Devoir n° 1
M2 Introduction à la théorie spectrale
2018-2019

A rendre le 1 Octobre 2018.

Exercice 1. [Calcul fonctionnel holomorphe]

Soit H un opérateur borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $\sigma(H) \subset \mathbb{C}$ son spectre. Pour f holomorphe dans un voisinage U de $\sigma(H)$ on définit $f(H)$ par

$$f(H) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \oint_{\gamma} f(z)(z-H)^{-1} dz,$$

où $\gamma \subset U$ est un contour entourant $\sigma(H)$ dans le sens direct.

1) Montrer que si f, g sont holomorphes dans un voisinage de $\sigma(H)$ on a

$$f(H)g(H) = fg(H).$$

2) Montrer que si $f(z) = (z - z_0)^{-1}$ pour $z_0 \notin \sigma(H)$ alors $f(H) = (H - z_0)^{-1}$.

Exercice 2. [Forme symplectique sur un espace de Hilbert réel]

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel, dont le produit scalaire est noté par $u_1 \cdot u_2$. Pour $A \in B(\mathcal{H})$ on définit l 'adjoint A^* par $A^* u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot A u_2$. On pose $|A| = (A^* A)^{\frac{1}{2}}$, où la racine carrée d ' un opérateur autoadjoint positif est définie comme dans le cas complexe. Enfin on dit que A est orthogonal ($A \in O(\mathcal{H})$) si A est inversible et $Au_1 \cdot Au_2 = u_1 \cdot u_2$ pour tout $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$, c' est à dire si $A^* = A^{-1}$.

On a la version réelle suivante de la décomposition polaire : si $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ et $\mathrm{Im} A$ est dense dans $\mathcal{H}$, alors il existe un unique opérateur orthogonal U tel que

$$A = U|A| = |A^*|U.$$

Soit maintenant $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ une forme *symplectique* sur $\mathcal{H}$, c'est à dire une forme bilinéaire, anti-symétrique et non-dégénérée, c'est à dire que

$$\sigma(u, v) = 0 \ \forall u \in \mathcal{H} \ \Rightarrow v = 0.$$

On suppose aussi que σ est continue, c'est à dire que

$$|\sigma(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \ u, v \in \mathcal{H}.$$

1) Montrer qu'il existe un unique opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ tel que

$$\sigma(u, v) = u \cdot Tv, \ \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

2) Montrer que $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$, $T = -T^*$ et $\mathrm{Im} T$ est dense dans $\mathcal{H}$.

3) Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T et $J = -U$. Montrer que $J^2 = -\mathbb{1}$.

4) On munit $\mathcal{H}$ d' une structure d 'espace vectoriel complexe en posant

$$(a + \mathrm{i}b)u := au + Jbu, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$(u_1|u_2) := \sigma(u_1, Ju_2) + \mathrm{i}\sigma(u_1, u_2)$$

est un produit scalaire complexe sur $\mathcal{H}$ qui fait de $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe.

5) Exprimer $Re(u_1|u_2)$ à l 'aide du produit scalaire réel sur $\mathcal{H}$.