# Devoir n° 1
# M2 Introduction à la théorie spectrale
# 2018-2019

A rendre le 7 Octobre 2019.

**Exercice 1.**

1) Soit $T_t$ l 'opérateur défini par $T_t u(x) = u(x-t)$, agissant sur $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Calculer la norme de $T_t$ et déterminer vers quels opérateurs et pour quelles topologies $T_t$ converge quand $t$ tend vers 0 puis quand $t$ tend vers $+\infty$.

2) Mêmes questions sur l 'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x^2} dx)$.

**Exercice 2.**

1) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $B(\mathcal{H})$ telles que $A_n \to A$ et $B_n \to B$ pour la topologie forte. Montrer que $A_n B_n \to AB$ pour la topologie forte.

2) On va montrer que l 'application $B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \ni (A, B) \mapsto AB \in B(\mathcal{H})$ n'est pas continue pour la topologie forte, si $\dim \mathcal{H} = \infty$.

2a) Montrer qu' une base de voisinages de $(0, 0)$ pour la topologie forte est donnée par les ensembles

$$U = \{(A, B) \in B(\mathcal{H}) : \|Ae_i\|, \|Be_i\| \leq \epsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

où $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormée de $\mathcal{H}$.

2b) Soit $u_0 \in \mathcal{H}$ avec $u_0\| = 1$ et $\epsilon, e_1, \ldots, e_n$ comme plus haut. Montrer qu'il existe $A \in B(\mathcal{H})$ tel que $Au_0 \notin \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ et $\|A\| \leq \epsilon$.

2c) Montrer qu' il existe $B \in B(\mathcal{H})$ tel que $Be_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\|BAu_0\| = 1$.

2d) En déduire que $B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \ni (A, B) \mapsto AB \in B(\mathcal{H})$ n'est pas continue pour la topologie forte.