Examen M2 Introduction à la Théorie Spectrale

Durée 3h. Notes de cours autorisées

Le 19 Novembre 2018.

Exercice 1. Soit ρ une mesure borélienne positive sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\int_{\mathbb{R}} |x|^n d\rho(x) < \infty$. Les réels

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\rho(x), \ n \in \mathbb{N}$$

sont appelés les *moments* de la mesure ρ.

1) Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les moments d' une mesure ρ alors

$$(1) \sum_{i,j=0}^{N} \bar{z}_i z_j a_{i+j} \geq 0, \ \forall N \in \mathbb{N}, z_0, \dots, z_N \in \mathbb{C}.$$

Solution : on pose $P(x) = \sum_{i=0}^{N} z_i x^i$ et la somme plus haut est $\int |P(x)|^2 d\rho(x)$.

2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant la condition (1). On définit une forme sesquilinéaire sur l' espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes :

$$(\sum_{n=0}^{N} \beta_n X^n | \sum_{m=0}^{M} \alpha_m X^m) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \bar{\beta}_n \alpha_m a_{m+n}.$$

Vérifier que $(P|P) \geq 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{C}[X] : (P|P) = 0\}$ et $\mathcal{H}$ l 'espace de Hilbert complété de $\mathbb{C}[X]/\mathcal{I}$ pour $(\cdot|\cdot)$.

Solution : c'est évident, par le même argument que dans 1). Il faut vérifier que $\mathcal{I}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$, ce qui suit de Cauchy-Schwarz appliqué à $(\cdot|\cdot)$. 3) On considère

$A : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l 'application linéaire $P(X) \mapsto XP(X)$. Montrer que A induit sur $\mathcal{H}$ un opérateur non borné $\hat{A}$ de domaine $\mathbb{C}[X]/\mathcal{I}$. Montrer que $\hat{A}$ est symétrique. *: Solution : par Cauchy Schwarz on a*

$$(AP|AP) = (P|A^2P) \leq (A^2P|A^2P)^{\frac{1}{2}}(P|P)^{\frac{1}{2}},$$

donc $\mathcal{I}$ est invariant par A et A passe au quotient. On a si $Q(X) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n X^n$ et $P(X) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m X^m$:

$$\begin{aligned} Q|AP) = & \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=1}^{M+1} \bar{\beta}_n \alpha_{m-1} a_{n+m} \\ = & \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \bar{\beta}_n \alpha_m a_{n+m+1} \\ = & \sum_{n=1}^{N+1} \sum_{m=0}^{M} \bar{\beta}_{n-1} \alpha_m a_{n+m} = (AQ|P), \end{aligned}$$

donc A est bien symétrique.

4) Soit c l 'application définie par $c : P \mapsto \bar{P}$ où $\bar{P}(X) = \overline{P(\overline{X})}$. Montrer que c induit sur $\mathcal{H}$ une application antilinéaire $\hat{c}$ avec $\hat{c} : \mathrm{Dom}\hat{A} \to \mathrm{Dom}\hat{A}$ et $\hat{c}\hat{A} = \hat{A}\hat{c}$.

Solution : on a $(cQ|P) = (cP|Q)$ donc $(cP|cP) = (c^2P|P) = (P|P)$ donc c préserve $\mathcal{I}$ et induit $\hat{c}$ sur $\mathcal{H}$, de plus $\hat{c} : \mathrm{Dom}\hat{A} \to \mathrm{Dom}\hat{A}$. On a clairement $cA = Ac$ ce qui implique que $\hat{c}\hat{A} = \hat{A}\hat{c}$.

5) Montrer que $\hat{c} : \mathrm{Im}(\hat{A} + \mathrm{i})^{\perp} \to \mathrm{Im}(\hat{A} - \mathrm{i})^{\perp}$ et en déduire que $\hat{A}$ possède des extensions autoadjointes. *: Correction : on déduit de $(cQ|P) = (cP|Q)$ que $(\hat{c}u|v) = (\hat{c}v|u)$ pour $u, v \in \mathcal{H}$. Si $F \subset \mathcal{H}$ on a donc $(\hat{c}F)^{\perp} = \hat{c}(F^{\perp})$. Pour $F = \mathrm{Im}(\hat{A} + \mathrm{i})$, on a comme $\hat{c}$ est anti-linéaire et*

$\hat{c}\hat{A} = \hat{A}\hat{c}$ $\hat{c}F = \mathrm{Im}(\hat{A} - \mathrm{i})$ ce qui donne le résultat. Comme $\hat{c}$ est une involution on a $n^+ = n^-$ (indices de défaut de $\hat{A}$), donc $\hat{A}$ possède des extensions autoadjointes.

6) Montrer qu' il existe une mesure Borélienne ρ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\rho(x), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indication : on pourra considérer une extension autoadjointe de $\hat{A}$ et sa mesure spectrale pour un vecteur de $\mathcal{H}$ bien choisi. Solution : Soit $\tilde{A}$ une extension autoadjointe de $\hat{A}$, Ω l 'image du polynôme $P(X) = 1$ dans $\mathcal{H}$ et $\rho = \mu_{\Omega,\Omega}$ la mesure spectrale de Ω pour $\tilde{A}$. On a $\hat{A} : \mathbb{C}[X]/\mathcal{I} \to \mathbb{C}[X]/\mathcal{I}$ donc $\mathbb{C}[X]/\mathcal{I} \in \mathrm{Dom}\hat{A}^n \subset \mathrm{Dom}\tilde{A}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(\Omega|\tilde{A}^n\Omega) = (1|X^n 1) = a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu_{\Omega,\Omega}(x).$$

Exercice 2. Soit A, B deux opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On suppose

que $A+B$ est autoadjoint sur $\mathrm{Dom}A \cap \mathrm{Dom}B =: \mathcal{D}$ (en particulier on suppose que $\mathrm{Dom}A \cap \mathrm{Dom}B$ est dense dans $\mathcal{H}$). On munit $\mathcal{D}$ de la norme du graphe $\|u\|_{\mathcal{D}} = \|(A+B)u\| + \|u\|$.

1) On pose pour $t \neq 0$:

$$T(t) := \frac{1}{t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(A+B)}).$$

Montrer que si $u \in \mathcal{D}$ alors

$$\lim_{t\to 0} T(t)u = 0.$$

Correction : pour $u \in \mathrm{Dom}(A+B) = \mathrm{Dom}A \cap \mathrm{Dom}B$ on a pour $C = A, B$ ou $A+B$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tC}u = u + \mathrm{i}tCu + o(t),$$

donc

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB}u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}(u + \mathrm{i}tBu + o(t)) = u + \mathrm{i}tAu + \mathrm{i}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}Bu + o(t).$$

Puis comme $v = Bu \in \mathcal{H}$ on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}Bu = Bu + o(1),$$

d' où finalement :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB}u = u + \mathrm{i}t(A+B)u + o(t).$$

Comme d'autre part $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(A+B)}u = u + \mathrm{i}t(A+B)u + o(t)$, on obtient le résultat.

2) Montrer que $\{T(t)u : t \in \mathbb{R}\}$ est borné dans $\mathcal{H}$ pour tout $u \in \mathcal{D}$ puis que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est borné dans $B(\mathcal{D}, \mathcal{H})$. *Correction : $t \mapsto \|T(t)u\|$ est continue, tend vers 0 en 0 et aussi en $\pm\infty$, donc est bornée sur $\mathbb{R}$. On applique ensuite le principe de la borne uniforme pour obtenir que la famille $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est bornée dans $B(\mathcal{D}, \mathcal{H})$. Remarquer que $\mathcal{D}$ est un espace de Banach, comme $A+B$ est fermé.*

3) Montrer que si $K \subset \mathcal{D}$ est compact pour la topologie de $\mathcal{D}$ alors $\lim_{t\to 0} T(t)u = 0$ uniformément pour $u \in K$.

Correction : On a vu que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est borné dans $B(\mathcal{D}, \mathcal{H})$. Il en suit que si $\epsilon > 0$ et $u \in \mathcal{D}$, il existe $\delta, \delta_u > 0$ tel que $\|T(t)v\| \leq \epsilon$ pour tout $v \in B_{\mathcal{D}}(u, \delta_u)$ et $|t| \leq \delta$. On recouvre K par un nombre fini de ces boules, et on obtient le résultat. 4) Montrer que si $u \in \mathcal{D}$ et $T \geq 0$ l'

ensemble $K = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(A+B)}u : s \in [-T, T]\}$ est compact dans $\mathcal{D}$.

Correction : comme $\mathcal{D} = \mathrm{Dom}(A+B)$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}}s(A+B) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. L' application $F : \mathbb{R} \ni s \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}s(A+B)}u \in \mathcal{D}$ est continue, $K = F([-T, T])$ est donc compact dand $\mathcal{D}$ comme image du compact $[-T, T]$.

5) En déduire que pour tout $u \in \mathcal{D}$ on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(A+B)})\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(A+B)}u = 0, \text{ uniformément pour } s \in [-T, T].$$

Correction : suit de 3) et 4).

6) On rappelle que pour A_1, A_2 deux opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ on a :

$$A_1^n - A_2^n = \sum_{k=0}^{n-1} A_1^k (A_1 - A_2) A_2^{n-1-k}.$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(2) \quad \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB/n})^n u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(A+B)}u, \ u \in \mathcal{D}.$$

Correction : on applique l 'identité à $A_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB/n}$, $A_2 = e^{\mathrm{i}t(A+B)/n}$. *On obtient en utilisant que* $\|A_1\| \leq 1$ *:*

$$\|A_1^n u - A_2^n u\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|t|}{n} \|F(\frac{t}{n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(n-k-1)(A+B)/n} u\| \leq |t| \sup_{|s|\leq t} \|F(\frac{t}{n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(A+B)}u\|,$$

ce qui tend bien vers 0 *quand* $n \to +\infty$, *par le point 5).*

7) En déduire la formule de *Trotter-Kato* :

$$(3) \quad \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB/n})^n u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(A+B)}u, \ \forall t \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{H}.$$

Correction : un argument de $\epsilon/3$ *en utilisant la densité de* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{H}$ *et le fait que tous les opérateurs dans la formule sont uniformément bornés en* n.

8) Montrer que la convergence dans (2) et (3) est uniforme pour $t \in [a, b]$. *Correction : dans la question 6) on obtient :*

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tA/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tB/n})^n u - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(A+B)}u\| \leq |t| \sup_{|s|\leq|a|+|b|} \|T(\frac{t}{n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(A+B)}u\|,$$

ce qui tend bien vers 0 *uniformément pour* $t \in [a, b]$. *L' argument de* $\epsilon/3$ *donne aussi la convergence uniforme pour* $u \in \mathcal{H}$.