre triviale en P est notée $\mathscr{X}_\lambda^{\mathrm{P}}$ et de même, par abus, un tel torseur. Si Pic $\overline{\mathrm{X}}$ est dans $\mathscr{D}_g$, on appelle *variété de première descente*, ou *torseur universel*, tout torseur sur X sous $\mathrm{S}_0$ de type $\lambda_0$. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{X}(k)$, on note $\mathscr{X}_{\lambda_0}^{\mathrm{P}} = \mathscr{X}^{\mathrm{P}}$.

(tr 1) Pour X dans $\mathcal{R}_k^o$ ou $\mathcal{R}_k^p$, tout torseur universel $\mathcal{X}$ est localement trivial pour la topologie de Zariski. Tout point de $\mathcal{X}$ admet un voisinage qui est le produit d'un ouvert de X et d'un ouvert d'un certain $\mathbf{A}_k^n$.

THÉORÈME 1. — *Soient* X *dans* $\mathcal{R}_k^c$, S *un k-tore et* $\mathcal{T}$ *un torseur sur* X *sous* S. *Si le type de* $\mathcal{T}$ *est un isomorphisme,* $\mathcal{T}$ *est dans* $\mathcal{R}_k^o$. *Si c'est une injection à conoyau de permutation, tout k-compactifié lisse de* $\mathcal{T}$ *est dans* $\mathcal{R}_k^p$. *Ainsi, sur* X, *tout torseur universel est dans* $\mathcal{R}_k^o$ *et tout k-compactifié lisse d'un tel torseur est dans* $\mathcal{R}_k^p$.

La démonstration consiste à évaluer $\bar{k}[\bar{\mathcal{T}}]^*$ et Pic $\bar{\mathcal{T}}$. Soient $\mathcal{T} \xrightarrow{q} X \xrightarrow{p} k$ les morphismes structuraux. Une variante étale du lemme de Rosenlicht donne l'extension

$$0 \to \mathbf{G}_{m,X} \to q_* \mathbf{G}_{m,\mathcal{T}} \to p^* \hat{S} \to 0,$$

de faisceaux étales sur X et celle-ci donne, par « intégration », la suite exacte

$$0 \to \bar{k}[\bar{\mathcal{T}}]^*/\bar{k}^* \to \hat{S} \xrightarrow{\lambda} \operatorname{Pic} \bar{X} \to \operatorname{Pic} \bar{\mathcal{T}} \to 0,$$

de g-modules avec *précisément* $\lambda = \chi(\mathcal{T})$.

(tr 2) Les obstructions à la $k$-rationalité (²) liées au module galoisien Pic $\bar{X}$ sont triviales pour un $k$-compactifié lisse X d'un torseur universel sur une variété de $\mathcal{R}_k^c$.

2. APPLICATION A L'EXISTENCE DE POINTS RATIONNELS.

SCHOLIE. — *Soit* X *une variété de* $\mathcal{R}_k$ *telle que* Pic $\bar{X}$ *soit dans* $\mathcal{D}_g$. *Pour tout* S *dans* $\mathcal{C}_k$ *et tout* $\lambda$ *dans* $\operatorname{Hom}_g(\hat{S}, \operatorname{Pic}\bar{X})$, *la non-nullité de* $\partial(\lambda)$ *est une obstruction à l'existence d'un point rationnel pour* X. *L'obstruction* $\partial(\lambda_0) \neq 0$ *est la plus fine : on l'appelle l'obstruction* élémentaire *pour* X.

Cette obstruction $\partial(\lambda_0) \neq 0$ équivaut à la non-trivialité de l'extension de g-modules $0 \to \bar{k}^* \to \bar{k}(X)^* \to \bar{k}(X)^*/\bar{k}^* \to 0$. Dans certains cas, c'est la seule obstruction à l'existence d'un point rationnel : variétés de Severi-Brauer, quadriques dans $\mathbf{P}_k^3$, compactifiées lisses d'espaces homogènes de tores.

PROPOSITION 2. — *Soit* X *une variété de* $\mathcal{R}_k^c$. *La nullité de l'obstruction élémentaire équivaut à l'existence d'un torseur universel. L'existence d'un point rationnel pour* X *équivaut à l'existence d'un torseur universel qui possède un point rationnel. Pour k de dimension cohomologique* $\leq 1$, *il existe un, et un seul* (⁴), *torseur universel sur* X.

Ainsi, en caractéristique 0, le problème de l'existence d'un point rationnel sur X est ramené, si l'obstruction élémentaire est triviale, au cas où X est dans $\mathcal{R}_k^p$.

3. APPLICATION AU PARAMÉTRAGE DES POINTS RATIONNELS.

PROPOSITION 3. — *Soit* X *une variété de* $\mathcal{R}_k^c$ *possédant un point rationnel* P. *Il existe une variété* Y *de* $\mathcal{R}_k^o$, *ou même, en caractéristique* 0, *de* $\mathcal{R}_k^p$, *et un k-morphisme dominant* $\varphi : Y \to X$, *tels que* $\varphi[Y(k)]$ *contienne la* R*-classe de* P. *Si k est de dimension cohomologique* $\leq 1$, *on peut choisir* $\varphi$ *tel que l'application* $Y(k) \to X(k)$ *soit surjective.*

On prend pour Y le torseur $\mathscr{X}^{\mathrm{P}}$ ou un $k$-compactifié lisse convenable. Les résultats du paragraphe 1, joints à la proposition 1 de [1], donnent encore l'assertion suivante :

THÉORÈME 2. — *Soit* X *dans* $\mathscr{R}_k^c$ *telle que* $\mathrm{X}(k) \neq \varnothing$. *Il existe une famille* $\{ \mathrm{Y}_j \}_{j \in \mathrm{J}}$ *de variétés de* $\mathscr{R}_k^o$, *possédant chacune un point rationnel, et des k-morphismes dominants* $\varphi_j : \mathrm{Y}_j \to \mathrm{X}$, *tels que la famille* $\{ \varphi_j [\mathrm{Y}_j (k)] \}$ *constitue une partition de* $\mathrm{X}(k)$. *Cette partition est moins fine que celle donnée par la* R-*équivalence. Elle est finie si k est de type fini sur le corps premier.*

Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{X}(k)$. L'accouplement avec $\mathscr{X}^{\mathrm{P}}$ définit une application $\mathrm{X}(k) \to \mathrm{H}^1(k, \mathrm{S}_0)$ dont l'image J est finie pour $k$ de type fini. Il suffit de considérer une famille $\{ \mathrm{Y}_j \}_{j \in \mathrm{J}}$ de torseurs universels telle que $\mathrm{Y}_j$ ait pour classe $\mathscr{X}^{\mathrm{P}}$-$j$. Ceci revient à prendre un torseur dans chaque classe de torseurs universels ayant un point rationnel.

Ainsi, le problème du paramétrage de $\mathrm{X}(k)$ et celui de la R-équivalence sur $\mathrm{X}(k)$ sont ramenés au cas où X appartient à $\mathscr{R}_k^o$. La méthode réussit au moins lorsque les variétés de première descente ayant un point rationnel sont stablement $k$-rationnelles : c'est le cas pour les surfaces de Châtelet et, en caractéristique 0, pour les $k$-compactifiées lisses des tores [[1], [5]], mais il n'en est pas toujours ainsi (*cf.* § 5). Notons que, pour les $k$-compactifiées lisses des tores, les variétés de première descente ont toutes un point rationnel, mais que ce n'est plus vrai pour les surfaces de Châtelet sur un corps de nombres.

4. LA DESCENTE SUR UNE VARIÉTÉ RATIONNELLE. — Soit X dans $\mathscr{R}_k^c$. En vertu des résultats antérieurs, on peut étudier $\mathrm{X}(k)$ en procédant comme suit :

(*a*) si l'obstruction élémentaire est non triviale, $\mathrm{X}(k) = \varnothing$;

(*b*) sinon, il existe un torseur universel; l'ensemble $\{ \mathscr{X}_i \}$ des classes de tels torseurs est indexé par $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{S}_0)$ et, si aucun d'eux n'a de point rationnel, $\mathrm{X}(k)$ est encore vide;

(*c*) sinon, $\mathrm{X}(k) \neq \varnothing$; la famille $\{ \mathscr{X}_j \}_{j \in \mathrm{J}}$ des classes des torseurs universels ayant un point rationnel définit (*cf.* th. 2) un paramétrage de $\mathrm{X}(k)$ par les points rationnels de variétés de $\mathscr{R}_k^o$ ou même, en caractéristique 0, de $\mathscr{R}_k^p$, par $k$-compactification lisse : on obtient ainsi une minoration de $\mathrm{X}(k)/\mathrm{R}$ par card J et même, si les $\mathscr{X}_j$ vérifient $\mathscr{X}_j(k)/\mathrm{R} = 0$, l'égalité $\mathrm{X}(k)/\mathrm{R} = \mathrm{J}$.

Cette procédure, inspirée du cas des courbes elliptiques [6], constitue la *première descente* sur X. Elle pose à l'égard des $\mathscr{X}_i$ les mêmes questions que celles posées initialement au sujet de X. Ceci invite, au moins en caractéristique 0, à itérer les méthodes utilisées en les appliquant à des $k$-compactifiées lisses $\mathrm{Z}_i$ des $\mathscr{X}_i$. Mais, les $\mathscr{X}_i$ étant dans $\mathscr{R}_k^o$, cette itération ne donne rien : l'obstruction élémentaire pour $\mathrm{Z}_i$ est triviale, les obstructions à la $k$-rationalité de $\mathrm{Z}_i$ liées à $\mathrm{Pic}\, \overline{\mathrm{Z}}_i$ sont triviales [*cf.* (tr 2)] et l'unique [4] torseur universel sur $\mathrm{Z}_i$ n'apporte, vu (tr 1), aucun renseignement.

ASSERTION. — *La descente sur une k-variété rationnelle, lisse et complète, est une opération « en un coup »* [7].

5. DEUX EXEMPLES. — Ils fournissent une réponse *négative* à la question posée à la fin de [1], question qui reste ouverte dans le cas des surfaces.

(*a*) Soient $k = \mathbf{R}$, $m \geqq 2$ et $\{ e_i \}_{1 \leqq i \leqq 2m-1}$ une suite strictement croissante de nombres réels. Soit X la $\mathbf{R}$-variété obtenue par recollement des deux sous-variétés de $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^3 \times_{\mathbf{R}} \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^1$ d'équations $x^2+y^2+z^2 = t^2 . \prod_i (\lambda - e_i)$ et $x^2+y^2+z^2 = \lambda t^2 . \prod_i (1 - e_i \lambda)$, *via* $(x, y, z, t; \lambda) \mapsto (\lambda^{-m} x, \lambda^{-m} y, \lambda^{-m} z, t; \lambda^{-1})$. Cette $\mathbf{R}$-variété rationnelle, lisse et complète, est munie d'une **R**-fibration $X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ à fibres géométriques intègres. On en déduit que Pic $\overline{X}$ est le g-module trivial $\mathbf{Z}^2$.

PROPOSITION 4. — *La variété* X, *de dimension* 3, *appartient à* $\mathscr{R}^p_{\mathbf{R}}$. *Elle a un point rationnel, elle est même* **R**-*unirationnelle, mais n'est pas stablement* **R**-*rationnelle. L'unique* (4) *torseur universel* $\mathscr{X}$ *sur* X *n'est pas stablement* **R**-*rationnel.*

Pour les **R**-variétés Z lisses et complètes, le nombre $s(Z)$ de composantes connexes de Z (**R**), pour la topologie ordinaire, est un invariant des classes d'équivalence **R**-birationnelle stable. Ici, $s(X) = m \geqq 2$ et $\mathscr{X}$ est **R**-birationnellement isomorphe à $X \times_{\mathbf{R}} \mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$. On aurait aussi bien pu utiliser l'invariant [(1), (5)] Z (**R**)/R. L'exemple ci-dessus montre d'ailleurs que la R-équivalence peut être strictement plus fine que celle définie (1) par un torseur universel.

(*b*) Cet exemple montre aussi que, pour une **R**-variété lisse et complète X ayant un point réel, le nombre $s = s(X)$ ne dépend pas seulement du g-module Pic $X_{\mathbf{C}}$. C'est toutefois le cas si X est une courbe (8) et, si X est une surface de $\mathscr{R}^c_{\mathbf{R}}$, on peut conjecturer l'égalité $H^1(\mathbf{R}, \operatorname{Pic} X_{\mathbf{C}}) = \mathbf{Z}_2^{2s-2}$.

(*c*) Soient, en caractéristique 0, un corps gauche D, fini sur son centre $k$, et $G = SL_1(D)$. Platonov (9) a donné un exemple où G ne vérifie pas l'approximation faible. Alors G, quoique dans $\mathscr{R}^o_k$, n'est pas stablement $k$-rationnelle. Il en est de même de l'unique (4) torseur universel sur une $k$-compactifiée lisse de G (10).

(*) Séance du 7 février 1977.

(1) J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976, p. 1113.

(2) *Cf.* (1) proposition 5.

(3) Il en existe en caractéristique 0 d'après Hironaka.

(4) A isomorphisme de torseurs près.

(5) J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 10, n° 2, 1977 (à paraître).

(6) *Cf.* J. W. S. CASSELS, *J. London Math. Soc.*, 41, 1966, p. 193-291, § 4, 23 et 24.

(7) Ceci répond à une question de H. P. F. Swinnerton-Dyer.

(8) Dans ce cas, $H^1(\mathbf{R}, \operatorname{Pic} X_{\mathbf{C}}) = \mathbf{Z}_2^{s-1}$, *cf.* W.-D. GEYER, *Oberwolfach*, 1964, p. 83-98.

(9) V. P. PLATONOV, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 142, 1976, p. 198-207.

(10) L'égalité $G(k)/R = SK_1(D)$, prouvée par Voskresenskiĭ grâce à (9), fournit [*cf.* (5), corollaire de la proposition 11] d'autres exemples dès que $SK_1(D) \neq 0$ (ce qui est possible d'après Platonov).

*E.N.S.*,
45, *rue d'Ulm*,
75230 *Paris Cedex* 05.