GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Surfaces de Del Pezzo de degré* 6. Note (*) de M. **Jean-Louis Colliot-Thélène**, transmise par M. Jean Dieudonné.

Dans ([1]) Manin démontre que les surfaces de Del Pezzo de degré 6 définies sur un corps de nombres satisfont au principe de Hasse. En s'inspirant d'une idée de Swinnerton-Dyer, on donne une démonstration simple de ce théorème.

On désigne par k un corps parfait, par $\bar{k}$ une clôture algébrique fixe de k, et par $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k. On rappelle qu'une k-surface de Del Pezzo de degré 6 est une forme sur le corps k de l'éclatement du plan $P^2_{\bar{k}}$ en trois points non alignés; sur une telle surface, le faisceau anticanonique définit un plongement dans P^6_k; soit Σ la surface ainsi plongée. Les courbes irréductibles exceptionnelles de première espèce sur $\Sigma \times_k \bar{k}$ sont les droites de $P^6_{\bar{k}}$ tracées sur la surface. On sait que leur configuration est celle d'un hexagone (*fig.* 1). Les sommets de l'hexagone représentent les droites, et deux sommets sont liés si et seulement si les droites correspondantes se rencontrent. Le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit continûment sur l'ensemble des droites, et il respecte la forme d'intersection. On obtient ainsi un homomorphisme continu de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ dans le groupe des automorphismes de l'hexagone.

Nous remarquons qu'il existe deux « triplets gauches » : (A, E, C) et (B, D, F), et trois doublets de distance maximale (en un sens évident) : (A, D); (F, C); (B, E). Comme le groupe de Galois respecte la forme d'intersection, il transforme un triplet gauche en un autre triplet gauche, et un doublet de distance maximale en un autre doublet de distance maximale. Nous obtenons donc deux ensembles E_2 et E_3 à deux, respectivement trois éléments, sur lesquels le groupe de Galois opère.

Lemme 1. — *a. Il existe une extension quadratique de k sur laquelle un triplet gauche est défini.*

b. Il existe une extension cubique de k sur laquelle un doublet de distance maximale est défini.

Démonstration de (*b*). — Les orbites de E_3 sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ peuvent être de trois types : une orbite à trois éléments; une orbite à deux éléments et une orbite à un élément; trois orbites à un élément. Dans tous les cas, il existe soit une orbite à un élément, soit une orbite à trois éléments. Donc il existe un doublet de distance maximale défini soit sur k, soit sur une extension cubique de k. Nous ne considérerons que ce dernier cas, le premier s'y ramenant, et étant plus simple.

Prenons maintenant pour k un corps de nombres, et supposons que Σ a des points rationnels dans tous les complétés de k. Soit K, respectivement L, l'extension quadratique, resp. l'extension cubique, obtenues grâce au lemme 1.

LEMME 2. — *a. Les points de* $\Sigma \times_k \mathrm{K}$ *rationnels sur* K *sont denses dans* $\Sigma \times_k \mathrm{K}$.

b. Les points de $\Sigma \times_k \mathrm{L}$ *rationnels sur* L *sont denses dans* $\Sigma \times_k \mathrm{L}$.

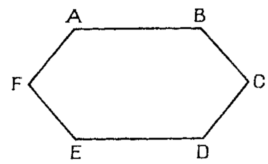

Fig. 1

Démonstration. — *a.* De l'existence d'un triplet gauche défini sur K, on déduit que l'on peut contracter sur $\Sigma \times_k \mathrm{K}$ ce triplet à l'aide d'un K-morphisme. Soit X la K-surface obtenue. C'est une forme sur K de $\mathrm{P}^2_{\mathrm{K}}$. Comme Σ a des points rationnels dans chacun des complétés de k, $\Sigma \times_k \mathrm{K}$ a des points rationnels dans chacun des complétés de K. Il en est donc de même de X. D'après les propriétés connues des variétés de Severi-Brauer, ceci implique que X est K-isomorphe à $\mathrm{P}^2_{\mathrm{K}}$. Comme le morphisme de contraction est birationnel, on obtient le résultat annoncé.

b. Contractons sur $\Sigma \times_k \mathrm{L}$ le doublet défini sur L. Soit Y la L-surface obtenue. C'est une surface de Del Pezzo de degré 8, et en fait, comme il résulte de la considération de la forme d'intersection, une forme de $\mathrm{P}^1_{\mathrm{L}} \times_{\mathrm{L}} \mathrm{P}^1_{\mathrm{L}}$. Ces formes satisfont au principe de Hasse; par ailleurs, une telle forme, si elle a un point rationnel sur L, est L-birationnellement équivalente à $\mathrm{P}^2_{\mathrm{L}}$. Ceci achève la démonstration.

Conservons les notations précédentes : K est une extension quadratique de k, et L une extension cubique. La proposition qui suit, jointe au lemme 2, redonne le théorème de Manin.

PROPOSITION. — *Si sur une surface de Del Pezzo de degré* 6 *définie sur* k *les* K*-points et les* L*-points sont denses, il existe au moins un* k*-point.*

Démonstration. — Soit P un K-point, et Q un L-point. Soient σ_1, σ_2 les deux k-isomorphismes de K dans $\bar{k}$; soient τ_1, τ_2, τ_3 les trois k-isomorphismes de L dans $\bar{k}$. Soit alors une section hyperplane de Σ, définie sur k, et passant par σ_1 P, σ_2 P, τ_1 Q, τ_2 Q, τ_3 Q. Il en existe, car par cinq points dans $\mathrm{P}^6_k(\bar{k})$ il passe un pinceau d'hyperplans, et les cinq points utilisés ici sont globalement rationnels. Si la section de Σ est une courbe irréductible et sans singularités, c'est une courbe de genre 1, définie sur k, et possédant un diviseur rationnel de degré 1 :

$$\tau_1 Q + \tau_2 Q + \tau_3 Q - \sigma_1 P - \sigma_2 P.$$

D'après le théorème de Riemann-Roch, cette courbe a un point rationnel.

Il reste à examiner les différents cas de dégénérescence. On peut supposer les points $\sigma_i P$, $\tau_j Q$ différents les uns des autres (sinon on aurait un point rationnel immédiatement). Fixons un modèle plan de $\Sigma \times_k \bar{k}$, c'est-à-dire

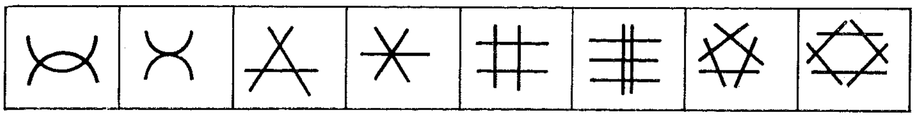

Fig. 2

une contraction $\pi : \Sigma \times_k \bar{k} \to P^2_{\bar{k}}$ envoyant les droites gauches deux à deux l_A, l_B, l_C sur les points non alignés A, B, C. Au moyen de π, on établit une correspondance bijective entre les sections hyperplanes de la surface et les cubiques planes passant par A, B, C. En utilisant cette correspondance, et le fait que les K-points et les L-points sont denses sur Σ, on se ramène aux sections hyperplanes de la figure 2, où les courbes irréductibles dessinées sont toutes de genre arithmétique zéro. Il est alors facile, dans chaque cas, d'étudier les répartitions possibles des $\sigma_i P$ et des $\tau_j Q$ sur les différentes courbes, et d'en déduire, en utilisant le théorème de Riemann-Roch pour une courbe de genre zéro, l'existence d'un point rationnel sur k.

(*) Séance du 24 mai 1972.

(1) Ju I. Manin, *Surfaces rationnelles sur les corps parfaits*, I (*Publications mathématiques de l'I. H. E. S.*, 30, 1966) [traduction anglaise : *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2), 84, 1969].

Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay, Mathématiques,
Bât. 425,
91405 *Orsay,*
Essonne.