Examen de DEA du 21 janvier 2005

Notation

Pour A_1, A_2 deux ensembles, on note $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \cup A_2) \backslash A_1 \cap A_2$ la différence symétrique de A_1 et A_2.

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}$ un borélien, et H un opérateur autoadjoint, on rappelle qu'on note par $\mathbb{1}_\Omega(H)$ le projecteur spectral sur Ω pour H.

Pour $Y \subset X$, on note par $\mathbb{1}_Y$ la fonction indicatrice de Y.

$C_\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini.

Exercice 1

Soit H un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On suppose que pour tout borélien $\Omega \subset \mathbb{R}$ on a:

$$\mathbb{1}_\Omega(H) = 0 \text{ ou } \mathbb{1}_\Omega(H) = \mathbb{1}.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $H = \lambda \mathbb{1}$.

Exercice 2

Soit U un opérateur unitaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable.

1) Montrer que deux espaces propres de U associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ n'est pas une valeur propre de U.

2) Montrer que $U\mathrm{e}^{-i\theta}$ est la transformée de Cayley d'un opérateur autoadjoint T. En déduire qu'il existe S autoadjoint, avec $0 \le S \le 2\pi\mathbb{1}$, tel que:

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}.$$

3) Montrer que

$$\text{s-}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} U^n = P,$$

où P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(U - \mathbb{1})$.

Exercice 3

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré où μ est une mesure de probabilité. On considèrera l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(X, \Sigma, \mathrm{d}\mu)$. Si $A, B \in \Sigma$, on écrit $A \simeq B$ modulo μ si $\mu(A \Delta B) = 0$ ou de manière équivalente si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ μ p.p.

Pour une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable, on note par $T(f)$ l'opérateur de multiplication par f:

$$T(f)u := fu, \; u \in \mathcal{D}(T(f)) := \{u \in L^2(X, \Sigma, \mathrm{d}\mu) |\; fu \in L^2(X, \Sigma, \mathrm{d}\mu)\}.$$

1) Montrer que $T(f)$ est autoadjoint.

2) Montrer que pour $h \in C_\infty(\mathbb{R})$, on a:

$$h(T)(f) = T(h \circ f).$$

3) En déduire que si $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un borélien, on a:

$$\mathbb{1}_\Omega(T(f)) = T(\mathbb{1}_{f^{-1}(\Omega)}).$$

Pour une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable, on définit l'*image essentielle de* f:

$$f_{\text{ess}}(X) := \{\lambda \in \mathbb{R} | \forall \epsilon > 0,\ \mu(f^{-1}[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]) > 0\}.$$

4) Montrer que $\sigma(T(f)) = f_{\text{ess}}(X)$.

Exercice 4

On garde les notations de l'exercice précédent. Soit maintenant $\varphi : X \to X$ une bijection telle que φ et φ^{-1} sont mesurables. On note par $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'opérateur unitaire associé à φ:

$$Uu(x) := u(\varphi^{-1}(x)).$$

1) Calculer $UT(f)U^{-1}$.

2) On suppose maintenant que φ est *ergodique*, c'est à dire que si $A \in \Sigma$ et $A \simeq \varphi(A)$ modulo μ alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. En d'autres termes les seuls ensembles invariants par φ à ensembles négligeables près sont X et $\emptyset$.

Soit $g \in L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ tel que $Ug = g$. Montrer que si $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un borélien, alors $g^{-1}(\Omega) \simeq \varphi(g^{-1}(\Omega))$ modulo μ. En déduire en utilisant l'exercice 1 que g est une fonction constante sur X.

3) En déduire le théorème suivant: (*théorème ergodique de Von Neumann*): si $\varphi : X \to X$ est ergodique, alors pour tout $f \in L^2(X, \mathrm{d}\mu)$, on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f \circ \varphi^{-n} = \int_X f \mathrm{d}\mu,$$

où la limite est au sens $L^2(X, \mathrm{d}\mu)$.

Exercice 5

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, H un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$. On suppose que H admet un *vecteur cyclique*, c'est à dire qu'il existe un vecteur $\Omega \in \mathcal{D}(H)$, avec $\|\Omega\| = 1$ tel que le sous espace vectoriel $\{u = f(H)\Omega,\ f \in C_\infty(\mathbb{R})\}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

1) Vérifier que Ω est cyclique pour H ssi $\mathrm{Vect}\{(z - H)^{-1}\Omega,\ z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}\}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

2) Soit $\mathrm{d}\mu(\lambda)$ la mesure borélienne $(\Omega, \mathrm{d}E_\lambda(H)\Omega)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un opérateur unitaire $U : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$, tel que:

$$U\Omega = 1,\ Uf(H)U^{-1} = T(f),\ f \in C_\infty(\mathbb{R}),$$

où on note par $T(f)$ l'opérateur de multiplication par f sur $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$.

3) Soit L un opérateur borné, tel que $[L, (z - H)^{-1}] = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Vérifier que $[L, f(H)] = 0$, pour tout $f \in C_\infty(\mathbb{R})$.

4) Montrer qu'il existe une fonction h mesurable bornée telle que $L = h(H)$.