Examen de DEA du 6 janvier 2003

1 Partie I

1.1 Notations et préliminaires

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$ le cercle unité et $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} || z| < 1\}$ le disque unité ouvert. On paramètre S^1 par $\theta \in [0, 2\pi[$ en posant $z = e^{i\theta}$, et on définit l'espace $L^2(S^1; \mathbb{C})$ des fonctions de carré intégrable sur S^1 muni de la norme:

$$\|u\|^2 := (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2 d\theta.$$

On rappelle que si $\phi_n(\theta) := e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, la famille $\{\phi_n\}$ est une base orthonormale de $L^2(S^1; \mathbb{C})$. Pour $u \in L^2(S^1; \mathbb{C})$, on notera par $(u_n) \in l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ la suite de ses coefficients de Fourier:

$$u_n := (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} u(\theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

de telle sorte que:

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \phi_n.$$

1.2 Projecteur de Toeplitz

Soit $P \in B(L^2(S^1; \mathbb{C}))$ l'opérateur défini par:

$$(Pu)_n := \begin{cases} u_n, \ n \geq 0, \\ 0, \ n < 0. \end{cases}$$

1) Montrer que P est un projecteur orthogonal. On notera par $\mathcal{H}$ l'image de $L^2(S^1; \mathbb{C})$ par P.

2) Vérifier que si $u \in L^2(S^1; \mathbb{R})$, on a:

$$u_{-n} = \overline{u}_n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

3) En déduire que si $u \in L^2(S^1; \mathbb{R})$ est une fonction à valeurs réelles, on a:

$$\|Pu\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|. \tag{1.1}$$

4) Soit $u = \sum_{n \geq 0} u_n \phi_n \in \mathcal{H}$. Montrer que la série

$$U(z) := \sum_{n \geq 0} u_n z^n,$$

converge localement uniformément dans D vers une fonction dans $C^\infty(D)$.

5) En posant $z = re^{i\theta}$, on note:

$$u_r(\theta) := U(re^{i\theta}).$$

Montrer que $\lim_{r \to 1} u_r = u$ dans $L^2(S^1; \mathbb{C})$.

1.3 Opérateurs de multiplication

Soit $a \in C^0(S^1;\mathbb{C})$ une fonction continue sur S^1. On rappelle qu'en utilisant la paramétrisation de S^1 par $[0,2\pi]$, $a \in C^0(S^1;\mathbb{C})$ si et seulement si $a(\theta)$ est continue et $2\pi-$périodique sur $[0,2\pi]$. On notera encore par a l'opérateur de multiplication par a agissant sur $L^2(S^1;\mathbb{C})$:

$$au(\theta) := a(\theta)u(\theta).$$

On munit $C^0(S^1;\mathbb{C})$ de la norme $\|a\|_\infty = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |a(\theta)|$. On rappelle que $C^\infty(S^1;\mathbb{C})$ est dense dans $C^0(S^1;\mathbb{C})$ et que pour $a \in C^\infty(S^1;\mathbb{C})$, $u \in L^2(S^1;\mathbb{C})$ on a:

$$(au)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n-m}u_m.$$

On rappelle aussi que si $a \in C^\infty(S^1;\mathbb{C})$, on a:

$$|a_n| \leq C_k(1+|n|)^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

où (a_n) est la suite des coefficients de Fourier de a.

6) En déduire que l'espace $\mathcal{F}$ défini par:

$$\mathcal{F} := \{a \in C^0(S^1;\mathbb{C}) | \exists N \text{ tel que } a_n = 0, \text{ pour } |n| \geq N\},$$

est dense dans $C^0(S^1;\mathbb{C})$.

Soit A un opérateur borné agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On définit le *spectre essentiel* de A, noté $\sigma_{\text{ess}}(A)$ par: $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ si et seulement si il existe une suite $(u_k) \in \mathcal{H}$ avec:

$$\|u_k\| = 1,\ (A-\lambda)u_k \to 0,\ u_k \rightharpoonup 0,$$

où la notation $u_k \rightharpoonup 0$ signifie que u_k tend faiblement vers 0. Une telle suite est appelée *suite de Weyl* pour (A,λ).

7) Soit $a \in C^0(S^1;\mathbb{C})$. Montrer que

$$\sigma_{\text{ess}}(a) = a(S^1),$$

où $a(S^1)$ désigne l'image de S^1 par a.

8) Vérifier que si $\lambda \in a(S^1)$, on peut construire une suite de Weyl (u_k) pour (a,λ) où les fonctions u_k sont à valeurs réelles.

1.4 Opérateurs de Toeplitz

Pour $a \in C^0(S^1;\mathbb{C})$, on note par $T(a)$ l'opérateur borné sur $\mathcal{H}$ défini par:

$$T(a) : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

$$T(a)u := PaPu.$$

De tels opérateurs sont appelés *opérateurs de Toeplitz*.

9) Montrer que si $a \in C^0(S^1;\mathbb{C})$ alors:

$$[a,P] = aP - Pa \text{ est un opérateur compact sur } L^2(S^1;\mathbb{C}). \tag{1.2}$$

(On pourra approcher la fonction a par une suite $(a_k) \in \mathcal{F}$).

10) En déduire les propriétés suivantes:

$$T(a_1)T(a_2) = T(a_1a_2) + K,\ K \text{ compact},$$
$$T(a)^* = T(\overline{a}).$$

11) Soit $a \in C^0(S^1;\mathbb{C})$. Pour $\lambda \notin a(S^1)$ construire un opérateur de Toeplitz $T(b)$ tel que:

$$T(b)\,(T(a) - \lambda \mathbb{1}) = \mathbb{1} + K,$$

où K est compact. En déduire que $\sigma_{\text{ess}}(T(a)) \subset a(S^1)$.

12) Montrer que $a(S^1) \subset \sigma_{\text{ess}}(T(a))$. (On pourra considérer une suite de Weyl pour a dans $L^2(S^1;\mathbb{C})$ et utiliser (1.2), (1.1)).

On a donc finalement:

$$\sigma_{\text{ess}}T(a) = a(S^1). \tag{1.3}$$

1.5 Indice des opérateurs de Toeplitz

Soit $a \in C^0(S^1;\mathbb{C})$ avec $a(\theta) \neq 0$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$.

13) Montrer qu'il existe $b \in C^0(S^1;\mathbb{C})$ tel que:

$$T(b)T(a) = \mathbb{1} + K_1,$$
$$T(a)T(b) = \mathbb{1} + K_2,$$

où K_1, K_2 sont compacts.

En déduire que $T(a)$ est un opérateur de Fredholm.

14) Soit $a \in C^0(S^1;\mathbb{C})$ tel que $a(\theta_0) = 0$, pour $\theta_0 \in [0, 2\pi]$. En utilisant (1.3), montrer que $T(a)$ n'est pas un opérateur de Fredholm. On pourra utiliser la conséquence suivante de la Prop. II.5.4 du cours:

si A est Fredholm sur $\mathcal{H}$ il existe un opérateur borné B et un opérateur compact K tel que $BA = \mathbb{1} + K$.

15) Fixons maintenant $a(\theta) = e^{ik\theta}$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\text{Ind}(T(a)) = -k.$$

2 Partie II

2.1 Notation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné régulier à bord C^∞ Γ. On note par $\mathrm{d}x$ la mesure de volume sur Ω et par $\mathrm{d}\sigma$ la mesure de surface induite sur Γ. On note par $C^\infty(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions C^∞

jusqu'au bord sur Ω, et par $H^k(\Omega), H^s(\Gamma)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ les espaces de Sobolev sur Ω et Γ respectivement.

On note par $\gamma : C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\Gamma)$ l'opérateur de restriction au bord dont on rappelle qu'il se prolonge en un opérateur continu surjectif entre $H^k(\Omega)$ et $H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour $k \geq 1$. On écrira parfois simplement u ou $u_{|\Gamma}$ pour γu quand le contexte permettra d'éviter les confusions. On rappelle d'autre part que

$$\|\gamma u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \epsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} + C_\epsilon \|u\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall \epsilon > 0.$$

On rappelle enfin la formule de Green:

$$\int_\Omega \overline{\nabla v}(x).\nabla u(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega \overline{v}(x)\Delta u(x)\mathrm{d}x + \int_\Gamma \overline{v}(\sigma)\partial_\nu u(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \ v \in H^1(\Omega), \ u \in H^2(\Omega),$$

où ∂_ν désigne la dérivée normale extérieure.

2.2 Problème de Robin

Soit $n \in C^\infty(\Gamma)$ une fonction à valeurs réelles. Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathrm{d}x)$. On considère sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ les formes quadratiques Q_0, Q', Q de domaine $H^1(\Omega)$ définies par:

$$Q_0(u,v) := \int_\Omega \overline{\nabla u}(x).\nabla v(x)\mathrm{d}x,$$

$$Q'(u,v) := \int_\Gamma n(\sigma)\overline{u}(\sigma)v(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

$$Q(u,v) = Q_0(u,v) + Q'(u,v).$$

1) Montrer que Q_0 est symétrique, bornée inférieurement et fermée.

2) Montrer que Q' est Q_0-bornée avec borne relative 0 et que Q est symétrique bornée inférieurement et fermée.

3) Soit H l'opérateur autoadjoint associé à Q, et $\lambda \gg 1$ tel que $H + \lambda \mathbb{1}$ soit inversible. Soit $u \in D(H)$ et $(H+\lambda)u = f$. En admettant que $D(H) \subset H^2(\Omega)$, montrer qu'on a:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, \text{ dans } \Omega, \\ \partial_\nu u + n(\sigma)u = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

4) Montrer que H possède une base hilbertienne de vecteurs propres ϕ_n associés à une suite (λ_n) de valeurs propres tendant vers $+\infty$ quand $n \to \infty$.