# Devoir n° 1
# M2 Introduction à la théorie spectrale
# 2018-2019

A rendre le 7 Octobre 2019.

**Exercice 1.**

1) Soit $T_t$ l 'opérateur défini par $T_t u(x) = u(x-t)$, agissant sur $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Calculer la norme de $T_t$ et déterminer vers quels opérateurs et pour quelles topologies $T_t$ converge quand $t$ tend vers 0 puis quand $t$ tend vers $+\infty$.

**Corrigé** on a évidemment $\|T_t\| = 1$, $\|T_t u\| = \|u\|$ et $\mathrm{w-}\lim_{t\to+\infty} T_t = 0$, donc $T_t$ converge vers 0 uniquement pour la topologie faible. Ensuite on vérifie que $T_t u \to u$ quand $t \to 0$ par exemple pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ donc pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$ par un argument de $\epsilon/2$. On a donc que $T_t \to \mathbb{1}$ quand $t \to 0$ pour la topologie forte et donc aussi pour la topologie faible. Pour voir que $T_t$ ne tend pas vers $\mathbb{1}$ en norme on prend $u_\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ et on a

$$
\begin{aligned}
& T_t u_\lambda(x) - u_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathbb{1}_{[t,1+t]}(x) - \mathbb{1}_{[0,1]}(x)) \\
= \ & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t} - 1)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}(-\mathbb{1}_{[0,t]}(x) + \mathbb{1}_{[1,1+t]}(x)).
\end{aligned}
$$

La norme $L^2$ du second terme est bornée par $2|t|$, celle du premier vaut $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t} - 1|$. Comme $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t} - 1| = 2$, $\|T_t - \mathbb{1}\|$ ne tend pas vers 0 quand $t \to 0$.

2) Mêmes questions sur l 'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x^2}dx)$.

**Corrigé** L 'opérateur $T_t$ n'est pas borné sur $\mathcal{H}$ si $t \neq 0$. En effet, pour $u_n = \mathrm{e}^{x^2/2}\mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$ on a $\|u_n\| = 1$ et un calcul simple donne que $\|T_t u_n\|^2 = \mathrm{e}^{-2nt}\frac{-1}{2t}\mathrm{e}^{-t^2}(\mathrm{e}^{-2t} - 1)$.

**Exercice 2.**

1) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $B(\mathcal{H})$ telles que $A_n \to A$ et $B_n \to B$ pour la topologie forte. Montrer que $A_n B_n \to AB$ pour la topologie forte.

**Corrigé** Par le principe de la borne uniforme, on obtient que $(A_n)$ est bornée en norme. Puis écrire $A_n B_n u - ABu = A_n(B_n - B)u + (A_n - A)Bu$.

2) On va montrer que l 'application $B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \ni (A, B) \mapsto AB \in B(\mathcal{H})$ n'est pas continue pour la topologie forte, si $\dim\mathcal{H} = \infty$.

2a) Montrer qu' une base de voisinages de $(0, 0)$ pour la topologie forte est donnée par les ensembles

$$U = \{(A, B) \in B(\mathcal{H}) : \|Ae_i\|, \|Be_i\| \leq \epsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

où $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée de $\mathcal{H}$.

**Corrigé** : Il suit de la définition de la topologie forte qu' une base de voisinages de $(0, 0)$ est donnée par des ensembles $U$ comme plus haut, où $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille finie de vecteurs de $\mathcal{H}$. Il suffit alors d' orthonormaliser cette famille, quitte à diminuer un peu $\epsilon$.

2b) Soit $u_0 \in \mathcal{H}$ avec $u_0\| = 1$ et $\epsilon, e_1, \dots, e_n$ comme plus haut. Montrer qu'il existe $A \in B(\mathcal{H})$ tel que $Au_0 \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $\|A\| \leq \epsilon$.

**Corrigé** on fixe $e_{n+1}$ tel que $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est orthonormée et on prend $A = \epsilon|e_{n+1})(u_0|$.

2c) Montrer qu' il existe $B \in B(\mathcal{H})$ tel que $Be_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\|BAu_0\| = 1$.

**Corrigé** Il suffit de prendre $B = \epsilon^{-1}|e_{n+1})(e_{n+1}|$.

2d) En déduire que $B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \ni (A, B) \mapsto AB \in B(\mathcal{H})$ n'est pas continue pour la topologie forte.

**Corrigé** Supposons qu' elle soit continue. Soit $V = \{C \in B(E) : \|Cu_0\| < 1\}$ qui est un voisinage de 0 dans $B(\mathcal{H})$. Son image inverse est $\{(A, B) : ABu_0\| < 1\}$ est un voisinage de 0, donc doit contenir un ensemble $U$ comme dans 2a). Mais on a vu qu' il existe $(A, B) \in U$ tel que $AB \notin V$.