## Examen de DEA du 15 janvier 2004

### Rappels sur les espaces de Sobolev

On rappelle que $H^s(\mathbb{R})$ pour $s \in \mathbb{R}$ est l'espace de Sobolev des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telles que $(1+\xi^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$. La norme $\|u\|_0$ est la norme $L^2$ usuelle notée $\|u\|$.

On rappelle que si $0 < s_1 < s_2$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $C_\epsilon$ tel que

$$\|u\|_{s_1} \le \epsilon\|u\|_{s_2} + C_\epsilon\|u\|,\ \forall\, u \in H^{s_2}(\mathbb{R}).$$

On rappelle aussi que pour $s > \frac{1}{2}$, $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte continûment dans $C^0(\mathbb{R})$ et il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| \le C\|u\|_s.$$

Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert (borné ou non) et $s \in \mathbb{N}$, on note $H^s(I)$ l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(I)$ telles que $\partial_x^\alpha u \in L^2(I)$ pour tout $0 \le \alpha \le s$. On rappelle que les opérateurs de restriction au bord

$$\begin{array}{l} C_0^\infty(\overline{I}) \to \mathbb{C} \\ u \mapsto u(a) \end{array}$$

où $a$ est une extrémité de $I$ s'étendent en des opérateurs continus de $H^s(I)$ dans $\mathbb{C}$ pour $s \ge 1$. (Ici $C_0^\infty(\overline{I})$ désigne l'espace des restrictions à $I$ de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, qui est un sous espace dense de $H^s(I)$). Le sous espace fermé de $H^1(I)$ formé des éléments nuls sur les extrémités de $I$ est noté $H_0^1(I)$. On rappelle aussi que $H_0^1(I)$ est la fermeture de $C_0^\infty(I)$ dans $H^1(I)$. Un autre résultat que l'on rappelle est le fait que si $I$ est borné, l'injection de $H^s(I)$ dans $L^2(I)$ est compacte pour $s > 0$.

Finalement on notera par $H_D^2(I)$ l'espace $H^2(I) \cap H_0^1(I)$, égal au sous espace fermé de $H^2(I)$ formé des éléments nuls sur les extrémités de $I$.

### Partie I

Soit $I = ]a, +\infty[$ et $V : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant une limite finie en $+\infty$:

$$l_+ := \lim_{x\to+\infty} V(x).$$

Soit $\mathcal{H} = L^2(I)$. On note par $H$ l'opérateur

$$H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x),$$

de domaine $H_D^2(I)$. On a vu en cours que $H$ est autoadjoint.

1) On note par $H_0$ l'opérateur

$$H_0 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + l_+,$$

de domaine $H_D^2(I)$. Montrer que $H_0 \ge l_+$ et donc que $\sigma(H_0) \subset [l_+, +\infty[$.

2) Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction avec $\int_{\mathbb{R}} |\chi^2(x)|\mathrm{d}x = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, on pose

$$u_n(x) = n^{-\frac{1}{4}}\chi((x-n)n^{-\frac{1}{2}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-n)\xi}.$$

Montrer que pour $n$ assez grand $u_n \in \mathcal{D}(H_0)$. Vérifier que $(u_n)$ est une suite de Weyl pour $H_0$ pour l'énergie $l_+ + \xi^2$. En déduire que $[l_+, +\infty[ \subset \sigma_{\text{ess}}(H_0)$ puis que $\sigma_{\text{ess}}(H_0) = [l_+, +\infty[$.

3) Soit $R(x) = V(x) - l_+$. Vérifier que $R(x)(H_0 + \mathrm{i})^{-1}$ est compact. En déduire que

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [l_+, +\infty[.$$

**Partie II**

Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant des limites finies en $\pm\infty$:

$$l_\pm := \lim_{x \to \pm\infty} V(x),$$

et soit $a_- < a_+$ deux points de $\mathbb{R}$. On considère la forme quadratique $Q$ de domaine $\mathcal{D}(Q) = H^1(\mathbb{R})$ définie par:

$$Q(u, v) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}x}(x) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x) + V(x)\overline{u}(x)v(x)\mathrm{d}x + \overline{u}(a_-)v(a_-) + \overline{u}(a_+)v(a_+).$$

1) Montrer que $Q$ est une forme quadratique fermée, bornée inférieurement. On notera par $H$ l'opérateur autoadjoint associé.

2) Montrer que

$$\mathcal{D}(H) = \{u \in H^2(\mathbb{R}) |\ u(a_-) = u(a_+) = 0\},$$

et que $Hu = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u + Vu$, pour $u \in \mathcal{D}(H)$.

3) Posons $I_- = ]-\infty, a_-[$, $I_0 = ]a_-, a_+[$ et $I_+ = ]a_+, +\infty[$. On considère maintenant la décomposition orthogonale

$$L^2(\mathbb{R}) = L^2(I_-) \oplus L^2(I_0) \oplus L^2(I_+) =: \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_+.$$

Vérifier que

$$\mathcal{D}(H) = H^2_D(I_-) \oplus H^2_D(I_0) \oplus H^2_D(I_+),$$

et que la décomposition de $H$ correspondante est

$$H = H_- \oplus H_0 \oplus H_+,$$

où $\mathcal{D}(H_\epsilon) = H^2_D(I_\epsilon)$, $H_\epsilon u = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u + V_\epsilon u$, pour $\epsilon = -, 0, +$ et $V_\epsilon$ est la restriction de $V$ à $I_\epsilon$.

4) Montrer que le spectre de $H_0$ est purement discret et formé d'une suite de valeurs propres $\{\lambda_n\}$ tendant vers $+\infty$.

5) En utilisant les résultats de la partie I, montrer que

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [\inf(l_-, l_+), +\infty[.$$

En déduire que $H$ possède une suite de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel.

**Partie III**

1) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $H$ un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D}(H)$ et $U$ un opérateur unitaire. Vérifier que $\tilde{H} = UHU^{-1}$ de domaine $U\mathcal{D}(H)$ est autoadjoint et que

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tilde{H}} = U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}U^{-1},\ t \in \mathbb{R}.$$

2) Sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ on considère l'opérateur autoadjoint

$$H_0 := \mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\ \mathcal{D}(H_0) = H^1(\mathbb{R}).$$

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$, et soit $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'opérateur de multiplication par la fonction $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$. Montrer que l'image de $H^1(\mathbb{R})$ par $U$ est l'espace

$$UH^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) | \mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u - \phi' u \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

3) Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'opérateur

$$H := \mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + V(x),\ \mathcal{D}(H) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) | \mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u + Vu \in L^2(\mathbb{R})\}$$

est autoadjoint.

4) Donner une formule explicite pour le groupe unitaire $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}$ puis pour le groupe unitaire $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$.

5) On suppose maintenant que la fonction $V$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $I : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R})$ l'opérateur de prolongement par 0:

$$Iu(x) = \begin{cases} u(x),\ x \geq 0, \\ 0,\ x < 0. \end{cases}$$

Déterminer l'opérateur $I^*$. On définit l'opérateur $U(t) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^+))$ par

$$U(t) := I^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}I.$$

Montrer que $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto U(t)$ est un semigroupe d'isométries fortement continu.

6) Soit $-\mathrm{i}A$ le générateur infinitésimal de $U(t)$, de telle sorte que $U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA}$. Déterminer explicitement l'opérateur $A$.

7) Montrer que $A$ est symétrique et déterminer si $A$ possède des extensions autoadjointes.