Examen de Master 2 ANEDP

Durée 3 heures.

9 Janvier 2008.

Exercice 1. Une preuve du théorème de Radon-Nikodym

Soit X un ensemble muni d'une $\sigma-$algèbre $\mathcal{B}$. Si μ est une mesure positive finie sur $(X, \mathcal{B})$ et $A \in \mathcal{B}$, on dit que μ est *portée* par A si $\mu(E) = \mu(E \cap A)$ pour tout $E \in \mathcal{B}$.

On rappelle que si λ, μ sont deux mesures positives finies sur $(X, \mathcal{B})$, on écrit $\lambda \ll \mu$ (λ est absolument continue par rapport à μ) si

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) = 0, \quad \forall\, E \in \mathcal{B}.$$

1) Soit λ, μ deux mesures positives finies sur $(X, \mathcal{B})$ et soit $\varphi := \lambda + \mu$. Montrer qu'il existe $g \in L^2(X, d\varphi)$ telle que pour tout $u \in L^2(X, d\varphi)$ on a

$$\int_X u(x) d\lambda = \int_X u(x) g(x) d\varphi.$$

2) En utilisant que pour tout $E \in \mathcal{B}$ on a $\lambda(E) \leq \varphi(E)$ en déduire que pour tout $E \in \mathcal{B}$ on a :

$$0 \leq \int_E g(x) d\varphi \leq \varphi(E),$$

puis que $0 \leq g(x) \leq 1$, φ presque partout.

3) En changeant g sur un ensemble de mesure nulle pour φ, on peut donc supposer que $0 \leq g(x) \leq 1$ pour tout $x \in X$. Déduire de (1) l'identité :

$$\int_X (1 - g(x)) u(x) d\lambda = \int_X u(x) g(x) d\mu, \quad \forall\, u \in L^2(X, d\varphi).$$

4) Soit $A = \{x \in X |\, 0 \leq g(x) < 1\}$ et $B = \{x \in X |\, g(x) = 1\}$. Montrer que $\mu(B) = 0$.
Indication : utiliser l'identité démontrée au point 3).

5) On suppose dans la suite de l'exercice que $\lambda \ll \mu$. Montrer que la mesure λ est portée par l'ensemble A.

6) Déduire du point 3) que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\int_E (1 - g^{n+1}(x)) d\lambda = \int_E g(x)(1 + g(x) + \cdots + g^n(x)) d\mu, \quad E \in \mathcal{B}.$$

Montrer que quand $n \to +\infty$, l'intégrale de gauche converge vers

$$\int_E d\lambda$$

et l'intégrale de droite converge vers

$$\int_E h(x) d\mu$$

où

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g^n(x).$$

(Justifier soigneusement la convergence et le caractère mesurable de h.)

7) En déduire que $h \in L^1(X, d\mu)$ et $d\lambda = h d\mu$.

Exercice 2.

Soit A un opérateur borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On suppose que A est injectif d'image dense.

1) Rappeler la définition de l'opérateur A^{-1}. Sous quelle condition A^{-1} est il un opérateur borné ?

2) Montrer que A^* est aussi injectif d'image dense et montrer l'identité :

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

3) Soit maintenant B un autre opérateur borné sur $\mathcal{H}$. On définit de manière naturelle les opérateurs BA^{-1} de domaine $\mathrm{Im}A$ et $A^{-1}B$ de domaine $\{u \in \mathcal{H} |\ Bu \in \mathrm{Im}A\}$.

Montrer l'identité :

$$(BA^{-1})^* = (A^*)^{-1}B^*.$$

Exercice 3.

On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(]0,1[)$. On rappelle que l'espace de Sobolev $H^1(]0,1[)$ est l'espace des fonctions $u \in L^2(]0,1[)$ telles que u' (défini au sens des distributions sur $]0,1[)$ soit aussi dans $L^2(]0,1[)$, muni de la norme

$$\|u\|_{H^1} = (\int_0^1 |u|^2(x) + |u'|^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}.$$

On rappelle aussi que $C^\infty([0,1])$ désigne l'espace des restrictions à $]0,1[$ des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}$, qui coincide avec l'espace des fonctions infiniment dérivables sur $]0,1[$, dont toutes les dérivées sont bornées sur $]0,1[$. La trace en 0 :

$$C^\infty([0,1]) \ni u \mapsto u(0) \in \mathbf{C}$$

s'étend de manière unique en une application continue de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathbf{C}$ notée encore $u \mapsto u(0)$.

Sur $\mathcal{H}$ on dénote par H_1 et H_2 les opérateurs $-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ de domaines respectifs :

$$D(H_1) = H^1(]0,1[), \quad D(H_2) = \{u \in H^1(]0,1[) |\ u(0) = 0\}.$$

1) Montrer que H_1 et H_2 sont fermés de domaines denses.

2) Montrer que le spectre de H_1 est égal à $\mathbf{C}$.

3) Montrer que le spectre de H_2 est vide.

Exercice 4.

Soit H un opérateur symétrique de domaine dense sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On rappelle que H est alors fermable et que $(\overline{H})^* = H^*$. H est dit *essentiellement autoadjoint* si $\overline{H}$ est autoadjoint.

Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant (*théorème de Wüst*) :

Soit H_0 un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$ et V un opérateur symétrique. On suppose que $D(H_0) \subset D(V)$ et qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\|Vu\| \leq \|H_0 u\| + b\|u\|, \quad \forall\, u \in D(H_0).$$

Alors $H_0 + V$ de domaine $D(H_0)$ est essentiellement autoadjoint.

1) Soit H un opérateur symétrique. Montrer que

$$\|(H \pm \mathrm{i})u\|^2 = \|Hu\|^2 + \|u\|^2, \quad \forall\, u \in D(H),$$

$$\mathrm{Ker}(H^* \mp \mathrm{i}) = \mathrm{Im}(H \pm \mathrm{i})^{\perp},$$

et que

$$\overline{\mathrm{Im}(H + \mathrm{i})} = \mathrm{Im}(\overline{H} + \mathrm{i}).$$

2) Montrer que si $\mathrm{Ker}(H^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$, alors H est essentiellement autoadjoint.

3) On suppose dans toute la suite que les hypothèses du théorème de Wüst vérifiées. Montrer que pour tout $0 \le t < 1$ on a :

$$(1-t)\|H_0 u\| \le \|(H_0 + tV)u\| + tb\|u\|, \quad \forall\, u \in D(H_0).$$

4) Soit $h \in \mathcal{H}$. Montrer que pour tout $0 \le t < 1$ il existe $\phi_t \in D(H_0)$ tel que

$$\|\phi_t\| \le \|h\|, \quad (H_0 + tV + \mathrm{i})\phi_t = h.$$

Indication : étudier l'opérateur $H_0 + tV$.

5) Déduire des points 1) et 3) que les quantités

$$(1-t)\|H_0\phi_t\|, \quad (1-t)\|V\phi_t\|$$

sont uniformément bornées pour $0 \le t < 1$.

6) On pose maintenant

$$\psi_t = h + (1-t)V\phi_t.$$

Montrer que $\|\psi_t\|$ est uniformément borné et que

$$\lim_{t \to 1^-} (h - \psi_t | u) = 0 \quad \forall\, u \in D(H_0).$$

En déduire la limite faible de ψ_t quand $t \to 1^-$.

7) Montre que si $h \in \mathrm{Ker}((H_0 + V)^* - \mathrm{i})$ alors $h = 0$. En déduire le théorème de Wüst.