Devoir n° 1
M2 Introduction à la théorie spectrale
2018-2019

A rendre le 4 Novembre 2019.

Exercice 1. On considère sur l 'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ la forme quadratique

$$Q(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x)\|^2 + V(x)|u(x)|^2 dx,\ \mathrm{Dom}\, Q = C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

où $V \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ est une fonction réelle telle que $\lim_{x\to\infty} V(x) = +\infty$.

1) Montrer que Q est fermable.

2) Soit Q^{cl} la fermeture de Q. Montrer que si on pose $\mathrm{Dom}\,|V|^{\frac{1}{2}} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int |V||u|^2 dx < \infty\}$, alors

$$\mathrm{Dom}\, Q^{\mathrm{cl}} = H^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Dom}\,|V|^{\frac{1}{2}},\ Q^{\mathrm{cl}}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x)\|^2 + V(x)|u(x)|^2 dx.$$

3) Soit H l 'opérateur autoadjoint associé à Q^{cl}. Montrer que H est borné inférieurement et que si $c > 0$ est assez grand alors $(H + c)^{-1}$ est compact sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. On pourra utiliser le critère de compacité de Riesz-Kolmogorov qui dit que $F \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ est précompact ssi

F est borné, $\lim_{R\to\infty} \sup_{f\in F} \|\mathbb{1}_{|x|\geq R} f\| = 0$, $\lim_{y\to 0} \sup_{f\in F} \|\tau_y f - f\| = 0$, où $\tau_y f(x) = f(x - y)$.

Exercice 2. On rappelle qu' un groupe unitaire (fortement continu) sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une famille $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ telle que

1) $U(t)U(s) = U(t + s),\ U(0) = \mathbb{1},\ t, s \in \mathbb{R}$

2) $U(t)^* = U(-t),\ t \in \mathbb{R},$

3) $\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t) \in B(\mathcal{H})$ est continu pour la topologie forte.

Tout groupe unitaire possède un unique générateur H, qui est un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$ défini par

$$\mathrm{Dom}\, H = \{u \in \mathcal{H} : \lim_{t\to 0}(\mathrm{i}t)^{-1}(U(t) - \mathbb{1})u \text{ existe}\},$$
$$Hu = \lim_{t\to 0}(\mathrm{i}t)^{-1}(U(t) - \mathbb{1})u,$$

et on note $U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}$. On voit facilement que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH} \in B(\mathrm{Dom}\, H)$ et que $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH} \in B(\mathrm{Dom}\, H)$ est fortement continu si on munit $\mathrm{Dom}\, H$ de la norme du graphe $\|u\|_H = \|(1+\mathrm{i}H)u\|$.

Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert, $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ un sous espace dense et $\{U_{\mathcal{D}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ une famille d 'opérateurs linéaires de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ telle que

1) $U_{\mathcal{D}}(t)U_{\mathcal{D}}(s)u = U_{\mathcal{D}}(t + s)u,\ U_{\mathcal{D}}(0)u = u,\ t, s \in \mathbb{R}\, u \in \mathcal{D}$

2) $\|U_{\mathcal{D}}(t)u\| = \|u\|,\ t \in \mathbb{R},\ u \in \mathcal{D},$

3) $\lim_{t\to 0}(\mathrm{i}t)^{-1}(U_{\mathcal{D}}(t) - \mathbb{1})u$ existe $\forall u \in \mathcal{D}$.

1) On pose $H_{\mathcal{D}}u = \lim_{t\to 0}(\mathrm{i}t)^{-1}(U_{\mathcal{D}}(t) - \mathbb{1})u$ pour $u \in \mathcal{D}$. Montrer que $H_{\mathcal{D}}$ est symétrique.

2) Montrer que $\mathbb{R} \ni t \mapsto U_{\mathcal{D}}(t)u \in \mathcal{H}$ est continu pour tout $u \in \mathcal{D}$.

3) Montrer que $U_{\mathcal{D}}(t)$ s'étend à $\mathcal{H}$ comme un opérateur unitaire noté $U(t)$ et que $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe unitaire fortement continu sur $\mathcal{H}$. Soit H le générateur de $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Montrer que $H_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{H}$.

4) On note par $\mathcal{E}$ la fermeture de $\mathcal{D}$ dans $\mathrm{Dom}\, H$ pour la norme du graphe. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $f(H) \in B(\mathcal{H}, \mathrm{Dom}\, H)$, que $f(H)$ envoie $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$, puis que $f(H)$ envoie $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}$.

indication : utiliser l' identité $f(H) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH} dt$.

5) Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathrm{Dom}\, H$ pour la norme du graphe, c'est à dire que $H = H_{\mathcal{D}}^{\mathrm{cl}}$.

indication : utiliser le point 4) avec $f_n(\lambda) = f(n^{-1}\lambda))$ *et* $f(0) = 1$.