**Exercice 0.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On note $\mathcal{A}^2(\Omega)$ l'espace des fonctions $f$ holomorphes dans $\Omega$ telles que $\int_\Omega |f(x+\mathrm{i}y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$. Montrer que si $z \in \Omega$ et $r > 0$ est tel que $B(z,r) \subset \Omega$, alors

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z,r)} f(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Sur $\mathcal{A}^2(\Omega)$ on met le produit scalaire

$$(f,g) = \int_\Omega \overline{f}(x+\mathrm{i}y)g(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Montrer que $\mathcal{A}^2(\Omega)$ muni de $(.,.)$ est un espace de Hilbert.

**Exercice 1.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Soit $E = \{n^{\frac{1}{2}}e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1) Montrer que 0 appartient à la fermeture faible de $E$. (On pourra raisonner par contradiction).

2) Montrer qu'il n'existe pas de sous suite de $\{n^{\frac{1}{2}}e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend faiblement vers 0 (on utilisera le principe de la borne uniforme).

**Exercice 2.** Soit $F \subset L^2([0,1])$ un sous espace vectoriel fermé inclus dans $L^\infty([0,1])$.

1) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$, pour tout $f \in F$.

2) Soit $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille orthonormée de $X$, et $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}$. Posons $f_x = \sum_{i=1}^n x_i f_i$. Soit $D$ un sous ensemble dénombrable dense de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $N \subset [0,1]$, de mesure nulle tel que $|f_x(t)| \leq C\|x\|_2$, pour tous $\notin N$, $x \in D$, où $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$.

3) En déduire que cette inégalité s'étend à $t \notin N$, $x \in \mathbb{C}$.

4) Montrer que $\sum_{i=1}^n \|f_k(t)|^2 \leq C^2$, pour tous $t \notin N$, $x \in \mathbb{C}$. En déduire par intégration sur $t$ que $n \leq C^2$ et donc que $F$ est de dimension finie.

**Exercice 3.** Soit $S, T$ deux opérateurs autoadjoints positifs, compacts tels que $S^p$ et $T^q$ sont à trace pour $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

1) Montrer que $(S^2u, u)^{p/2} \leq (S^p u, u)$, $\forall u \in \mathcal{H}$. (On pourra diagonaliser $S$ et utiliser la convexité de la fonction $t \to t^{p/2}$) 2) Soit $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une base orthonormée telle que $T = \sum_\alpha \lambda_\alpha |e_\alpha\rangle\langle e_\alpha|$. Montrer que

$$(|ST|e_\alpha, e_\alpha) \leq (|ST|^2 e_\alpha, e_\alpha)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_\alpha (S^p e_\alpha, e_\alpha)^{1/p}.$$

En déduire que $ST$ est à trace et que $\mathrm{Tr}(|ST|) \leq \mathrm{Tr}(S^p)^{1/p}\mathrm{Tr}(T^q)^{1/q}$.

**Exercice 4.** Soit $\mathcal{H} = L^2([a,b])$ et $k(x,y)$ une fonction continue sur $[a,b] \times [a,b]$. Soit $T$ l'opérateur de noyau $k$ défini par:

$$Tf(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

Montrer que $T$ est borné sur $\mathcal{H}$.

Montrer que $T$ est compact sur $\mathcal{H}$ et caractériser les noyaux $k$ tels que $T = T^*$.

**Exercice 5.** Donner deux exemples d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ d'image dense mais non fermée.

**Exercice 6.** Montrer que si $A_n$ est une suite d'opérateurs autoadjoints bornés sur $\mathcal{H}$ avec $A_n \geq 0$ et $A_n \to A$ en norme (resp. fortement), alors $A_n^{\frac{1}{2}} \to A^{\frac{1}{2}}$ en norme (resp. fortement).
**Exercice 7.** Montrer que si $A_n$ est une suite d'opérateurs bornés avec $A_n \to A$ en norme, alors $|A_n| \to |A|$ en norme.

Donner un critère correspondant pour la convergence forte.

**Exercice 8.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Montrer que un opérateur $T$ est compact si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in(e_1,\dots,e_n)^\perp,\ \|u\|=1} \|Tu\| = 0.$$

**Exercice 9.** Soit $\mathcal{H} = L^2([0,1])$. Soit $T_j = \mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ $j = 1,2,3$ avec $\mathcal{D}(T_1) = H^1([0,1])$, $\mathcal{D}(T_2) = \{u \in H^1([0,1]) | u(0) = 0\}$, $\mathcal{D}(T_3) = \{u \in H^1([0,1]) | u(0) = u(1) = 0\}$.

1) Montrer que $T_1$, $T_2$ et $T_3$ sont fermés densément définis.

2) Montrer que $\sigma(T_1) = \mathbb{C}$ et que $\sigma(T_2) = \emptyset$.

3) Déterminer lesquels des opérateurs $T_j$ sont symétriques.

4) Déterminer $T_3^*$ et montrer que $T_3$ n'est pas essentiellement autoadjoint.

**Exercice 10.** Soit $A$ un opérateur symétrique sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}(A)$. On suppose que $A_{|\mathcal{D}_1}$ est essentiellement autoadjoint. Montrer que $A$ est essentiellement autoajoint et que $\overline{A} = \overline{A_{|\mathcal{D}_1}}$.

**Exercice 11.** 1) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ le groupe des opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$. Montrer qu'une application $\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est fortement continue ssi elle est faiblement continue.

2) On suppose maintenant $\mathcal{H}$ séparable et on considère $\mathbb{R} \ni U(t)$ un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires. On suppose que ce groupe est *faiblement mesurable*, c'est à dire que pour tous $u, v \in \mathcal{H}$ la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto (v, U(t)u) \in \mathbb{C}$ est mesurable.

Expliquer comment on peut donner un sens à l'inégrale $T_a u := \int_0^a U(t)u\mathrm{d}t$.

3) Montrer que l'ensemble $F = \{T_a u,\ uin\mathcal{H},\ a \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

4) Montrer que si $v \in F$ et $u \in \mathcal{H}$, alors $t \mapsto (u, U(t)v)$ est continu.

5) En déduire que le groupe $U(t)$ est fortement continu.

**Exercice 12.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Soit $A_n$ une famille d'opérateurs autoadjoints tels que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA_n} \to U(t)$ fortement quand $n \to \infty$.

1) Montrer que $U(t)$ est un groupe unitaire faiblement mesurable.

2) Montrer qu'il existe un opérateur autoadjoint $A$ tel que $(A_n - z)^{-1} \to (A - z)^{-1}$ fortement pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

**Exercice 13.** Soit $A$ un opérateur autoadjoint positif. On définit pour $t \geq 0$ $\mathrm{e}^{-tA}$ par le calcul fonctionnel.

1) Montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{-tA}$ est fortement continu sur $[0, +\infty[$ et fortement dérivable sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que pour $u \in \mathcal{H}$, $u_t = \mathrm{e}^{-tA}u$ vérifie l'*équation de la chaleur:*

$$\begin{aligned} &\partial_t u_t + Au_t = 0 \text{ dans } ]0, +\infty[ \\ &u_0 = u. \end{aligned}$$

**Exercice 14.** Soit $H$ un opérateur autoadjoint et $R_\epsilon = \int_0^\epsilon \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $\text{s-}\lim_{\epsilon\to 0} R_\epsilon = \mathbb{1}$.

2) On suppose qu'il existe un sous espace $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(H)$, tel que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un coeur pour $H$ (théorème de Nelson). **Exercice 15.** 1)

Soit $\mathbb{R} \ni t \mapsto V(t) \in B(\mathcal{H})$ une application fortement continue. Montrer que $\|V(t)\|$ est une fonction localement bornée.

2)On suppose que $V(t)$ est autoadjoint pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une famille $U(t,s)$ d'opérateurs unitaires, fortement continue en $t, s$ telle que

$$\begin{array}{l} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,s)u = V(t)U(t,s)u, \\ U(s,s)u = u. \end{array}$$

Vérifier que $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$. (On dit de manière incorrecte que $U(t,s)$ est un groupe à deux paramètres, le terme correct est celui de groupo¨ide)

3) Montrer qu'on peut exprimer $U(t,s)$ comme une série convergente en norme (série de Dyson):

$$U(t,s) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-\mathrm{i})^n \int_{s\le t_1\le\cdots\le t_n\le t} V(t_n)\cdots V(t_1)\mathrm{d}\ t_1\cdots \mathrm{d}t_n.$$

4) On considére maintenant un opérateur autoadjoint $H_0$ et on suppose que $V(t) : \mathcal{D}(H_0) \to \mathcal{D}(H_0)$, $[H_0, V(t)] \in B(\mathcal{H})$ et que $t \mapsto \|[H_0, V(t)]\|$ est localement bornée. Posons $\tilde{V}(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}V(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}$. Montrer que $\tilde{V}(.)$ vérifie les hypothèses du point 2). On notera $\tilde{U}(t,s)$ la solution correspondante.

Montrer que $U(t,s) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}\tilde{U}(t,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sH_0}$ est un groupe unitaire à deux paramètres et que si $u \in \mathcal{D}(H_0)$, alors $U(t,s)u$ vérifie l'équation de Schrödinger dépendant du temps:

$$\begin{array}{l} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,s)u = (H_0 + V(t))`U(t,s)u, \\ U(s,s)u = u. \end{array}$$