Corrigé de l'Examen de DEA du 21 janvier 2005

Exercice 1

Il est clair qu'il suffit de montrer que $\sigma(H)$ est un singleton. Si $\sigma(H)$ contient deux points λ_1, λ_2 distincts, alors pour tout $\epsilon > 0$ on a $\mathbb{1}_{[\lambda_i-\epsilon,\lambda_i+\epsilon]}(H) \neq 0$ (utiliser la caractérisation du spectre de H vue en cours). On a donc $\mathbb{1}_{[\lambda_i-\epsilon,\lambda_i+\epsilon]}(H) = \mathbb{1}$. En prenant $\epsilon < |\lambda_1 - \lambda_2|$, on obtient:

$$\mathbb{1}_{[\lambda_1-\epsilon,\lambda_1+\epsilon]\cup[\lambda_2-\epsilon,\lambda_2+\epsilon]}(H) = \mathbb{1} + \mathbb{1} = 2\mathbb{1},$$

ce qui est une contradiction.

Exercice 2

1) L'orthogonalité de deux espaces propres distincts se montre comme dans le cas autoadjoint (utiliser que si $|z| = 1$, $\overline{z} = z^{-1}$).

Si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ était valeur propre pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on obtiendrait dans $\mathcal{H}$ une famille orthogonale non dénombrable, ce qui contredit le fait que $\mathcal{H}$ est séparable.

2)

$U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathbb{1}$ est injectif, et $U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ est unitaire. Il suit alors des résultats du cours que $U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ est la transformatée de Cayley d'un opérateur autoadjoint T, c'est à dire:

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{T+\mathrm{i}}{T-\mathrm{i}}.$$

La fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $S^1\backslash\{1\}$. On peut donc définir la fonction $g : \mathbb{R} \ni]0, 2\pi[$ par:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}g(x)}.$$

Si on pose $S = g(T)$ (défini par le calcul fonctionnel autoadjoint), on a $U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}$ et $0 \leq S \leq 2\pi$.

3) En utilisant le point 2), on obtient:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} U^n = f_N(S),$$

où $f_N(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda}$. On a:

$$f_N(\lambda) = \begin{cases} \frac{N+1}{N}, \text{ si } \lambda = 0, 2\pi, \\ \frac{1}{N}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1)\lambda})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda})^{-1}, \text{ si } \lambda \neq 0, 2\pi. \end{cases}$$

On voit que la suite de fonctions f_N converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{0,2\pi\}}$. On a donc:

$$\text{s-}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} U^n = \mathbb{1}_{\{0,2\pi\}}(S) = P.$$

Exercice 3

1)

On a évidemment $T(f)$ symétrique, le fait que $T(f)^* = T(f)$ est un calcul facile, basé sur le théorème de Riesz.

2)

On vérifie directement que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tT(f)} = T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tf})$, (en montrant que le membre de droite vérifie l'équation de Schroedinger). On en déduit par intégration que $h(T(f)) = T(h \circ f)$, si $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Ceci s'étend è tout $h \in C_\infty(\mathbb{R})$, par un argument de densité, laissé au lecteur.

3)

On étend le point 2) aux fonctions indicatrices de boréliens, par l'argument usuel (écrire une fonction indicatrice de borélien comme une limite monotone de fonctions continues).

4)

On a $\lambda \notin \sigma(T(f))$ si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{1}_{[\lambda-\epsilon\lambda+\epsilon]}(T(f)) = T(\mathbb{1}_{f^{-1}([\lambda-\epsilon\lambda+\epsilon])}) = 0$. Mais $T(g) = 0$ si est seulement si $g = 0$ p.p., ce qui appliqué à $g = \mathbb{1}_{f^{-1}([\lambda-\epsilon\lambda+\epsilon])}$ donne l'équivalence demandée.

Exercice 4

1)

(Il faut supposer que φ préserve la mesure). Un calcul immédiat donne que $UT(f)U^{-1} = T(f \circ \varphi^{-1})$.

2)

Soit g tel que $Ug = g$. Sans perte de généralité, on peut supposer que g est réelle (en considérant séparément $\mathrm{Re}g$ et $\mathrm{Im}g$). On a donc $UT(g)U^{-1} = T(g)$, et donc $U\mathbb{1}_\Omega(T(g))U^{-1} = \mathbb{1}_\Omega(T(g))$ pour tout borélien $\Omega \subset \mathbb{R}$. Par l'exercice 3, ceci entraine que $\mathbb{1}_{g^{-1}(\Omega)} = \mathbb{1}\varphi(g^{-1}(\Omega))$, p.p., et donc $g^{-1}(\Omega) = \varphi(g^{-1}(\Omega))$ modulo μ. Comme φ est ergodique, on obtient que $g^{-1}(\Omega) = \emptyset$ ou X modulo μ, c'est à dire que $\mathbb{1}_\Omega(T(g)) = T(\mathbb{1}_{g^{-1}(\Omega)}) = 0$ ou $\mathbb{1}$. Par l'exercice 1, on a donc que $T(g) = \lambda\mathbb{1}$, c'es à dire que $g = \lambda$ p.p.

3)

En appliquant l'exercice 3, on obtient que la limite dans $L^2(X, \mathrm{d}\mu)$ dans le membre de gauche est Pf, où P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(U - \mathbb{1})$. Mais on a vu au point 2 que $\mathrm{Ker}(U - \mathbb{1}) = \mathrm{Vect}(1)$, où 1 désigne la fonction constante égale à 1 sur X, qui est normalisée dans $L^2(X)$. On a donc $Pf = |1\rangle\rangle 1|f = \int_X f \mathrm{d}\mu$, p.p.

Exercice 5

1)

Une implication est évidente. Pour montrer l'autre il suffit de vérifier que $\mathrm{Vect}\{(z-\lambda)^{-1}, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\}$ est dense pour la topologie du sup dans $C_\infty(\mathbb{R})$. Ceci suit du théorème de Stone-Weierstrass: les combinaisons linéaires finies des fonctions $f_z(\lambda) = (z-\lambda)^{-1}$ forment une algèbre (par la formule de la résolvante), stable par conjugaison complexe (qui correspond à $z \to \overline{z}$) et qui sépare les points.

2)

Un tel opérateur doit vérifier $Uf(H)\Omega = T(f)U\Omega = T(f)1 = f$ pour tout $f \in C_\infty(\mathbb{R})$. Par la définition de la mesure $\mathrm{d}\mu(\lambda)$, on voit que U est isométrique. Il faut voir que U possède un domaine et une image dense: le fait que le domaine (l'ensemble des $f(H)\Omega$ pour $f \in C_\infty(\mathbb{R})$) est dense suit de fait que Ω est cyclique.

Le fait que l'image est dense vient du fait bien connu que $C_\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$, si $\mathrm{d}\mu$ est une mesure borélienne de probabilité.

3)

C'est une nouvelle application du théorème de Stone-Weierstrass.

4)

Soit $h := L\Omega$. h est une fonction mesurable dans $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$. On a pour $f \in C_\infty(\mathbb{R})$:

$$ULf(H)\Omega = Uf(H)L\Omega = Uf(H)U^{-1}h = fh = Uh(H)f(H)\Omega.$$

On a donc $L = h(H)$ sur l'ensemble dense des $f(H)\Omega$, et donc $L = f(H)$ sur $\mathcal{H}$. Comme L est borné, on a $\|L\| = \|T(h)\| = \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)} < \infty$.