Examen de DEA du 18 juin 2004
Notes du cours autorisées

Partie I

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et H un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$. On notera par $(u|v)$ le produit scalaire sur $\mathcal{H}$, qui est linéaire par rapport à v, antilinéaire par rapport à u. On suppose que $H \geq 0$. Pour $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$ on note par $|v_1\rangle\langle v_2|$ l'opérateur $\mathcal{H} \ni u \mapsto v_1(v_2|u)$.

1) Soit $\phi \in \mathcal{H}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose:

$$H_\alpha := H + \alpha|\phi\rangle\langle\phi|.$$

Montrer que pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ on a:

$$(\mathbb{1} + \alpha|(H-z)^{-1}\phi\rangle\langle\phi|)^{-1} = \mathbb{1} - \alpha\frac{|(H-z)^{-1}\phi\rangle\langle\phi|}{1+\alpha F(z)},$$

pour $F(z) = (\phi|(H-z)^{-1}\phi)$.

2) En déduire que:

$$(H_\alpha - z)^{-1} = (H-z)^{-1} - \alpha\frac{|(H-z)^{-1}\phi\rangle\langle(H-\overline{z})^{-1}\phi|}{1+\alpha F(z)},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Partie II.

Notations

Soit H un opérateur autoadjoint *non borné* sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On introduit l'échelle d'espaces 'de Sobolev' abstraits suivante: On pose $\langle H\rangle = (|H|+1)$ et $\mathcal{H}_2(H) = \mathcal{D}(H)$, avec la norme $\|u\|_2 = \|\langle H\rangle u\|$, $\mathcal{H}_1(H) = \mathcal{D}(|H|^{\frac{1}{2}})$ avec la norme $\|u\|_1 = \|(\langle H\rangle^{\frac{1}{2}}u\|$, $\mathcal{H}_{-i}(H) = \mathcal{H}_i(H)^*$ pour $i = 1, 2$. Finalement on pose aussi $\mathcal{H}_0(H) = \mathcal{H}$. L'opérateur $\langle H\rangle^{\frac{1}{2}}$ s'étend comme un opérateur borné entre $\mathcal{H}_i(H)$ et $\mathcal{H}_{i-1}(H)$ pour $-1 \leq i \leq 2$, et on a les inclusions strictes suivantes:

$$\mathcal{H}_2(H) \subset \mathcal{H}_1(H) \subset \mathcal{H}_0(H) \subset \mathcal{H}_{-1}(H) \subset \mathcal{H}_{-2}(H),$$

qui sont continues d'images denses. Par abus de notation, le crochet de dualité entre $\mathcal{H}_{-i}(H)$ et $\mathcal{H}_i(H)$ sera encore noté $(u|v)$, $u \in \mathcal{H}_{-i}(H)$, $v \in \mathcal{H}_i(H)$ pour $i = 0, 1, 2$.

1) Soit $\phi \in \mathcal{H}_{-1}(H)$. Montrer que la forme quadratique

$$V_\phi(u,u) := |(\phi|u)|^2$$

est bornée par rapport à la forme $Q(u,u) = (u, Hu)$ de domaine $\mathcal{H}_1(H)$, avec borne relative 0.

2) En déduire qu'il existe un unique opérateur autoadjoint, noté $H \dot{+} \alpha|\phi\rangle\langle\phi|$ associé à la forme quadratique $Q + \alpha V_\phi$.

3) Soit Q une forme quadratique positive, fermée de domaine $\mathcal{D}(Q)$. On supposera que $Q \geq 1\!\!1$. Soit V_n, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ une famille de formes quadratiques sur Q telles que

$$\sup_{u\in\mathcal{D}(Q),Q(u,u)\leq 1}(V_n - V_\infty)(u,u) \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

c'est à dire que $V_n - V_\infty \to 0$ dans la topologie de la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{D}(Q), \mathcal{D}(Q)^*)$.

On suppose que V_∞ est $Q-$bornée avec borne relative 0. Montrer qu'il en est de même de V_n pour tout $n \geq N_0$.

Soit H_n, pour $n \geq N_0$ ou $n = \infty$ l'opérateur autoadjoint associé à $Q + V_n$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - z)^{-1} = (H_\infty - z)^{-1},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R},$$

la limite étant la limite en norme d'opérateurs.

4) En appliquant le point 3) et en approchant $\phi \in \mathcal{H}_{-1}(H)$ par une suite $\{\phi_n\} \in \mathcal{H}$, justifier la formule:

$$(H \dot{+} \alpha|\phi\rangle\langle\phi| - z)^{-1} = (H - z)^{-1} - \alpha\frac{|(H-z)^{-1}\phi\rangle\langle(H-\overline{z})^{-1}\phi|}{1+\alpha F(z)},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Partie III

On considère dans cette partie un vecteur $\phi \in \mathcal{H}_{-2}(H)\backslash\mathcal{H}$.

1) On note par $H_{\min}$ la restriction de H au domaine

$$\mathcal{D}(H_{\min}) := \{u \in \mathcal{D}(H)|(\phi|u) = 0\}.$$

Soit $f \in \mathcal{H}$. Montrer qu'il existe deux suites $f_n, \psi_n \in \mathcal{D}(H)$ telles que

$$f_n \to f \text{ dans } \mathcal{H},\ \|\psi_n\| = 1,\ (\phi|\psi_n) \to \infty,\ (\phi|f_n)/(\phi|\psi_n) \to 0.$$

Vérifier que $f_n - \psi_n(\phi|f_n)/(\phi|\psi_n) \in \mathcal{D}(H_{\min})$ et que $f_n \to f$ in $\mathcal{H}$.

2) En déduire que $H_{\min}$ est un opérateur symétrique, à domaine dense. On notera son adjoint par $H_{\min}^*$.

3) Montrer que les espaces de défaut $\mathcal{K}_\pm$ de $H_{\min}$, définis par $\mathcal{K}_\pm := \mathrm{Ker}(H_{\min}^* \mp \mathrm{i})$ sont égaux à

$$\mathcal{K}_\pm = \mathbb{C}(H \mp i)^{-1}\phi.$$

On pose

$$g_\pm := \|(H \mp i)^{-1}\phi\|^{-1}(H \mp i)^{-1}\phi,$$

de sorte que $\|g_\pm\| = 1$.

On rappelle que:

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}(H_{\min}^*) = \{u = \hat{u} + \lambda_+ g_+ + \lambda_- g_-,\ \hat{u} \in \mathcal{D}(H_{\min}),\ \lambda_\pm \in \mathbb{C}\},\\ &H_{\min}^* u = H\hat{u} + \mathrm{i}\lambda_+ g_+ - \mathrm{i}\lambda_- g_-,\end{aligned}$$

(la décomposition de $u \in \mathcal{D}(H_{\min}^*)$ donnée ci-dessus étant unique). On rappelle aussi que les extensions autoadjointes de $H_{\min}$ sont données par la famille $H(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ où:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(H(\theta)) = \{u = \hat{u} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\lambda_- g_+ + \lambda_- g_-,\ \hat{u} \in \mathcal{D}(H_{\min}),\ \lambda_- \in \mathbb{C}\},\\
&H(\theta)u = H\hat{u} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\lambda_- g_+ - \mathrm{i}\lambda_- g_-.
\end{aligned}$$

4) Déterminer pour quelle valeur du paramètre θ on a $H(\theta) = H$.

5) Vérifier que

$$\mathcal{D}(H_{\min}^*) = \{u = \tilde{u} + \mu\frac{H}{H+\mathrm{i}}g_+,\ \tilde{u} \in \mathcal{D}(H), \mu \in \mathbb{C}\}.$$

On paramétrera dorénavant les éléments de $\mathcal{D}(H_{\min}^*)$ par le couple $(\tilde{u}, \mu(u)) \in \mathcal{D}(H) \times \mathbb{C}$.

Montrer que

$$H_{\min}^* u = H\tilde{u} - \mu(u)(H+\mathrm{i})^{-1}g_+.$$

6) Vérifier que

$$\mathcal{D}(H(\theta)) = \{u \in \mathcal{D}(H_{\min}^*) | (\phi|\tilde{u}) = \gamma\mu(u)\},$$

pour

$$\gamma = -\mathrm{i}\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}},$$

avec la convention que $\gamma = \infty$ si $\theta = 0$, et que pour $\gamma = \infty$ la condition plus haut signifie que $\mu(u) = 0$. On notera dorénavant par H_γ l'opérateur $H(\theta)$ si $\gamma = -\mathrm{i}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

7) Soit $u \in \mathcal{D}(H_\gamma)$, pour $\gamma \neq 0, \infty$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et

$$(H_\gamma - z)u = h \in \mathcal{H}.$$

On rappelle (voir question 6)) que

$$u = \tilde{u} + \frac{1}{\gamma}(\phi|\tilde{u})\frac{H}{H+\mathrm{i}}g_+,\ \text{pour } \tilde{u} \in \mathcal{D}(H).$$

Vérifier que

$$h = (H - z)\tilde{u} - \frac{1}{\gamma}(\phi|\tilde{u})\frac{1 + Hz}{H + \mathrm{i}}g_+,$$

et que:

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= (H - z)^{-1}h + \frac{1}{\gamma}(\phi|\tilde{u})\frac{1 + Hz}{H + \mathrm{i}}(H - z)^{-1}g_+,\\
(\phi|\tilde{u}) &= ((H - \overline{z})^{-1}\phi|h) + \frac{1}{\gamma}(\phi|\tilde{u})(\phi|\frac{1 + Hz}{H - z}g_+).
\end{aligned}$$

8) En déduire que

$$u = (H - z)^{-1}h + \frac{((H - \overline{z})^{-1}\phi|h)}{\gamma - (g_+|\frac{1+Hz}{H-z}g_+)}(H - z)^{-1}\phi.$$

Indication: On pourra utiliser l'identité:

$$\frac{H}{H+\mathrm{i}} + \frac{1+Hz}{(H-z)(H+\mathrm{i})} = \frac{H-\mathrm{i}}{H-z}.$$

9) En déduire que si $\gamma \neq 0, \infty$, on a:

$$(H_\gamma - z)^{-1} = (H-z)^{-1} + \frac{1}{\gamma - Q(z)} |(H-z)^{-1}\phi\rangle\langle(H-\overline{z})^{-1}\phi|,$$

pour

$$Q(z) = (\phi| \frac{1+Hz}{H-z} \frac{1}{H^2+1} \phi).$$

10) On suppose maintenant que $\phi \in \mathcal{H}_{-1}(H) \backslash \mathcal{H}$. Montrer que

$$Q(z) = (\phi|(H-z)^{-1}\phi) - (\phi| \frac{H}{H^2+1} \phi).$$

En déduire que l'opérateur $H \dot{+} \alpha|\phi\rangle\langle\phi|$ construit dans la partie II est égal à H_γ pour une valeur de γ que l'on précisera.