Théorie spectrale et mécanique quantique
Examen de Master 2 du 26 janvier 2006

Notations et rappels.

On rappelle que si H est un opérateur autoadjoint sur un Hilbert $\mathcal{H}$ et T un opérateur borné tel que $[T,(z-H)^{-1}]=0$ pour tout $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ alors $[T,f(H)]=0$ pour toute fonction mesurable bornée f.

On rappelle que si H_n, $n\in\mathbb{N}$ est une suite d'opérateurs autoadjoints tels que $(z-H_n)^{-1}$ converge en norme vers $(z-H)^{-1}$ pour tout $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, où H est un opérateur autoadjoint, alors $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_n}$ converge fortement vers $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

On note par $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ la transformation de Fourier:

$$\mathcal{F}u(\xi)=\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}u(x)dx.$$

On note par $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ la classe de Schwartz.

Exercice 1.

Soit H_0 un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, V un opérateur autoadjoint borné sur $\mathcal{H}$ et $H=H_0+V$, autoadjoint de domaine $\mathcal{D}(H_0)$. On suppose que le spectre de H_0 est purement continu. On pose

$$W_t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0},$$

et on suppose qu'il existe un ensemble dense $\mathcal{D}\subset\mathcal{H}$ tel que si $u\in\mathcal{D}$, alors $\|V\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}u\|\in L^1(\mathbb{R},dt)$. Par le critère de Cook, les opérateurs d'onde:

$$W_\pm:=\text{s-}\lim_{t\to\pm\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}\text{ existent.}$$

On rappelle les relations d'entrelacement

$$W_\pm H_0=HW_\pm.$$

1) Vérifier que:

$$W_+u-W_tu=\mathrm{i}\int_t^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sH}V\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sH_0}u\mathrm{d}s,\ u\in\mathcal{D}.$$

2) Montrer que:

$$\|W_+u-W_tu\|^2=-2\mathrm{Im}\int_t^{+\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}sH_0}W_+^*V\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sH_0}u,u)ds,\ u\in\mathcal{D}.$$

3) On se place maintenant dans le cas où $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R},dx)$ et H_0 est l'opérateur de multiplication par x. On fixe un vecteur $f\in\mathcal{H}$ et on note par $|f\rangle\langle f|$ l'opérateur $u\mapsto f(f,u)$. On considére l'opérateur autoadjoint $H=H_0+V$, pour $V=|f\rangle\langle f|$.

Montrer que pour $f,g\in L^2(\mathbb{R})$

$$(f,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}g)=\mathcal{F}(\bar{f}g)(t),$$

et que

$$\|V\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}u\|=\|f\||\mathcal{F}(u\bar{f})(t)|.$$

En déduire que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors les opérateurs d'onde $W_\pm$ existent.

Indication: on cherchera un sous espace dense $\mathcal{D}$ convenable.

4) Montrer que si $f, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a:

$$\begin{aligned}
\|W_+ u - W_t u\|^2 &\leq 2 \left(\int_t^{+\infty} |(f, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx} u)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{+\infty} |(W_+^* f, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx} u)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2 \left(\int_t^{+\infty} |\mathcal{F}(\bar{f} u)|^2(s) ds\right)^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{F}(W_+^* \bar{f} u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq 2(2\pi)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{+\infty} |\mathcal{F}(\bar{f} u)|^2(s) ds\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

5) En déduire que pour $t, t' \geq 0$:

$$\|W_t u - W_{t'} u\| \leq 2(8\pi)^{1/4} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \left(\left(\int_t^{+\infty} |\mathcal{F}(\bar{f} u)|^2(s) ds\right)^{1/4} + \left(\int_{t'}^{+\infty} |\mathcal{F}(\bar{f} u)|^2(s) ds\right)^{1/4} \right).$$

6) On suppose toujours que $H_0 = x$, et on considére maintenant l'opérateur $H = H_0 + c|f\rangle\langle f|$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$. On fixe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. On pose $H_n = H_0 + c|f_n\rangle\langle f_n|$, et $W_t(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_n}\mathrm{e}^{-H_0}$.

Montrer que $(H_n - z)^{-1}$ converge en norme vers $(H - z)^{-1}$ pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et en déduire que $W_t(n)$ converge fortement vers W_t quand $n \to \infty$.

7) Montrer que l'inégalité du point 5) est encore valable pour $f \in L^2(\mathbb{R})$. En déduire que l'opérateur d'onde:

$$W_+ = \text{s-}\lim_{t\to+\infty} W_t \text{ existe.}$$

Exercice 2. Oscillateur harmonique

Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$. On note respectivement par x l'opérateur de multiplication par x de domaine $\mathcal{D}(x) = \{u \in L^2 | xu \in L^2\}$, et par D l'opérateur $\mathrm{i}^{-1}\partial_x$ de domaine $\mathcal{D}(D) = \{u \in L^2 | \partial_x u \in L^2\} = H^1(\mathbb{R})$. On rappelle que si f est une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$, l'opérateur $f(D)$ est simplement défini par

$$\mathcal{F}(f(D)u)(\xi) := f(\xi)\mathcal{F}u(\xi).$$

On fixe une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $0 \leq \chi(x) \leq 1$ et $\chi(x) \equiv 1$ dans un voisinage de 0.

On pose $R_n = \chi(\frac{x}{n})\chi(\frac{D}{n})$. On admettra les propriétés suivantes de R_n qui sont d'ailleurs faciles à démontrer:

a) si $u \in L^2$ alors $R_n u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $R_n u \to u$ dans L^2 quand $n \to \infty$,

b) si $u \in L^2$ et $(D \pm \mathrm{i}x)u \in L^2$ (au sens distributions), alors $(D \pm \mathrm{i}x)R_n u \to (D \pm \mathrm{i}x)u$ dans L^2 quand $n \to \infty$,

c) si $u \in L^2$ et $(D^2 + x^2)u \in L^2$ (au sens distributions), alors $(D^2 + x^2)R_n u \to (D^2 + x^2)u$ dans L^2 quand $n \to \infty$.

1) Montrer l'identité suivante:

$$\|(D \pm \mathrm{i}x)u\|^2 = \|Du\|^2 + \|xu\|^2 \pm \|u\|^2, \ u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Montrer que cette identité se prolonge à l'espace des $u \in L^2$ tels que $(D \pm \mathrm{i}x)u \in L^2$ (au sens distributions).

En déduire que les opérateurs

$$a := \frac{1}{\sqrt{2}}(D - \mathrm{i}x),\ a^* := \frac{1}{\sqrt{2}}(D + \mathrm{i}x) \text{ de domaine} \mathcal{D}(x) \cap \mathcal{D}(D)$$

sont fermés.

2) Montrer l'identité suivante:

$$\|(D^2 + x^2)u\|^2 = \|D^2u\|^2 + \|x^2u\|^2 + 2\|xDu\|^2 - 2\|u\|^2,\ u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

3) En déduire que si $u \in L^2$ et $(D^2 + x^2)u \in L^2$ alors $D^2u \in L^2$ et $x^2u \in L^2$.

4) En déduire que l'opérateur $H_0 := \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ de domaine $\mathcal{D}(D^2) \cap \mathcal{D}(x^2)$ est autoadjoint.

5) On note par Ω la fonction $\pi^{-1/4}\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Montrer que l'espace $\mathrm{Vect}\{(a^*)^n\Omega,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Indication: on pourra commencer par montrer que $(a^*)^n\Omega$ est de la forme $P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$ où P_n est un polynome de degré n.

6) Vérifier les identités suivantes valables sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$aa^* - a^*a = \mathbb{1}, H_0 = a^*a.$$

7) En déduire que $\sigma(H_0) = \mathbb{N}$, où $\sigma(H_0)$ désigne le spectre de H_0.

Indication: on pourra considérer les vecteurs $(a^*)^n\Omega$ pour $n \in \mathbb{N}$.

8) On définit le commutateur $[H_0, a]$ comme forme quadratique sur $\mathcal{D}(H_0)$ par:

$$[H_0, a](u, u) := (H_0u, a^*u) - (au, H_0u),\ u \in \mathcal{D}(H_0).$$

Justifier soigneusement que $[H_0, a](u, u) = (u, a^*u)$.

8) Montrer que le groupe unitaire $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}$ préserve $\mathcal{D}(a)$ et $\mathcal{D}(a^*)$. Montrer les identités:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}a^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}a^*,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}a.$$

Indication: on pourra dériver en t la quantité $(v, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}a^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}u)$ pour u, v dans un domaine bien choisi.

9) En déduire les identités suivantes sur $\mathcal{D}(D) \cap \mathcal{D}(x)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} &= \cos tD - \sin tx,\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} &= \cos tx + \sin tD.\end{aligned}$$