Compacité faible.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable (i.e. tel qu'il existe une partie dénombrable dense). Soit B la boule unité fermée. Démontrer que, de toute suite u_n d'élements de B, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente, c'est-à-dire qu'il existe une application injective φ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et un élément u de B telle que

$$\forall v \in H \quad \lim_{n\to\infty} (u_{\varphi(n)}|v) = (u|v).$$

Démontrer que si une suite u_n tend faiblement vers u, alors

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

Donner un exemple où l'inégalité ci-dessus est stricte.

Un problème variationnel elliptique vu comme problème de minimisation.

On considère un ouvert Ω, borné dans $\mathbf{R}^n$ et une distribution f de $H^{-1}(\Omega)$. On définit alors sur $H_0^1(\Omega)$ la fonction F par

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \langle f, u\rangle.$$

1) Démontrer que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{H_0^1(\Omega)}\,;$$

en déduire que F est minorée.

2) Soit une suite u_n de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = \inf F.$$

Démontrer que la suite u_n est une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$; en déduire l'existence d'une fonction u de $H_0^1(\Omega)$ telle que $F(u) = \inf F$.

3) Démontrer que u est unique et satisfait une équation aux dérivées partielles que l'on précisera.

Formulation variationelle pour l'élasticité.

Un modèle simplifié des équations de l'élasticité conduit au problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c(x)u = f \text{ dans } \Omega \\ \Delta u_{|\Gamma} = 0 \\ u_{|\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Ici Ω est un ouvert à bord régulier Γ dans $\mathbf{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$, $c \in C^0(\Omega)$.

1) on considère la forme bilinéaire

$$a(u,v) := \int_\Omega \Delta u \Delta v + c(x)uvdx,$$

sur l'espace $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Vérifier que V est fermé pour la norme H^2, et que si $c(x) > 0$, alors a est coercitive.

2) Montrer que si u est la solution donnée par Lax-Milgram, et si $u \in H^4(\Omega)$, alors u est une solution de (0.0.1).

3) Expliciter la fonctionelle qui, dans le cas où les fonctions sont à valeurs réelles, est minimisée par la solution de (0.0.1).

4) Expliquer comment résoudre

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c(x)u = f \text{ dans } \Omega \\ \Delta u_{|\Gamma} = g_1 \\ u_{|\Gamma} = g_2 \end{cases}$$

pour $f \in L^2(\Omega)$, $g_1 \in H^{3/2}(\Omega)$ et $g_2 \in H^{7/2}(\Omega)$.

Equation de Schrödinger avec un potentiel tendant vers l'infini.

On veut résoudre par la méthode variationelle l'équation suivante:

$$-\frac{1}{2m}\Delta u + V(x)u - \lambda u = f, \tag{0.0.2}$$

pour $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, et $V(x)$ un potentiel continu réel tel que:

$$C_1\langle x\rangle^2 \leq V(x) \leq C_2\langle x\rangle^2, \text{ pour } |x| \geq R. \tag{0.0.3}$$

1) Formuler le problème (0.0.2) sous forme variationelle.

2) Montrer que pour $\lambda < \lambda_0$, on peut résoudre (0.0.2) par Lax-Milgram. On notera par $K(\lambda)$ l'opérateur donné par le théorème de Lax-Milgram.

On considère l'espace de Hilbert

$$H^{1,1}(\mathbf{R}^n) := \{u \in L^2(\mathbf{R}^n) \mid \partial_i u \in L^2(\mathbf{R}^n), \forall 1 \leq i \leq n, \langle x\rangle u \in L^2(\mathbf{R}^n)\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{1,1} = \sum_i \|\partial_i u\|_0 + \|\langle x\rangle u\|_0.$$

3) On rappelle que si Ω est un ouvert borné, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Montrer que ce résultat est faux si $\Omega = \mathbf{R}^n$. (On pourra construire une suite u_n bornée dans $H^1(\mathbf{R}^n)$ telle que u_n tende faiblement vers 0).

4) On va montrer le résultat suivant

Théorème 0.0.1 *L'injection de $H^{1,1}(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ est compacte.*

Soit (u_j) une suite bornée dans $H^{1,1}(\mathbf{R}^n)$. Pour une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $\chi(x) = 1$ dans $|x| \leq 1$, on pose:

$$u_{n,j} := \chi(\frac{x}{n})u_j.$$

4a) montrer que

$$\|u - \chi(\frac{x}{n})u\| \leq Cn^{-1}\|u\|_{1,1}. \tag{0.0.4}$$

4b) montrer qu' il existe une famille de sous suites $j \to k_n(j)$ telles que $k_n(j)$ soit une sous suite de $k_{n-1}(j)$ et

$$u_{n,k_n(j)} \to u_{n,\infty} \text{ dans } L^2(\mathbf{R}^n).$$

4c) montrer que $u_{n\infty}$ tend vers u_∞ quand n tend vers l'infini.

4d) Montrer qu'on peut extraire de la suite (u_j) une sous suite qui converge dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.

4e) En déduire que

$$K(\lambda) : L^2(\mathbf{R}^n) \mapsto L^2(\mathbf{R}^n)$$

est compact.

Spectre des opérateurs de multiplication.

Soit f une fonction continue bornée sur $[0,1]$. On considère l'opérateur sur $L^2([0,1])$ suivant

$$Tu(x) \ := \ f(x)u(x).$$

1) montrer que λ est une valeur propre de T si et seulement si $f^{-1}(\lambda)$ est de mesure non nulle.

2) montrer que $\sigma(T) = f([0,1])$.

Opérateurs compacts

On rappelle qu'un élément u de $\mathcal{L}(E,F)$ (E et F étant deux espaces de Banach) est dit compact si et seulement si l'image de la boule unité de E est relativement compacte dans F.

1) Démontrer que $u \circ v$ est compact dès que u ou v l'est.

2) Montrer que pour s et t tels que $s > t$, l'inclusion de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{T}^n)$ dans $H^t(\mathbf{T}^n)$ est compacte, si $\mathbf{T}^n$ désigne le tore $[0,2\pi]^n$.

La forme hermitienne associée à un opérateur autoadjoint compact.

Soit A un opérateur autoadjoint compact sur un espace de Hilbert (séparable) $\mathcal{H}$. Démontrer (sans utiliser le théorème **??**) qu'il existe au moins des vecteurs u_+ et u_- de norme 1 tels que

$$\inf_{\|u\|=1}(Au|u) = (Au_-|u_-) \quad \text{et} \quad \max_{\|u\|=1}(Au|u) = (Au_+|u_+).$$

Caractérisation des opérateurs de Fredholm

Montrer qu'un opérateur linéaire continu T de E dans F est Fredholm si et seulement si il existe des opérateurs U_1, U_2 tels que:

$$\begin{aligned} U_1T &= \mathbf{1}_E + K_1, \\ TU_2 &= \mathbf{1}_F + K_2, \end{aligned} \tag{0.0.5}$$

où K_1, K_2 sont compacts.

Opérateurs de Toeplitz sur le cercle

Notations et préliminaires

Soit $S^1 = \{z \in \mathbf{C} | |z| = 1\}$ le cercle unité et soit $\mathrm{D} = \{z \in \mathbf{C} | |z| < 1\}$ le disque unité ouvert. On paramètre S^1 par $\theta \in [0, 2\pi[$ en posant $z = e^{i\theta}$, et on définit l'espace $L^2(S^1, \mathbf{C})$ des fonctions de carré intégrable sur S^1 muni de la norme:

$$\|u\|^2 := (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2 d\theta.$$

On rappelle que si $\phi_n(\theta) := e^{in\theta}$, $n \in \mathbf{Z}$, la famille $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base orthonormale de $L^2(S^1, \mathbf{C})$. Pour $u \in L^2(S^1, \mathbf{C})$, on notera par $(u_n) \in l^2(\mathbf{Z}, \mathbf{C})$ la suite de ses coefficients de Fourier:

$$u_n := (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} u(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

de telle sorte que:

$$u = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n \phi_n.$$

On notera par $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier discrète:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} : L^2(S^1, \mathbf{C}) \to l^2(\mathbf{Z}, \mathbf{C}), \\ &u \mapsto (u_n), \end{aligned}$$

qui est un opérateur unitaire de $L^2(S^1, \mathbf{C})$ dans $l^2(\mathbf{Z}, \mathbf{C})$.

Projecteur de Toeplitz

On définit l'opérateur P agissant sur $L^2(S^1, \mathbf{C})$ par:

$$(Pu)_n := \begin{cases} u_n, \ n \geq 0, \\ 0, \ n < 0. \end{cases}$$

-Montrer que P est un projecteur orthogonal, c'est à dire que $P = P^*$, $P^2 = P$.(On pourra utiliser la transformation $\mathcal{F}$). On notera l'image de P par $\mathcal{H}$.

-Vérifier que si $u \in L^2(S^1, \mathbf{C})$, on a:

$$u_{-n} = \overline{u}_n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

-En déduire que si $u \in L^2(S^1, \mathbf{C})$ est une fonction à valeurs réelles, on a:

$$\|Pu\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|. \tag{0.0.6}$$

Soit

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n \phi_n \in \mathcal{H}.$$

-Montrer que la série

$$U(z) := \sum_{n \geq 0} u_n z^n,$$

converge dans $D'(\mathrm{D})$.

-Pour $x = Rez, y = Imz$, on note par $\partial_{\overline{z}}$ l'opérateur:

$$\partial_{\overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\partial_y\right).$$

-Montrer que $\partial_{\overline{z}} U = 0$. De telles distributions sont appelées *holomorphes*.

-En posant $z = re^{i\theta}$, on note:

$$u_r(\theta) = U(re^{i\theta}).$$

-Montrer que u_r converge vers u dans $L^2(S^1, \mathbf{C})$. L' opérateur P peut donc être considéré comme le projecteur sur les fonctions de $L^2(S^1, \mathbf{C})$ qui sont des valeurs au bord de fonctions holomorphes dans D.

Opérateurs de multiplication

Soit $a \in C^0(S^1, \mathbf{C})$. On rappelle qu'en utilisant la paramétrisation de S^1 par $[0, 2\pi]$, $a \in C^0(S^1, \mathbf{C})$ si et seulement si $a(\theta)$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et $u(0) = u(2\pi)$. On notera encore par a l'opérateur de multiplication par a agissant sur $L^2(S^1, \mathbf{C})$:

$$au(\theta) := a(\theta)u(\theta).$$

On munit $C^0(S^1, \mathbf{C})$ de la norme $\|a\|_\infty = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |a(\theta)|$. On rappelle que $C^\infty(S^1, \mathbf{C})$ est dense dans $C^0(S^1, \mathbf{C})$.

-Montrer que si $a \in C^\infty(S^1, \mathbf{C})$, on a:

$$|a_n| \leq C_k(1+|n|)^{-k}, \ \forall k \in \mathbf{N}.$$

En déduire que l'espace $\mathcal{F}$ défini par:

$$\mathcal{F} := \{a \in C^0(S^1, \mathbf{C}) | \exists N \text{ tel que } a_n = 0, \text{ pour } |n| \geq N\},$$

est dense dans $C^0(S^1, \mathbf{C})$.

-Montrer que pour $a \in C^\infty(S^1, \mathbf{C})$, on a:

$$(au)_n = \sum_{m \in \mathbf{Z}} a_{n-m} u_m.$$

Opérateurs de Toeplitz

Pour $a \in C^0(S^1, \mathbf{C})$, on note par $T(a)$ l'opérateur de $\mathcal{H}$ dans lui même défini par:

$$T(a) : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

$$T(a)u = PaPu.$$

De tels opérateurs sont appelés *opérateurs de Toeplitz*.

-Montrer que si $a \in C^0(S^1, \mathbf{C})$ alors:

$$[a, P] = aP - Pa \text{ est un opérateur compact sur } L^2(S^1, \mathbf{C}). \tag{0.0.7}$$

(On pourra approcher la fonction a par une suite $a_k \in \mathcal{F}$).

-En déduire les propriétés suivantes:

$$T(a_1)T(a_2) = T(a_1 a_2) + K, \ K \text{ compact},$$

$$T(a)^* = T(\overline{a}).$$

Soit A un opérateur borné agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On définit le *spectre essentiel* de A, noté $\sigma_{\text{ess}}(A)$ par: $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ si et seulement si il existe une suite $u_k \in \mathcal{H}$ avec:

$$\|u_k\| = 1, \ (A - \lambda)u_k \to 0, \ u_k \rightharpoonup 0,$$

où la notation $u_k \rightharpoonup 0$ signifie que u_k tend faiblemetn vrs 0. Une telle suite est appelée *suite de Weyl* pour A.

-Soit $a \in C^0(S^1, \mathbf{C})$. Montrer que

$$\sigma_{\text{ess}} a = a(S^1),$$

où $a(S^1)$ désigne l'image de S^1 par a. (Pour $\lambda \in a(S^1)$, on pourra considérer un point θ_0 avec $a(\theta_0) = \lambda$ et une suite de fonctions dont les supports se concentrent autour de θ_0.)

-Vérifier que si $\lambda \in a(S^1)$, on peut construire une suite de Weyl u_k pour A où les fonctions u_k sont à valeurs réelles.

-Soit $a \in C^0(S^1, \mathbf{C})$. Pour $\lambda \notin a(S^1)$ construire un opérateur de Toeplitz $T(b)$ tel que:

$$T(b)\,(T(a) - \lambda \mathbf{1}) = \mathbf{1} + K,$$

où K et compact. En déduire que $\sigma_{\text{ess}}(T(a)) \subset a(S^1)$.

-Montrer que $a(S^1) \subset \sigma_{\text{ess}}(T(a))$. (On pourra considérer une suite de Weyl pour a dans $L^2(S^1, \mathbf{C})$ et utiliser (0.0.7), (0.0.6)).

On a donc finalement:

$$\sigma_{\text{ess}} T(a) = a(S^1). \tag{0.0.8}$$

Indice des opérateurs de Toeplitz

Soit $a \in C^0(S^1, \mathbf{C})$ avec $a(\theta) \neq 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$.

-Montrer qu'il existe $b \in C^0(S^1, \mathbf{C})$ tel que:

$$T(b)T(a) = \mathbf{1} + K_1,$$

$$T(a)T(b) = \mathbf{1} + K_2,$$

où K_1, K_2 sont compacts.

-En déduire que $T(a)$ est un opérateur de Fredholm.

-Soit $a \in C^0(S^1, \mathbf{C})$ tel que $a(\theta_0) = 0$, pour $\theta_0 \in [0, 2\pi]$. En utilisant (0.0.8), montrer que $T(a)$ n'est pas un opérateur de Fredholm. On pourra utiliser la conséquence suivante du Lemme 2.2.2 du cours:

si A est Fredholm sur $\mathcal{H}$ il existe un opérateur borné B et un opérateur compact K tel que $BA = \mathbf{1} + K$.

-Fixons maintenant $a(\theta) = e^{ik\theta}$, pour $k \in \mathbf{Z}$. Montrer que

$$Ind(T(a)) = -k.$$

Vérifier que pour $a(\theta) = e^{ik\theta}$, on a:

$$Ind(T(a)) = -(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \frac{a'(\theta)}{a(\theta)} d\theta. \tag{0.0.9}$$

Remarque: par un argument de déformation, on peut montrer que si $a \in C^1(S^1, \mathbf{C})$ est une fonction qui ne s'annule pas sur S^1, alors la formule (0.0.9) reste valable. En considérant l'image de S^1 dans $\mathbf{C}$ comme un lacet γ fermé autour de l'origine, l'intégrale dans le membre de droite de (0.0.9) s'appelle l'*indice d'enroulement* de γ.

0.1 Exercices

Spectre du Laplacien sur $\mathbf{R}^n$.

On considère l'opérateur

$$A := -\frac{1}{2m}\Delta$$

avec domaine $D(\Delta) = H^2(\mathbf{R}^n)$.

1) Montrer que Δ est autoadjoint.

2) En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que $\sigma(\Delta) = [0, +\infty[$.

3) Vérifier que $e^{-itA}u_0$ est donné par

$$e^{-itA}u_0(x) = (2\pi)^{-n} \int\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle - i\frac{t}{2m}\xi^2} u_0(y)dyd\xi.$$

4) on considère maintenant l'intégrale

$$I(x,t) = \int e^{i\langle x,\xi\rangle - i\frac{t}{2m}\xi^2} f(\xi)d\xi,$$

pour $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$. Soit L l'opérateur

$$\frac{1}{(x - \frac{t}{m}\xi)^2}\langle x - \frac{t}{m}\xi, \partial_\xi\rangle.$$

En utilisant que

$$L^k(e^{i\langle x,\xi\rangle - i\frac{t}{2m}\xi^2}) = e^{i\langle x,\xi\rangle - i\frac{t}{2m}\xi^2},$$

montrer que $\forall R > 0$

$$F(|x| \leq R)I(x,t) \leq C_N t^{-N},\ \forall N \in \mathbf{N}.$$

4) en déduire que

$$\lim_{t\to+\infty} \|F(|x| \leq R)e^{-itA}u_0\| = 0,\ \forall u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n).$$

Projection sur l'orthogonal du noyau.

Soit A un opérateur fermé sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

a) Démontrer que $\ker A$ est un sous espace fermé de $\mathcal{H}$.

b) Si $p_{(\ker A)^\perp}$ désigne la projection orthogonale sur $(\ker A)^\perp$, démontrer que

$$p_{(\ker A)^\perp}(\mathcal{D}(A)) = \mathcal{D}(A) \cap (\ker A)^\perp$$

et que $\mathcal{D}(A) \cap (\ker A)^\perp$ est dense dans $(\ker A)^\perp$.

c) Démontrer que, si $\widetilde{A}$ est l'opérateur défini par

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}) = \mathcal{D}(A) \cap (\ker A)^\perp \quad \text{et} \quad \widetilde{A}u = Au$$

alors A est fermé. Si de plus l'opérateur A est autoadjoint, l'opérateur $\widetilde{A}$ aussi.

Points isolés du spectre.

Soit A un opérateur fermé sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On considère un point isolé du spectre que l'on désigne par λ.

a) Démontrer que, si E_λ désigne le sous espace propre associé à λ, alors, il existe un réel α strictement positif tel que l'on ait

$$p_{E_\lambda} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(\lambda,\alpha)} (A - \zeta)^{-1} d\zeta.$$

b) En utilisant la relation sur la résolvante, montrer qu'il existe deux réels strictement positifs α et C tels que l'on ait

$$\forall z \in B(\lambda, \alpha) \ \ \forall u \in E_\lambda^\perp \quad \|(A-z)^{-1}u\| \leq \|u\|.$$

c) En déduire, en s'inspirant de l'exercice précédent, que λ est une valeur propre de A.

Le concept de spectre essentiel.

Définition Soit A un opérateur fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dit qu'un élément λ du spectre de A n'appartient pas au spectre essentiel si et seulement si λ est une valeur propre de multiplicité finie qui est un point isolé du spectre. On note $\sigma_{ess}(A)$ cet ensemble.

a) Dites pourquoi, si A est compact, alors $\sigma_{ess}(A) = \{0\}$.

b) Démontrer que λ appartient au spectre essentiel de A si et seulement si il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}^{\mathbf{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda)u_n\| = 0\,, \ \|u_n\| = 1 \quad \text{et} \quad u_n \rightharpoonup 0.$$

Stabilité du spectre essentiel. Soit C un opérateur compact sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Montrer que si un suite u_n tend vers 0 faiblement, alors Cu_n tend vers 0 en norme.

Montrer que si A et B sont deux opérateurs autoadjoints tels que $D(A) = D(B)$ et $C = A - B$ est compact, alors $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B)$.

Montrer que si A est un opérateur autoadjoint tel que A est semi borné inférieurement, *i.e.* tel que $\sigma(A) \subset [C_0, +\infty[$, alors on a

$$\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A) \ \Leftrightarrow \ (\lambda - C_O - 1)^{-1} \in \sigma_{\text{ess}}(A - C_0 - 1)^{-1}.$$

En déduire que si A et B sont deux opérateurs semibornés tels que $D(A) = D(B)$ et $(A - B)(A+i)^{-1}$ est compact, alors $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B)$.

Perturbations de rang un

Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^+, dx)$, et H_0 l'opérateur de multiplication par x sur $\mathcal{H}$ avec domaine $D = \{u \in L^2(\mathbf{R}^+) | (1+x)u \in L^2(\mathbf{R})\}$. Pour $f \in \mathcal{H}$, on note par $V = |f\rangle\langle f|$ l'opérateur de projection orthogonale sur f. On cherche à donner un sens à l'opérateur formel $H = H_0 + gV$, g étant une constante de couplage.

1) Vérifier que si $f \in \mathcal{H}$, H est autoadjoint sur D.

2) On suppose maintenant que $f \notin L^2(\mathbf{R}^+)$, mais que $(1+x)^{-\frac{1}{2}} f \in L^2(\mathbf{R})^+$. Montrer qu'on ne peut pas donner un sens à $H_0 + gV$ comme opérateur avec un domaine dense. Soit Q_0 la forme quadratique associée à H_0. Déterminer sa fermeture que l'on notera encore par Q_0. Montrer que V définit une forme quadratique qui est H_0-bornée avec borne relative 0. En déduire qu'on peut définir un opérateur H que l'on notera $H_0 \dot{+} V$.

Le modèle de Friedrichs

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert $\mathbf{C} \oplus L^2(\mathbf{R}^+, dx)$. Les vecteurs de $\mathcal{H}$ seront notés $u = (\lambda, \psi)$. Soit

$$H_0 := \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & h_0 \end{pmatrix},$$

où h_0 est l'opérateur de multiplication par x sur $L^2(\mathbf{R}^+)$. Pour $i = -2, -1, 0, 1, 2$ on note par H^i l'espace

$$H^i := \{\psi \in L^2(\mathbf{R}^+) | (1+x)^{i/2}\psi \in L^2(\mathbf{R}^+)\},$$

de telle sorte que $H^0 = L^2(\mathbf{R}^+)$, $H^{i\star} = H^{-i}$.

1) Vérifier que H_0 est autoadjoint avec domaine $D(H_0) = \mathbf{C} \oplus H^2$, que $\sigma_{\mathrm{pp}}(H_0) = \{E_0\}$ et que $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = [0, +\infty[$.

2) On considère le 'potentiel ' V défini par

$$V := \begin{pmatrix} v_0 & \langle\phi| \\ |\phi\rangle & 0 \end{pmatrix},$$

pour $\phi \in L^2(\mathbf{R}^+)$, $v_0 \in \mathbf{R}$. On pose

$$H := H_0 + gV.$$

La constante g joue le rôle d'une constante de couplage.

-Vérifier que H est autoadjoint avec domaine $D(H_0)$.

Montrer que $E \in \mathbf{R}^-$ est une valeur propre de H si et seulement si

$$E = E_0 + gv_0 - g^2 f_E, \tag{0.1.10}$$

où:

$$f_E := \left((h_0 - E)^{-1}\phi|\phi\right).$$

-Vérifier que tant que $E_0 + gv_0 < \int_{\mathbf{R}^+} x^{-1}|\phi(x)|^2 dx$, il existe une unique solution $E < 0$ de (0.1.10).

-Montrer qu'on peut choisir v_0 de telle sorte que E_0 soit la solution de (0.1.10).

On s'intéresse maintenant à construire la résolvante $(H - z)^{-1}$ pour $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$. On pose

$$w_z = (h_0 - z)^{-1}\phi,\ f_z = \left((h_0 - z)^{-1}\phi|\phi\right),$$

et

$$m_z = E_0 + gv_0 - z - g^2 f_z.$$

Montrer que:

$$(H - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} - g(H - z)^{-1}V(H_0 - z)^{-1},$$

puis que

$$(H - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} + R(z),$$

pour

$$R(z) := -g \begin{pmatrix} -g(E_0 + gv_0 - z)^{-1}\frac{f_z}{m_z} & \frac{1}{m_z}\langle w_{\overline{z}}| \\ -\frac{g}{m_z}|w_z\rangle\langle w_{\overline{z}}| & \frac{1}{m_z} \end{pmatrix}.$$

On considère maintenant le cas où $\phi \notin L^2(\mathbf{R}^+)$ mais $\phi \in H^{-1}$.

Montrer que $D(H_0) \cap D(V)$ n'est jamais dense. Pour tourner cette difficulté, on va utiliser la théorie des formes quadratiques. On considère sur l'espace $\mathbf{C} \oplus \mathcal{H}^1$ la forme sesquilinéaire

$$Q(u_1, u_2) := (E_0 + gv_0)\lambda_1\overline{\lambda_2} + (h_0\psi_1|\psi_2) + g\left((\psi_1|\phi)\lambda_2 + \lambda_1(\phi|\psi_2)\right).$$

Montrer que la forme Q est symétrique, bornèe inférieurement et fermée. En déduire qu'on peut associer à Q un opérateur autoadjoint H que l'on notera $H_0 \dot{+} gV$.

On veut maintenant définir H dans un cas encore plus singulier. On suppose que:

$$\phi \notin H^{-1}, \phi \in H^{-2}.$$

Pour ce faire nous devrons effectuer une 'renormalisation', c'est à dire faire tendre v_0 vers l'infini d'une certaine façon. Cette opération s'appelle une 'renormalisation de masse', par opposition à la 'renormalisation de charge' où l'on fait tendre g vers 0.

Pour définir le hamiltonien renormaliséH^{ren} pour $\phi \in H^2$, on prend une suite

$$\phi_n = 1_{[o,n]}(x)\phi,$$

et on note H_n l'opérateur de la partie 1) pour ϕ_n. On va montrer que $R_n(z)$ tend vers une limite $R^{\mathrm{ren}}(z)$ quand n tend vers l'infini. On définira alors

$$(H^{\mathrm{ren}} - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} + R^{\mathrm{ren}}(z).$$

On fixe la constante $v_{n,0}$ de telle sorte que:

$$v_{n,0} = g f_{n,E_0}.$$

Ceci entraine que E_0 est la seule valeur propre négative de H_n. Vérifier que

$$m_{n,z} = E_0 - z - g^2(f_{n,z} - f_{n,E_0}),$$

et que

$$f_{n,z} - f_{n,E_0} = (E_0 - z)\left((H_0 - E_0)\phi_n | (h_0 - z)\phi_n\right) =: f_{n,1}(z),$$
$$m_{n,z} = (E_0 - z)\Big(1 - g^2\left((H_0 - E_0)\phi_n | (h_0 - z)\phi_n\right)\Big).$$

Vérifier que

$$\lim_{n\to\infty} w_{n,z} = (h_0 - z)^{-1}\phi =; w^{\mathrm{ren}}(z),$$
$$\lim_{n\to\infty} m_{n,z} = (E_0 - z)\left(1 - g^2\left((H_0 - E_0)\phi | (h_0 - z)\phi\right)\right) =: m_z^{\mathrm{ren}}$$

existe. Montrer que si $v_{n,0} = g f_{n,E_0}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} -g\frac{f_{n,E_0}}{E_0 + g v_{n,0} - z} = -g^{-1},$$

puis que

$$R^{\mathrm{ren}}(z) = -g\begin{pmatrix} -g^{-1}\frac{1}{m_z^{\mathrm{ren}}} & \frac{1}{m_z^{\mathrm{ren}}}\langle w_{\bar{z}}^{\mathrm{ren}}| \\ -\frac{g}{m_z^{\mathrm{ren}}}|w_z^{\mathrm{ren}}\rangle\langle w_{\bar{z}}^{\mathrm{ren}}| & \frac{1}{m_z^{\mathrm{ren}}} \end{pmatrix}.$$

On pose alors

$$(H^{\mathrm{ren}} - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} + R^{\mathrm{ren}}(z).$$

-Vérifier que $(H^{\mathrm{ren}} - z)^{-1}$ est singulier en $z = E_0$.

-Vérifier que $(H^{\mathrm{ren}}-z)^{-1}$ vérifie l'identité de la résolvante:

$$(H^{\mathrm{ren}}-z)^{-1}-(H^{\mathrm{ren}}-z')^{-1}=(z'-z)(H^{\mathrm{ren}}-z)^{-1}(H^{\mathrm{ren}}-z')^{-1},$$

et que:

$$\lim_{|z|\to\infty}(H^{\mathrm{ren}}-z)^{-1}u=0, u\in\mathcal{H}.$$

On peut alors montrer qu'il existe un opérateur autoadjoint H^{ren} dont $(H^{\mathrm{ren}}-z)^{-1}$ est la résolvante.

La justification physique de cette construction est la suivante: l'opérateur (formel avant la renormalisation) H s'écrit comme

$$H:=\left(\begin{array}{cc} E_0+gv_0 & \langle\phi| \\ |\phi\rangle & h_0 \end{array}\right).$$

On peut aussi donc bien supposer que

$$H_0:=\left(\begin{array}{cc} E_0+gv_0 & 0 \\ 0 & h_0 \end{array}\right),$$

et que

$$V:=\left(\begin{array}{cc} 0 & \langle\phi| \\ |\phi\rangle & 0 \end{array}\right).$$

L'interaction reste alors fixe dans la renormalisation, tandis que l'opérateur libre voit sa valeur propre E_0+gv_0 tendre vers l'infini. Cette valeur propre correspond à l'état fondamental du système libre, qui n'est pas observable. Par contre la valeur propre E_0 du hamiltonien H^{ren} est elle observable.

Problème de Neumann

Ia) Soit $\Omega=[0,1]\times[0,T]^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$, $T>0$. On note par $x=(x_1,x')$ les points de $\mathbf{R}^n$.

Montrer que pour $u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, on a:

$$|u(x_1,x')|^2\leq C|u(0,x')|^2+C\int_0^T|\partial_1 u(s,x')|^2ds,\ (x_1,x')\in\Omega. \tag{0.1.11}$$

En déduire que:

$$\begin{array}{l}\int_\Omega|u(x_1,x')|^2dx\leq \\ C\int_{[0,T]^{n-1}}|u(0,x')|^2dx'+C\int_\Omega|\partial_1 u(x_1,x')|^2dx,\ u\in C^\infty(\mathbf{R}^n).\end{array} \tag{0.1.12}$$

Ib) Soit maintenant $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ un ouvert borné régulier et $\Gamma=\partial\Omega$. Déduire de (0.1.12) en utilisant des changements de coordonnées que:

$$\int_\Omega|u(x)|^2dx\leq C\int_\Gamma|u(x)|^2d\sigma+\int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx,\ u\in H^1(\Omega). \tag{0.1.13}$$

Ic) On considère maintenant sur l'espace $H^1(\Omega)$ la forme sesquilinéaire

$$Q(u,v)=\int_\Omega\nabla u(x)\nabla\overline{v}(x)dx+\int_\Gamma\alpha(x)u(x)\overline{v}(x)d\sigma,$$

où $\alpha(x) \in C^\infty(\Gamma)$ est une fonction à valeurs

réelles. Montrer que Q est bornée sur $H^1(\Omega)$ et que si $\alpha(x) > 0$, Q est coercitive. Soit

$$A : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)'$$

l'opérateur associé à Q. Soit $f \in L^2(\Omega), h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. On associe à (f, h) la forme antilinéaire L sur $H^1(\Omega)$ définie par:

$$\langle L, v\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{v}(x)dx + \int_\Gamma h(x)\overline{v}(x)d\sigma.$$

Vérifier que L est une forme antilinéaire continue sur $H^1(\Omega)$. Montrer que si $Au = L$, alors

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$

On admettra le fait que si $f \in L^2(\Omega), h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, alors $u \in H^2(\Omega)$. Montrer alors que u vérifie:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = h \text{ sur } \Gamma.$$

Vérifier que la forme quadratique Q sur le domaine $D(Q) = H^1(\Omega)$ est bornée inférieurement et fermée. Soit H l'opérateur autoadjoint sur $L^2(\Omega)$ associé à $(Q, D(Q))$. Montrer que

$$D(H) = \{u \in H^2(\Omega) | \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Montrer qu'il existe une suite $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\lambda_j \to +\infty$ et une base orthonormée $\phi_j \in L^2(\Omega)$ telles que $\phi_j \in D(H)$ et $H\phi_j = \lambda_j\phi_j$.

Notons par $-\Delta_N$ le Laplacien de Neumann associé à la forme Q pour $\alpha(x) \equiv 0$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$-\Delta_N - C \le H \le -\Delta_N + C.$$

On note par $\lambda_k(\Omega)$ la $k-$ième valeur propre de H sur $L^2(\Omega)$, les valeurs propres étant rangées par ordre croissant et répétées selon leur multiplicité. On note par $\lambda_k^N(\Omega)$ la $k-$ième valeur propre de $-\Delta_N$ sur Ω. Montrer que si Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts bornés réguliers, on a:

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \lambda_k^N(\Omega_2) \le \lambda_k^N(\Omega_1).$$

Expliquer brièvement comment en déduire l'encadrement suivant:

$$C_1 k^{2/n} \le \lambda_k(\Omega) \le C_2 k^{2/n}.$$

Spectre de l'opérateur de Schrödinger.

On considère l'opérateur

$$A = -\frac{1}{2m}\Delta + V(x),$$

où V est un potentiel réel continu tel que $C_1\langle x\rangle^2 - C_2 \le V(x) \le C_3\langle x\rangle^2$, pour des constantes C_i positives.

Comme dans le cours, A est défini sur son domaine $D(A) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^n) \mid Au \in L^2(\mathbf{R}^n)\}$. On peut montrer que si on suppose de plus que:

$$|\nabla_x V| \leq C\langle x\rangle,$$

alors $D(A) = H^{2,2}(\mathbf{R}^n)$, où

$$H^{2,2}(\mathbf{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^n) \mid x^\alpha D_x^\beta u \in L^2(\mathbf{R}^n),\ \forall |\alpha| + |\beta| \leq 2\},$$

avec la norme

$$\|u\|_{2,2} = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2} \|x^\alpha D_x^\beta u\|_0,$$

et que A est autoadjoint sur $D(A)$.

1) montrer qu'il existe une base hilbertienne de fonctions propres de A associées à une suite de valeurs propres tendant vers $+\infty$.

2) On veut maintenant obtenir un encadrement de la $n-$ième valeur propre de A. Pour celà, on va comparer A avec un oscillateur harmonique:

$$A_0 = \frac{-1}{2m}\Delta + Cx^2.$$

Les valeurs propres de A_0 sont égales à

$$\lambda_n = C_0 \sum_{j=1}^{n} (n_j + \frac{1}{2}),$$

pour $(n_1, \cdots n_n) \in \mathbf{N}^n$.

2a) Montrer que le nombre $N(\lambda)$ de valeurs propres de A_0 inférieures où égales à λ vérifie

$$C_1 \lambda_n \leq N(\lambda) \leq C_2 \lambda^n.$$

On pourra considérer le nombre de points à coordonnées entières dans le domaine

$$D(\lambda) = \{(x_1, \cdots x_n) \mid x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \lambda\}.$$

2b) en déduire que la $k-$ième valeur propre de λ_k de A_0 vérifie

$$C_1 k^{\frac{1}{n}} \leq \lambda_k \leq C_2 k^{\frac{1}{n}}.$$

3) en utilisant le principe du minimax, montrer que le même encadrement est valable pour les valeurs propres de A.

4) On considère maintenant l'équation de Schrödinger dépendant du temps

$$\begin{cases} i\partial_t u = Au, \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

que l'on note par $e^{-itA}u_0$.

4a) montrer que si

$$P_R(u_0) := \sup_{t\in\mathbf{R}} \|1_{\{|x|\geq R\}} e^{-itA}u_0\|,$$

on a

$$\lim_{R\to+\infty} P_R(u_0) = 0, \ \forall u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n).$$

Application du théorème de Weyl. On considère l'opérateur de Schrödinger

$$H = \frac{1}{2}D_x^2 + V(x),$$

considéré comme opérateur non borné avec le domaine $D(H) = H^2(\mathbf{R}^n)$. On suppose que $V(x)$ est une fonction réelle dans $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $V(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$. On pose $H_0 = \frac{1}{2}D_x^2$.

1) Montrer que $V(H+i)^{-1}$ et $V(H_0+i)^{-1}$ sont compacts.

2) En déduire que le spectre de H est de la forme

$$\sigma(H) = \cup_{i\in I}\{\lambda_i\} \cup [0, +\infty[,$$

où les λ_i sont négatifs.

Equation des ondes amorties

On va appliquer le théorème abstrait de Hille-Yosida pour résoudre l'équation des ondes amortie suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_x u - c(x)\partial_t u = 0, \\ u(0,x) = u_0, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), \end{cases}$$

pour une fonction continue $c(x)$ avec $0 \leq c(x) \leq c_0$.

1) Vérifier qu'on peut écrire cette équation comme l'équation d'un semigroupe de générateur:

$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & c \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{A}_1$ considéré comme opérateur linéaire sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := H^1(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ avec domaine:

$$D(\mathcal{A}_\infty) = \{(u_0, u_1) | u_1 \in H^1(\mathbf{R}^n), \Delta u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)\}$$

est maximal accrétif.

Equation des ondes dissipative

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné régulier et $\Gamma = \partial\Omega$. On se propose de résoudre l'équation des ondes suivante:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, \text{ dans } \mathbf{R}^+ \times \Omega, \\ u_{|t=0} = u_0, \\ \partial_t u_{|t=0} = u_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)\partial_t u = 0 \text{ sur } \mathbf{R}^+ \times \Gamma, \end{cases} \tag{0.1.14}$$

où $\alpha(x) \in C^{\infty}(\Gamma)$ est une fonction réelle positive. On considére l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = H^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega),$$

dont on note les éléments par $f = (f_1, f_2)$. On munit $\mathcal{H}$ de la norme hilbertienne

$$\|f\|^2 = \int_\Omega |\nabla f_1(x)|^2 + |f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 dx.$$

On écrit l'équation des ondes (0.1.14) sous la forme:

$$\partial_t f = -Af,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(A) = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{H} | f_2 \in H^1(\Omega), \Delta f_1 \in L^2(\Omega), \frac{\partial f_1}{\partial \nu} + \alpha(x) f_2 = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Montrer que pour $\lambda_0 > 0$ assez grand, $A + \lambda_0$ est maximal accrétif.

En déduire que si $u_0 \in H^2(\Omega), u_1 \in H^1(\Omega)$ avec $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \alpha(x) u_1 = 0$ sur Γ, il existe une unique fonction $u \in C^2(\mathbf{R}^+, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbf{R}^+, H^1(\Omega)) \cap C^0(\mathbf{R}^+, H^2(\Omega))$ solution de l'équation des ondes (0.1.14).

Equations d'évolution.

On considère $t \to H(t)$ une application fortement continue de $\mathbf{R}$ dans les opérateurs autoadjoints bornés. On veut construire un propagateur $U(t, s)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} i\frac{d}{dt} U(t, s)u = H(t)U(t, s)u, \\ U(s, s)u = u. \end{array} \right. \tag{0.1.15}$$

1) On considère la série

$$U(t, s)u := u + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t, s)u,$$

où

$$K_n(t, s)u = (-i)^n \int_s^t \int_s^{t_1} \cdots \int_s^{t_{n-1}} H(t_1) \cdots H(t_n) u dt_1 \cdots dt_n.$$

Montrer que

$$\|K_n(t, s)\| \leq \frac{1}{n!} |t - s|^n (\sup_{[s,t]} \|H(\tau)\|)^n.$$

montrer que la série converge et fournit une solution à l'équation (0.1.15).

2) On considère maintenant un opérateur autoadjoint non borné $(H_0, D(H_0))$, et une perturbation dépendant du temps $V(t)$. On veut résoudre le problème d'évolution suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\frac{d}{dt} U(t, s)u = H(t)U(t, s)u, \\ U(s, s)u = u, \end{array} \right. \tag{0.1.16}$$

pour $H(t) = H_0 + V(t)$. On va ramener ce problème au cas précédent en utilisant la 'représentation d'interaction'. On pose

$$\tilde{V}(t) = e^{itH_0} V(t) e^{-itH_0}.$$

Vérifier qu'il existe un propagateur $\tilde{U}(t,s)$ pour le Hamiltonien borné $\tilde{V}(t)$.

On suppose de plus que

$$(H_0 + i1)V(t)(H_0 + i1)^{-1}$$

est un opérateur borné. On pose

$$R_\epsilon := (H_0 + i)(1 + i\epsilon H_0)^{-1}.$$

Vérifier que pour $u \in D(H_0)$, on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} R_\epsilon u = (H_0 + i1)u.$$

En considérant le vecteur $R_\epsilon \tilde{U}(t,s)(H_0 + i1)^{-1}u$, pour $u \in \mathcal{H}$, montrer que $\tilde{U}(t,s)$ est borné de $D(H_0)$ sur lui même.

En déduire que si

$$U(t,s) := e^{-itH_0} \tilde{U}(t,s) e^{isH_0},$$

pour $u \in D(H_0)$, $U(t,s)u$ est une solution de (0.1.16).

Exercice (Théorème de Perron-Frobenius)

Soit $(X, \Sigma, \delta\mu)$ un espace mesuré. Soit T un opérateur borné sur $\mathcal{H} = L^2(X, \delta\mu)$. On dit que T *préserve la positivité* si $Tu \geq 0$ p.p. pour tout $u \in L^2(X, \delta\mu)$ avec $u \geq 0$ p.p.

On dit que T *améliore la positivité* si $Tu > 0$ p.p. pour tout $u \in L^2(X, \delta\mu)$ avec $u \geq 0$ p.p.

1) Soit T un opérateur autoadjoint, borné, qui préserve la positivité. Montrer que pour $f, g \in L^2(Q, \delta\mu)$ à valeurs réelles, on a:

$$|(f, Tg)| \leq (|f|, T|g|).$$

(Indication: on pourra utiliser la décomposition d'une fonction réelle f en ses parties positive et négative: $f = f_+ - f_-$).

2) On suppose que T améliore la positivité et que $\|T\|$ es une valeur propre de T. Soit $E = \mathrm{Ker}(T - \|T\|\mathbf{1})$ l'espace propre associé. Montrer que E contient une fonction réelle non nulle f. Montrer que $(f_-, Tf_+) = 0$ et en déduire que $f > 0$ p.p.

3) Montrer que $\mathrm{Ker}(T - \|T\|)$ est de dimension 1.

4) Montrer que $-\|T\|$ ne peut pas être valeur propre de T (on pourra considérer l'opérateur T^2).

Exercice

Soit S^2 la sphère unité dans $\mathbf{R}^3$ et $\delta\omega$ la mesure de surface normalisée sur S^2. On rappelle que $\delta\omega$ est invariante par les rotations et que $\int_{S^2} \delta\omega = 1$. Si on paramètre S^2 par:

$$[0,\pi] \times]-\pi, \pi] \ni (\theta, \varphi) \mapsto (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \in S^2,$$

alors

$$\delta\omega = \frac{1}{4\pi}\delta\theta\delta\varphi.$$

On définit l'opérateur $T : L^2(S^2, \delta\omega) \to L^2(S^2, \delta\omega)$ par:

$$Tf(u) := \int_{S^2} \epsilon^{u.v} f(v)\delta\omega,$$

où $u.v$ est le produit scalaire entre u et v considérés comme vecteurs dans $\mathbf{R}^3$.

1) Montrer que T est un opérateur borné, compact, autoadjoint sur $L^2(\Omega, \delta\omega)$.

2) Montrer que la fonction constante égale à 1 est un vecteur propre de T et calculer la valeur propre λ_1 associée.

3) En déduire que $\|T\| = \lambda_1$, et que λ_1 est valeur propre simple de T.

Exercice

Soit $u_1, \dots, u_n \in S^2$. On définit:

$$H(u_1, \dots, u_n) = -\sum_{i=1}^{n} u_i u_{i+1},$$

où on a posé $u_{n+1} := u_1$.

1) Montrer que

$$\int_{S^2 \times \cdots \times S^2} \epsilon^{-H(u_1,\dots,u_n)} \delta\omega(u_1)\dots\delta\omega(u_n) = \mathrm{Tr}(T^n).$$

2) Soit $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots$ les valeurs propres de T (répétées avec leur multiplicité). Soit k la multiplicité de λ_2, (de telle sorte que $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_{k+1} > \lambda_{k+2}$).

Montrer que

$$\sum_{j \geq k+2} (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^n = o(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n, \text{ quand } n \to \infty.$$

On pourra montrer le résultat auxilliaire suivant:

soit (u_k) une suite décroissante de nombres réels positifs, avec $u_1 < 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j (u_j)^n = 0.$$

3) Montrer que

$$\frac{1}{n}\ln \int \epsilon^{-H} \delta\omega(u_1)\dots\delta\omega(u_n) = \ln(\lambda_1) + \frac{k}{n}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n + o(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n.$$

Exercice

Soit T un opérateur autoadjoint compact sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et f une fonction convexe bornée définie sur le spectre de T, telle que $f(T)$ est un opérateur à trace.

1) Montrer que si $u \in \mathcal{H}$, $\|u\| = 1$ on a:

$$f((u, Tu)) \leq (u, f(T)u).$$

2) En déduire que

$$\mathrm{Tr} f(T) \geq \sum_{n\geq 0} f((e_n, Te_n)),$$

si (e_n) est une base orthonormée de $\mathcal{H}$.

Exercice

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, T un opérateur fermé, de domaine $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}$.

1) On associe à T la forme quadratique $Q(u,u) := \|Tu\|^2$, de domaine $\mathcal{D}(T)$, qui est fermée positive. On note par T^*T l'opérateur autoadjoint associé. Vérifier que

$$\mathcal{D}(T^*T) = \{u \in \mathcal{D}(T) | Tu \in \mathcal{D}(T^*)\}.$$

2) On pose $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Montrer que $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(|T|)$ et que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(|T|)$.

3) Montrer qu'il existe une unique isométrie partielle: $U : \mathrm{Ker}T^{\perp} \to \overline{\mathrm{Im}(T)}$ telle que $T = U|T|$.

Exercice Soient A, B deux opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On suppose que $A+B$ est autoadjoint sur $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) =: \mathcal{D}$ (en particulier on suppose que $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ est dense dans $\mathcal{H}$).

1) On pose pour $s \neq 0$:

$$T(s) := \frac{1}{s}(\epsilon^{\imath sA}\epsilon^{\imath sB} - \epsilon^{\imath s(A+B)}).$$

Montrer que si $u \in \mathcal{D}$, on a:

$$\lim_{s\to 0} T(s)u = 0.$$

2) Montrer que la convergence de $T(s)$ vers 0 est uniforme sur tout ensemble compact (pour la topologie de $\mathcal{H}$) de $\mathcal{D}$.

3) Montrer que si $u \in \mathcal{D}$, l'ensemble

$$\{\epsilon^{\imath s(A+B)}u,\ s \in [-1,1]\}$$

est un sous ensemble compact de $\mathcal{D}$.

4) En déduire que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\epsilon^{\imath tA}\epsilon^{\imath tB} - \epsilon^{\imath t(A+B)})\epsilon^{\imath s(A+B)}u = 0, \text{ uniformément pour } s \in [-1,1].$$

5) On rappelle que pour A_1, A_2 deux opérateurs bornés:

$$A_1^n - A_2^n = \sum_{k=0}^{n-1} A_1^k(A_1 - A_2)A_2^{n-1-k}.$$

En déduire que pour $t \in \mathbf{R}$:

$$\|(\epsilon^{\imath tA/n}\epsilon^{\imath tB/n})^n u - \epsilon^{\ it(A+B)}u\| \leq n \sup_{|s|\leq|t|} \|(\epsilon^{\imath tA/n}\epsilon^{\imath tB/n} - \epsilon^{\imath t(A+B)/n})\epsilon^{\imath s(A+B)}u\|.$$

6) En déduire que:

$$\epsilon^{\imath t(A+B)} = \text{s}-\lim_{n\to\infty}(\epsilon^{\imath tA/n}\epsilon^{\imath tB/n})^n. \text{ (formule de Trotter).}$$

Exercice Soit H^2 le sous espace des fonctions développables en série entière dans le disque unité:

$$H^2 := \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

On munit H^2 du produit scalaire:

$$(g, f) := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} a_n.$$

1) Soit $V \in B(H^2)$ l'opérateur de multiplication pour z. Montrer que V est la transformée de Cayley de l'opérateur T de multiplication par $\imath\frac{1+z}{1-z}$, et calculer $Im(T \pm \imath)$.

2) Soit $V \in B(H^2)$ l'opérateur défini par $Vf(z) := zf(z^2)$. Montrer que V est une isométrie, transformée de Cayley d'un opérateur symétrique fermé, d'indices de défaut $0, +\infty$.

3) Soit pour $t \geq 0$, $Q_t \in B(H^2)$ défini par:

$$Q_t f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-t} c_n z^n.$$

Montrer que Q_t est un semigroupe fortement continu d'opérateurs autoajoints, positifs, et calculer son générateur infinitésimal A ($Q_t = \epsilon^{-tA}$). A est il autoadjoint?

4) Montrer que $\ln(n) \in \sigma_{\text{p}}(A)$, pour $p \in N^*$.

Exercice 1.

Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$. On note respectivement par x l'opérateur de multiplication par x de domaine $\mathcal{D}(x) = \{u \in L^2 | xu \in L^2\}$, et par D l'opérateur $\imath^{-1}\partial_x$ de domaine $\mathcal{D}(D) = \{u \in L^2 | \partial_x u \in L^2\} = H^1(\mathbf{R})$. On rappelle que si f est une fonction mesurable bornée sur $\mathbf{R}$, l'opérateur $f(D)$ est simplement défini par

$$\mathcal{F}(f(D)u)(\xi) := f(\xi)\mathcal{F}u(\xi).$$

Soit $T \in B(\mathcal{H})$ un opérateur borné tel que:

$$[T, f(x)] = 0, \ \forall f \in C_\infty(\mathbf{R}),$$

où $C_\infty(\mathbf{R})$ désigne l'espace des fonctions continues nulles à l'infini.

1) Soit Ω la fonction $\pi^{-1/4}\epsilon^{-x^2/2}$. Montrer qu'il existe une fonction mesurable h sur $\mathbf{R}$ telle que $T\Omega = h(x)\Omega$.

2) En déduire que $Tu = h(x)u$ et que $h \in L^\infty(\mathbf{R})$.

3) Soit maintenant $T \in B(\mathcal{H})$ un opérateur borné tel que

$$[T, f(x)] = 0, \ [T, g(D)] = 0, \ \forall f, g \in C_\infty(\mathbf{R}).$$

Montrer que $T = \lambda \mathbf{1}$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$. *Indication: on pourra considérer les opérateurs* $\epsilon^{\imath q D}$, *pour* $q \in \mathbf{R}$.

Exercice 2. Opérateurs de création annihilation

1) Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}, dx)$. On fixe une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ avec $0 \leq \chi(x) \leq 1$ et $\chi(x) \equiv 1$ dans un voisinage de 0.

On pose $R_n = \chi(\frac{x}{n})\chi(\frac{D}{n})$. On admettra les propriétés suivantes de R_n qui sont d'ailleurs faciles à démontrer:

a) si $u \in L^2$ alors $R_n u \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et $R_n u \to u$ dans L^2 quand $n \to \infty$,

b) si $u \in L^2$ et $(D \pm \imath x)u \in L^2$ (au sens distributions), alors $(D \pm \imath x)R_n u \to (D \pm \imath x)u$ dans L^2 quand $n \to \infty$,

c) si $u \in L^2$ et $(D^2 + x^2)u \in L^2$ (au sens distributions), alors $(D^2 + x^2)R_n u \to (D^2 + x^2)u$ dans L^2 quand $n \to \infty$.

1) On définit les opérateurs non bornés suivants:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(D - \imath x), \mathcal{D}(a) = \mathcal{S}(\mathbf{R}),\ c = \frac{1}{\sqrt{2}}(D + \imath x), \mathcal{D}(c) = \mathcal{S}(\mathbf{R}).$$

Déterminer a^* et c^* et vérifier que $c \subset a^*$, $a \subset c^*$. En déduire que a et c sont fermables, on notera leur fermeture par $\bar{a}$ et $\bar{c}$.

2) Montrer que

$$\|au\|^2 = \frac{1}{2}\|Du\|^2 + \frac{1}{2}\|xu\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2,\ \|cu\|^2 = \frac{1}{2}\|Du\|^2 + \frac{1}{2}\|xu\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2,\ u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}),$$

et en déduire $\mathcal{D}(\bar{a})$ et $\mathcal{D}(\bar{c})$.

3) Déduire de cette caractérisation de $\mathcal{D}(\bar{a})$ et $\mathcal{D}(\bar{c})$ que $\bar{c} \subset \bar{a}^*$ et $\bar{a} \subset \bar{c}^*$

4) Justifier soigneusement l' identité:

$$\|(D - \imath x)u\|^2 = \|Du\|^2 + \|xu\|^2 - \|u\|^2,\ u \in \mathcal{D}(a^*).$$

Indication: on pourra utiliser les opérateurs R_n *introduits plus haut.*

5) En déduire que $\bar{a}^* = \bar{c}$, $\bar{c}^* = \bar{a}$.

6) Soit $\Omega \in L^2(\mathbf{R})$ la fonction $\pi^{-1/4}\epsilon^{-x^2/2}$. Montrer que $\mathrm{Ker} a = \mathbf{C}\Omega$.

Exercice 3. Oscillateur harmonique

On garde les notations des exercices précédents. On notera désormais l'opérateur $\bar{a}$ simplement par a, et donc $\bar{c}$ par a^*.

1) Vérifier l'identité suivante:

$$\|(D^2 + x^2)u\|^2 = \|D^2u\|^2 + \|x^2u\|^2 + 2\|xDu\|^2 - 2\|u\|^2,\ u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}).$$

2) En déduire que si $u \in L^2$ et $(D^2 + x^2)u \in L^2$ alors $D^2u \in L^2$ et $x^2u \in L^2$.

3) En déduire que l'opérateur $H_0 := \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ de domaine $\mathcal{D}(D^2) \cap \mathcal{D}(x^2)$ est autoadjoint.

4) Vérifier les identités suivantes valables sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$:

$$aa^* - a^*a = \mathbf{1}, H_0 = a^*a.$$

5) En déduire que $\mathbf{N} \subset \sigma(H_0)$, où $\sigma(H_0)$ désigne le spectre de H_0.

Indication: on pourra considérer les vecteurs $(a^*)^n\Omega$.

6) On définit le commutateur $[H_0, a]$ comme forme quadratique sur $\mathcal{D}(H_0)$ par:

$$[H_0, a](u, u) := (H_0u, a^*u) - (au, H_0u),\ u\imath n\mathcal{D}(H_0).$$

Justifier soigneusement que $[H_0, a](u, u) = (u, a^*u)$.

7) Montrer que le groupe unitaire $\epsilon^{-\imath tH_0}$ préserve $\mathcal{D}(a)$ et $\mathcal{D}(a^*)$. Montrer les identités:

$$\epsilon^{\imath tH_0}a^*\epsilon^{-\imath tH_0} = \epsilon^{\imath t}a^*,\ \epsilon^{\imath tH_0}a\epsilon^{-\imath tH_0} = \epsilon^{-\imath t}a.$$

Indication: on pourra dériver en t *la quantité* $(v, \epsilon^{\imath tH_0}a^*\epsilon^{-\imath tH_0}u)$ *pour* u, v *dans un domaine bien choisi.*

8) En déduire les identités suivantes sur $\mathcal{D}(D) \cap \mathcal{D}(x)$:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\imath tH_0}D\epsilon^{-\imath tH_0} &= \cos tD - \sin tx,\\ \epsilon^{\imath tH_0}x\epsilon^{-\imath tH_0} &= \cos tx + \sin tD.\end{aligned}$$

9) Soit U l'opérateur $\epsilon^{\imath 2\pi H_0}$. Montrer que U commute avec les opérateurs $f(x)$ et $g(D)$ pour tout $f, g \in C_\infty(\mathbf{R})$. En déduire que $U = \mathbf{1}$ puis que $\sigma(H_0) = \mathbf{N}$.