Théorie Spectrale et Mécanique Quantique
Examen de Master 2 du 9 Janvier 2007

Notations et rappels.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $U(t)$ un groupe unitaire fortement continu sur $\mathcal{H}$. Son générateur infinitésimal est l'opérateur autoadjoint H tel que $U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$. On rappelle que $u \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ si et seulement si

$$\sup_{0<|t|<1} |t|^{-1}\|U(t)u - u\| < \infty,$$

et

$$\|Hu\| = \sup_{0<|t|<1} |t|^{-1}\|U(t)u - u\|.$$

On note par $H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions qui sont localement dans H^2, c'est à dire telles que pour tout ouvert borné Ω, on ait $\partial_x^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq 2$.

I. Opérateurs autoadjoints qui commutent

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et H_1, H_2 deux opérateurs autoadjoints sur $\mathcal{H}$. On dit que H_1 et H_2 *commutent* si pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a:

$$[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1 H_1}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_2 H_2}] = 0,$$

où $[A, B] = AB - BA$.

1) Montrer que si H_1 et H_2 commutent, alors $[f(H_1), g(H_2)] = 0$ pour toutes fonctions $f, g \in C_\infty(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_2}$, $t \in \mathbb{R}$ est un groupe unitaire fortement continu.

3) Montrer que son générateur infinitésimal H commute avec H_1 et avec H_2.

4) Soit $F \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature avec $F(\lambda) \equiv 1$ près de 0, et soit $F_n(\lambda) = F(n^{-1}\lambda)$.
Montrer que si $u \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$, alors $u_n = F_n(H_1)F_n(H_2)u \in \mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(H_2)$ et $u_n \to u$ quand $n \to \infty$ pour la topologie du graphe de $\mathcal{D}(H)$.

5) En déduire que l'opérateur $H_1 + H_2$ de domaine $\mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(H_2)$ est essentiellement autoadjoint et que sa fermeture est égale à H. On notera dans la suite H simplement par $H_1 + H_2$.

Opérateurs de multiplication.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. On note par H l'opérateur de multiplication par f sur $\mathcal{H}$.

On suppose que f n'a pas de points critiques, c'est à dire que $\nabla_x f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On rappelle que cette hypothèse entraine que près de tout point x_0, on peut trouver des coordonnées locales $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ telles $y_1 = f(x)$.

1) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un borélien de $\mathbb{R}$ et soit $u \in \mathcal{H}$. Montrer que:

$$(u|1\!\!1_\Omega(H)u) = \sup_{\epsilon, R>0} \int_{f^{-1}(\Omega)} 1\!\!1_{\{|\nabla_x f(x)|>\epsilon\}}(x) 1\!\!1_{\{|x|\leq R\}} |u(x)|^2 dx.$$

2) En utilisant la propriété de f rappelée plus haut, montrer que

$$\int_{f^{-1}(\Omega)} 1\!\!1_{\{|\nabla_x f(x)|>\epsilon\}}(x) 1\!\!1_{\{|x|\leq R\}} |u(x)|^2 dx = 0$$

si $|\Omega| = 0$.

3) En déduire que la mesure spectrale de H est absolument continue par rapportà la mesure de Lebesgue.

III. Hamiltonien de Stark

Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$. Soit $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}k)$ la *transformation de Fourier unitaire*:

$$\mathcal{F}u(k) := (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k.x} u(x) \mathrm{d}x.$$

On rappelle que

$$\mathcal{F} D_{x_i} \mathcal{F}^{-1} = k_i, \quad \mathcal{F} x_i \mathcal{F}^{-1} = -D_{k_i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où on pose $D_y = i^{-1}\nabla_y$.

On note par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la classe de Schwartz sur $\mathbb{R}^n$. On utilisera la notation $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à la fois pour des fonctions de la variable x et pour des fonctions de la variable k.

On considère l'opérateur de Schrödinger suivant:

$$H_0 := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}^2 + E x_1,$$

décrivant une particule quantique dans un champ électrique constant $\vec{E} = (E, 0, \cdots, 0)$. Sans perte de généralité on supposera que $E = 1$. On notera par $x = (x_1, x')$ $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ la variable dans $\mathbb{R}^n$, $k = (k_1, k')$ la variable duale.

1) Vérifier que H_0 est symétrique sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2) Vérifier à l'aide de l'exercice I que l'opérateur:

$$\frac{1}{2}(k')^2 - D_{k_1}$$

est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que son domaine est

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}k) | \frac{1}{2}(k')^2 u - D_{k_1} u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}k)\}$$

où les dérivées sont prises au sens distributions.

3) montrer que $\sigma(\frac{1}{2}(k')^2 - D_{k_1}) = \mathbb{R}$ et que la mesure spectrale de $\frac{1}{2}(k')^2 - D_{k_1}$ est purement absolument continue.

Indication: on pourra faire une transformée de Fourier partielle pour se ramener à un opérateur de multiplication et utiliser l'exercice II.

4) Soit $R : L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}k)$ l'opérateur unitaire:

$$Ru(k) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1^3/6} \mathcal{F}u(k).$$

Montrer que l'opérateur

$$R^{-1}(\frac{1}{2}(k')^2 - D_{k_1})R \text{ de domaine } R^{-1}(\mathcal{D}(\frac{1}{2}(k')^2 - D_{k_1}))$$

est une extension autoadjointe de H_0, que l'on notera encore par H_0 dans la suite.

Indication: vérifier que R préserve $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5) Montrer que:

$$\mathcal{D}(H_0) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) | \frac{1}{2}D_x^2 u + x_1 u \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

où $\frac{1}{2}D_x^2 u + x_1 u$ est défini au sens distributions.

6) Montrer que $\mathcal{D}(H_0) \subset H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et que pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné, il existe $C > 0$ tel que:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|H_0 u\| + \|u\|), \quad u \in \mathcal{D}(H_0).$$

IV. Théorie de la diffusion pour les Hamiltoniens de Stark

On considère toujours l'opérateur H_0 de l'exercice III.

1) Montrer que $\sigma(H_0) = \mathbb{R}$ et que la mesure spectrale de H_0 est absolument continue.

2) Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un potentiel réel. On suppose que V peut s'écrire sous la forme:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x),$$

où V_1 est une fonction à *support compact*, V_2 est une fonction mesurable bornée et V_1 est borné par rapport à $-\Delta_x$ avec borne relative 0.

Montrer que V est H_0-borné avec borne relative 0.

Indication: on pourra utiliser le point III.5.

3) En déduire que si $n = 3$, l'opérateur

$$H = \frac{1}{2}D_x^2 + x_1 + \frac{q}{|x|}, \quad q \in \mathbb{R}$$

est autoadjoint sur $\mathcal{D}(H_0)$.

4) Montrer en utilisant le point III.3 que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi(t,x,k)} \mathcal{F}u(k) \mathrm{d}k,$$

où:

$$\Psi(t,x,k) = k.x - tx_1 - tk^2/2 + k_1 t^2/2 - t^3/6.$$

5) Soit u une fonction telle que $\mathcal{F}u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $0 < \epsilon < 1$.

Vérifier que:

$$|\partial_{k_1}\Psi(t,x,k)| \geq C(1+t^2), \text{ uniformément dans } |x_1| \leq (\frac{1}{2} - \epsilon)|t|^2,$$

et en déduire que

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}u(x)| \leq C_N(1+|t|)^{-N}, \text{ pour tout } N \in \mathbb{N},$$

uniformément dans $|x_1| \leq (\frac{1}{2} - \epsilon)|t|^2$.

Indication: on pourra utiliser la méthode de la phase non stationnaire en utilisant l'identité $\partial_{k_1}\Psi(t,x,k)^{-1}\partial_{k_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi(t,x,k)} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi(t,x,k)}$ *et en intégrant par parties.*

6) En remarquant que
$$x_j' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi(t,x,k)} = (-\mathrm{i}\partial_{k_j'} - tk_j')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi(t,x,k)},$$
vérifier rapidement de la même manière que:
$$|(x_j')^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} u(x)| \leq C_{N,\alpha}(1+|t|)^{-N}, \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}, alpha \in \mathbb{N}.$$
uniformément dans $|x_1| \leq (\frac{1}{2} - \epsilon)|t|^2$.

7) En déduire que:
$$\|\mathbb{1}_{\{|x_1| \leq (\frac{1}{2}-\epsilon)|t|^2\}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_N(1+|t|)^N, \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}.$$

8) Soit V un potentiel réel tel que:
$$|V(x)| \leq C(1+|x|)^{-\frac{1}{2}-\epsilon}, \quad \epsilon > 0.$$
Montrer que si u est une fonction comme dans le point IV.5 on a:
$$\|V\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} u\| \leq C(1+|t|)^{-1-\epsilon_0}, \text{ pour un } \epsilon_0 > 0.$$

9) Soit $H = H_0 + V$ avec Vcomme dans la question IV.8. Montrer l'existence des *opérateurs d'onde*:
$$\Omega^\pm := \text{s-}\lim_{t \to \pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}.$$
Indication: utiliser l'argument de Cook.