Corrigé de l'examen de rattrapage

S3SMR Mathématiques 11 juin 2007

Exercice 1

1) On écrit $u_n = \sqrt{n}\left(1 + \alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} + \beta\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\right)$.

On a $(1+x)^{\varepsilon} = 1+\varepsilon x + O(x^2)$ quand $x \to 0$ donc

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2n} + O(n^{-2})$, $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{n} + O(n^{-2})$,

$$u_n = \sqrt{n}\left(1+\alpha+\beta + (\alpha/2+\beta)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \sqrt{n}(1+\alpha+\beta) + \left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + O(n^{-3/2}).$$

Pour que $\sum u_n$ converge il faut que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $1+\alpha+\beta = 0$. Si c'est le cas alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge c'est à dire $\frac{\alpha}{2}+\beta = 0$.

On obtient donc que $\sum u_n$ converge si et seulement si $1+\alpha+\beta = \frac{\alpha}{2}+\beta = 0$, c'est à dire $\alpha = -2$, $\beta = 1$.

2) Si $\alpha = -2$, $\beta = 1$ on a :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N}\sqrt{n} - 2\sum_{n=0}^{N}\sqrt{n+1} + \sum_{n=0}^{N}\sqrt{n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sqrt{n} - 2\sum_{n=1}^{N+1}\sqrt{n} + \sum_{n=2}^{N+2}\sqrt{n}$$

$$= -2\sqrt{N+1} - 1 + \sqrt{N+1} + \sqrt{N+2} = \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} - 1.$$

Comme $\lim_{N\to+\infty} \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} = 0$ on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = -1.$$

Exercice 2

1) pour $x>0$ $u_n(x) \sim \frac{x}{n^2}$ quand $n\to+\infty$ donc $\sum u_n(x)$ converge (comparaison des séries à termes positifs).

2) Pour $x\in[a,b]$ $0<a<b$ on a :

$$|u_n(x)| \le \frac{b}{a^2+n^2}. \quad \text{Comme } \sum_{n\geq 0} \frac{b}{a^2+n^2} \text{ converge la série}$$

$\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$.
Comme chaque fonction u_n est continue sur $]0,+\infty[$, f est continue sur $]0,+\infty[$.

On a : $u_n'(x) = \dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$. Pour $x\in[a,b]$

$$|u_n'(x)| \le \frac{n^2+b^2}{(a^2+n^2)^2} \le \frac{C}{n^2}.$$ La série $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$. La fonction f est donc dérivable sur $]0,+\infty[$.

3). On a : $\left|f(x)-\frac{1}{x}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pour $|x|\le 1$.

4) On a $\left|f(x)-\frac{1}{x}\right| \le C_0$ pour $|x|\le 1$ donc

$\lim_{x\to 0^+} xf(x) = 1$, $f(x)\sim\frac{1}{x}$ quand $x\to 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 3.

La fct $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x^2)^{3/2}}$ est continue sur $]0,1[$ donc localement intégrable.

On regarde séparément la convergence de l'intégrale en 0 et en 1.

Pour $|x|<1/2$ on a $|f(x)| \le C_0 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \le \dfrac{C_1}{x^{1/2+\varepsilon}}$

par la majoration connue de $\ln x$ au voisinage de 0.
Prenant $0<\varepsilon<1/2$, on voit que l'intégrale converge en 0.

Pour la convergence en $x=1$, on pose $x=1-t$

$$f(x) = \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{1-t}\,(1-(1-t)^2)^{3/2}}.$$

$\ln(1-t)\sim -t$
$\sqrt{1-t}\sim 1$ quand $t\to 0^+$
$(1-(1-t)^2)^{3/2}\sim(2t)^{3/2}$

Donc $f(1-t) \sim \frac{1}{2t^{1/2}}$ et l'intégrale converge en $x=1$.

2) On pose $x = \sin^2 t$ $\quad dx = 2\sin t \cos t \, dt$

$$I = \int_0^{\pi/2} 4 \frac{\ln \sin t}{\sin t} \frac{\sin t \cos t}{(\cos t)^3} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin t}{\cos^2 t} dt.$$

Comme $\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \operatorname{tg} t$ on a en intégrant par parties :

$$I = 4 \left[\ln \sin t \operatorname{tg} t \right]_0^{\pi/2} - 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t} \operatorname{tg} t \, dt.$$

le premier terme est égal à $4 \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \sin t \operatorname{tg} t \right]_\varepsilon^{\pi/2 - \varepsilon}$

et : $\ln \sin \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ $\qquad \ln \sin(\pi/2 - \varepsilon) \operatorname{tg}(\pi/2 - \varepsilon) =$

$$\frac{\ln \cos \varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{\ln(1 - \varepsilon^2/2 + o(\varepsilon^3))}{\cancel{\operatorname{tg}\varepsilon}\ \varepsilon + o(\varepsilon^2)} = -\frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon^2) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Donc $\underline{I = -2\pi}$.

Exercice 4.

1) soit $c > 0$ tel que $|g(t)| \leq c$ $\forall t \geq 0$.

On a : $\left| \frac{g(xt)}{xt^2} \right| \leq \frac{c}{xt^2} \leq \frac{c_1}{t^2}$. Donc $I(x)$ converge en $+\infty$.

2) On a :

$$\left| \int_\varepsilon^1 \frac{g(s)}{s^2} - \frac{1}{s} ds \right| = \left| \int_\varepsilon^1 \frac{g(s)}{s^2} ds + \ln \varepsilon \right|$$

$$\leq \int_\varepsilon^1 \left| \frac{g(s) - s}{s^2} \right| ds \leq c \int_\varepsilon^1 ds \leq c.$$

3). On pose $xt = s$. $I(x)$ devient :

$$\int_{ax}^{+\infty} \frac{g(s)}{s^2} ds = \int_{ax}^1 \frac{g(s)}{s^2} ds + \int_1^{+\infty} \frac{g(s)}{s^2} ds.$$

La deuxième intégrale est indépendante de x.

La première vérifie :

$$\left| \int_{ax}^{1} \frac{g(s)}{s^2}\,ds + \ln ax \right| \leq C_1 \qquad \text{uniformément pour } |ax|<1$$

et donc :

$$\left| \int_{ax}^{1} \frac{g(s)}{s^2}\,ds + \ln x \right| \leq C_1 + |\ln a| . \qquad \#$$

Exercice 5.

1) on a $u_n(0)=0$, $\forall n$ $\quad u_n(x) = \frac{1}{n}\frac{x}{1+(nx)^3} \sim \frac{1}{n^4 x^2}$ quand $n \to +\infty$

donc $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge $\forall x \geq 0$.

2) g est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc $|u_n(x)| \leq \frac{c}{n^2}$ uniformément pour $x \geq 0$.

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$, chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) $u_n'(x) = \frac{1}{n} g'(nx) = \frac{1}{n} \frac{1-2(nx)^3}{(1+(nx)^3)^2}$

Pour $x \in [a,b]$ $0<a<b$; on a :

$$|u_n'(x)| \leq \frac{1}{n} \frac{2(bn)^3+1}{(1+(an)^3)^2} \leq \frac{c}{n^4}.$$ Donc $\sum u_n'$ converge

normalement sur tout $[a,b]$ f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

4) $\frac{g(t)}{t^2} = \frac{1}{t(1+t^3)}$ est décroissante (calculer la dérivée).

Pour $x>0$ la fct $t \to x\frac{g(xt)}{(xt)^2}$ est aussi décroissante. et positive.

Par comparaison série intégrale on obtient l'encadrement

en notant que $\quad x\frac{g(nx)}{(nx)^2} = \frac{1}{x} u_n(x).$

5) La fonction $g(t) = \frac{t}{1+t^3}$ vérifie les hypothèses de l'exercice

4. On en déduit l'encadrement demandé.

6) $$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)}{x} = \frac{1}{1+x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_n(x)}{x}.$$

Par 5) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{u_n(x)}{x} = +\infty$, f n'est pas dérivable à droite en 0.