Exercice (Théorème de Perron-Frobenius)

Soit $(X, \Sigma, \mathrm{d}\mu)$ un espace mesuré. Soit T un opérateur borné sur $\mathcal{H} = L^2(X, \mathrm{d}\mu)$. On dit que T *préserve la positivité* si $Tu \geq 0$ p.p. pour tout $u \in L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ avec $u \geq 0$ p.p.

On dit que T *améliore la positivité* si $Tu > 0$ p.p. pour tout $u \in L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ avec $u \geq 0$ p.p.

1) Soit T un opérateur autoadjoint, borné, qui préserve la positivité. Montrer que pour $f, g \in L^2(Q, \mathrm{d}\mu)$ à valeurs réelles, on a:

$$|(f, Tg)| \leq (|f|, T|g|).$$

(Indication: on pourra utiliser la décomposition d'une fonction réelle f en ses parties positive et négative: $f = f_+ - f_-$).

2) On suppose que T améliore la positivité et que $\|T\|$ es une valeur propre de T. Soit $E = \mathrm{Ker}(T - \|T\|\mathbb{1})$ l'espace propre associé. Montrer que E contient une fonction réelle non nulle f. Montrer que $(f_-, Tf_+) = 0$ et en déduire que $f > 0$ p.p.

3) Montrer que $\mathrm{Ker}(T - \|T\|)$ est de dimension 1.

4) Montrer que $-\|T\|$ ne peut pas être valeur propre de T (on pourra considérer l'opérateur T^2).

Exercice

Soit S^2 la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{d}\omega$ la mesure de surface normalisée sur S^2. On rappelle que $\mathrm{d}\omega$ est invariante par les rotations et que $\int_{S^2} \mathrm{d}\omega = 1$. Si on paramètre S^2 par:

$$[0, \pi] \times] - \pi, \pi] \ni (\theta, \varphi) \mapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \in S^2,$$

alors

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{4\pi} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi.$$

On définit l'opérateur $T : L^2(S^2, \mathrm{d}\omega) \to L^2(S^2, \mathrm{d}\omega)$ par:

$$Tf(u) := \int_{S^2} \mathrm{e}^{u.v} f(v) \mathrm{d}\omega,$$

où $u.v$ est le produit scalaire entre u et v considérés comme vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que T est un opérateur borné, compact, autoadjoint sur $L^2(\Omega, \mathrm{d}\omega)$.

2) Montrer que la fonction constante égale à 1 est un vecteur propre de T et calculer la valeur propre λ_1 associée.

3) En déduire que $\|T\| = \lambda_1$, et que λ_1 est valeur propre simple de T.

Exercice

Soit $u_1, \dots, u_n \in S^2$. On définit:

$$H(u_1, \dots, u_n) = -\sum_{i=1}^{n} u_i u_{i+1},$$

où on a posé $u_{n+1} := u_1$.

1) Montrer que

$$\int_{S^2 \times \cdots \times S^2} \mathrm{e}^{-H(u_1, \dots, u_n)} \mathrm{d}\omega(u_1) \dots \mathrm{d}\omega(u_n) = \mathrm{Tr}(T^n).$$

2) Soit $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots$ les valeurs propres de T (répétées avec leur multiplicité). Soit k la multiplicité de λ_2, (de telle sorte que $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{k+1} > \lambda_{k+2}$).

Montrer que

$$\sum_{j\geq k+2}(\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^n = o(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n, \text{ quand } n\to\infty.$$

On pourra montrer le résultat auxilliaire suivant:

soit (u_k) une suite décroissante de nombres réels positifs, avec $u_1 < 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_j (u_j)^n = 0.$$

3) Montrer que

$$\frac{1}{n}\ln\int \mathrm{e}^{-H}\mathrm{d}\omega(u_1)\ldots\mathrm{d}\omega(u_n) = \ln(\lambda_1)+\frac{k}{n}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n + o(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n.$$

Exercice

Soit T un opérateur autoadjoint compact sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et f une fonction convexe bornée définie sur le spectre de T, telle que $f(T)$ est un opérateur à trace.

1) Montrer que si $u\in\mathcal{H}$, $\|u\|=1$ on a:

$$f((u,Tu))\leq (u,f(T)u).$$

2) En déduire que

$$\mathrm{Tr}f(T)\geq\sum_{n\geq 0} f((e_n,Te_n)),$$

si (e_n) est une base orthonormée de $\mathcal{H}$.

Exercice

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, T un opérateur fermé, de domaine $\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{H}$.

1) On associe à T la forme quadratique $Q(u,u) := \|Tu\|^2$, de domaine $\mathcal{D}(T)$, qui est fermée positive. On note par T^*T l'opérateur autoadjoint associé. Vérifier que

$$\mathcal{D}(T^*T) = \{u\in\mathcal{D}(T)|Tu\in\mathcal{D}(T^*)\}.$$

2) On pose $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Montrer que $\mathcal{D}(T)=\mathcal{D}(|T|)$ et que $\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Ker}(|T|)$.

3) Montrer qu'il existe une unique isométrie partielle: $U : \mathrm{Ker}T^\perp\to\overline{\mathrm{Im}(T)}$ telle que $T = U|T|$.

Exercice Soient A, B deux opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On suppose que $A+B$ est autoadjoint sur $\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B) =: \mathcal{D}$ (en particulier on suppose que $\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(B)$ est dense dans $\mathcal{H}$).

1) On pose pour $s\neq 0$:

$$T(s) := \frac{1}{s}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sB}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(A+B)}).$$

Montrer que si $u\in\mathcal{D}$, on a:

$$\lim_{s\to 0} T(s)u = 0.$$

2) Montrer que la convergence de $T(s)$ vers 0 est uniforme sur tout ensemble compact (pour la topologie de $\mathcal{H}$) de $\mathcal{D}$.

3) Montrer que si $u\in\mathcal{D}$, l'ensemble

$$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(A+B)}u,\ s\in[-1,1]\}$$

est un sous ensemble compact de $\mathcal{D}$.

4) En déduire que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(A+B)})\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(A+B)}u=0,\ \text{uniformément pour } s\in[-1,1].$$

5) On rappelle que pour A_1, A_2 deux opérateurs bornés:

$$A_1^n - A_2^n = \sum_{k=0}^{n-1} A_1^k(A_1-A_2)A_2^{n-1-k}.$$

En déduire que pour $t\in\mathbb{R}$:

$$\|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB/n})^n u - \mathrm{e}^{\,it(A+B)}u\| \le n\sup_{|s|\le|t|}\|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB/n}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(A+B)/n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(A+B)}u\|.$$

6) En déduire que:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(A+B)} = \text{s-}\lim_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB/n})^n.\ \text{(formule de Trotter)}.$$

Exercice Soit H^2 le sous espace des fonctions développables en série entière dans le disque unité:

$$H^2 := \{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \mid \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty\}.$$

On munit H^2 du produit scalaire:

$$(g,f) := \sum_{n=0}^{\infty}\overline{b_n}a_n.$$

1) Soit $V\in B(H^2)$ l'opérateur de multiplication pour z. Montrer que V est la transformée de Cayley de l'opérateur T de multiplication par $\mathrm{i}\frac{1+z}{1-z}$, et calculer $Im(T\pm\mathrm{i})$.

2) Soit $V\in B(H^2)$ l'opérateur défini par $Vf(z):=zf(z^2)$. Montrer que V est une isométrie, transformée de Cayley d'un opérateur symétrique fermé, d'indices de défaut $0,+\infty$.

3) Soit pour $t\ge 0$, $Q_t\in B(H^2)$ défini par:

$$Q_t f(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-t}c_n z^n.$$

Montrer que Q_t est un semigroupe fortement continu d'opérateurs autoajoints, positifs, et calculer son générateur infinitésimal A ($Q_t=\mathrm{e}^{-tA}$). A est il autoadjoint?

4) Montrer que $\ln(n)\in\sigma_{\mathrm{p}}(A)$, pour $p\in N^*$.