# Corrigé de l'examen d'Analyse S3 PMCP du 15/12/08

## Exercice 1.

1) si $x=0$, on a $f_n(x)=0\ \forall n$, $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quand $n\to+\infty$.

si $x\neq 0$ $\quad f_n(x) \sim \dfrac{n^\alpha}{n^{1/2}x}$ quand $n\to+\infty$,

donc : $$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha>1/2 \\ \frac{1}{x} & \text{si } \alpha=1/2 \\ 0 & \text{si } \alpha<1/2. \end{cases}$$

Conclusion : la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ ssi $\alpha\leq 1/2$ vers la fonction :

$$f(x)=0 \text{ si } \alpha<1/2 \qquad f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{1}{x} & x\neq 0 \end{cases} \text{ si } \alpha=1/2.$$

2) On calcule $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)-f(x)|$.

Cas $0\leq\alpha<1/2$ : $\quad \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}\left|\dfrac{n^\alpha}{(1+nx^2)^{1/2}}\right| = n^\alpha$, donc la suite $(f_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (vers 0).

Cas $\alpha=1/2$. On a : $$f_n(x)-f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{n^{1/2}}{(1+nx^2)^{1/2}}-\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

On a : $$\frac{n^{1/2}}{(1+nx^2)^{1/2}}-\frac{1}{x} = \frac{n^{1/2}x-(1+nx^2)^{1/2}}{x(1+nx^2)^{1/2}} =$$

$$\frac{nx^2-(1+nx^2)}{(n^{1/2}x+(1+nx^2)^{1/2})}\times\frac{1}{x(1+nx^2)^{1/2}} = \frac{-1}{x(1+nx^2)^{1/2}(n^{1/2}x+(1+nx^2)^{1/2})}.$$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+}|f_n(x)-f(x)|=+\infty$, donc $f_n-f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^+$

la suite $(f_n-f)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut évidemment pas converger vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}^+$

3) Cas $0 \leq \alpha < 1/2$ :

On calcule $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \dfrac{n^\alpha}{(1+nx^2)^{1/2}} = \dfrac{n^\alpha}{(1+na^2)^{1/2}}$

$= O(n^{\alpha - 1/2})$ donc $(f_n)$ converge vers 0 uniformément sur $[a,b]$.

Cas $\alpha = 1/2$ :

On a calculé :

$|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{x(1+nx^2)^{1/2}\left(n^{1/2}x + (1+nx^2)^{1/2}\right)}$,

donc : $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{a(1+na^2)^{1/2}} \times \dfrac{1}{n^{1/2}a + (1+na^2)^{1/2}} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(la fonction au dénominateur est manifestement croissante)

donc la suite $(f_n)$ converge vers $f$ uniformément sur $[a,b]$.

Exercice 2.

1) On a : $|g(t)| \leq C$, uniformément sur $\mathbb{R}^+$ ($g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$, donc $g$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$).

On a donc $|u_n(x)| \leq \dfrac{C}{n^2}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |u_n(x)| \leq \dfrac{C}{n^2}$.

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement, ~~donc~~ sur $\mathbb{R}^+$,

donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$, donc simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, comme somme d'une série (uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$) de fonctions continues.

3) On a : $u_n'(x) = \dfrac{1}{n} g'(nx)$ et

$$g'(t) = \frac{1}{1+t^3} - \frac{3t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}.$$

On montre que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge ~~un~~ normalement sur $[a,b]$ pour tout $0<a<b$.

On a $\sup_{x\in[a,b]} |u_n'(x)| = \frac{1}{n} \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{1-2n^3t^3}{(1+n^3t^3)^2} \right|$

$$\leq \frac{1}{n} \frac{2n^3b^3+1}{(1+n^3a^3)^2} \leq \frac{c\,n^3}{n^7} = \frac{c}{n^4}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{c}{n^4}$ converge, donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[a,b]$. La fonction $f$ est donc dérivable sur $[a,b]$, pour tout $0<a<b$, et donc dérivable sur $]0,+\infty[$

4) On a $\frac{g(t)}{t^2} = \frac{1}{t(1+t^3)}$ et

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t(1+t^3)}\right) = -\frac{(1+4t^3)}{t^2(1+t^3)^2} < 0$, $\frac{g(t)}{t^2}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

on considère $\sum_{n=2}^{N} \frac{u_n(x)}{x} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2x} g(nx) = x\sum_{n=2}^{N} f(n)$

~~pour f(s) = g(s)/s²~~. ~~la fon~~

pour $f(s) = \frac{g(sx)}{(sx)^2}$. La fonction $f$ est décroissante, donc:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \geq \int_2^N f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{N-1} f(n) \leq \int_1^{N-1} f(t)\,dt.$$

Pour $x>0$ la fonction: $f(t) = \left(\frac{xt}{1+(xt)^3}\right) \times \frac{1}{x^2t^2} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{t(1+(xt)^3)}$

est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc pour tout $x>0$ on a:

$$\int_2^{+\infty} x f(t)\,dt \leq \sum_2^{N} \frac{u_n(x)}{x} \leq \int_1^{+\infty} x f(t)\,dt$$

On peut faire tendre $N \to +\infty$, on remplace $f(t)$ par sa valeur $\frac{g(xt)}{x^2 t^2}$, on obtient :

$$\int_2^{+\infty} \frac{g(tx)}{xt^2}\,dt \le \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u_n(x)}{x} \le \int_1^{+\infty} \frac{g(tx)}{xt^2}\,dt.$$

Exercice 3

1) Soit $0<a<1$. On a

$$\sup_{x\in[-a,a]} |u_n(x)| \le \frac{a^n}{n}.$$ Comme $a<1$ la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$, donc uniformément sur $[-a,a]$. Chaque fonction $u_n$ est continue sur $[-a,a]$, donc

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$ est continue sur $[-a,a]$. Comme $a$ est arbitraire, $f$ est continue sur $]-1,1[$.

2) Soit $0<a<1$. On calcule

$$u_n'(x) = x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx).$$

$$\sup_{x\in[-a,a]} |u_n'(x)| \le a^{n-1} + a^n.$$

La série $\sum_{n\geq 1} a^{n-1}+a^n$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[-a,a]$.

La fonction $f$ est donc dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\cos(nx)$$

$$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\cos(nx)$$

$$= \frac{1}{x}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(xe^{ix})^n\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(xe^{ix})^n\right)$$

$$= \frac{1}{x}\,\mathrm{Im}\left(\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}\right)$$

$$= x\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}}{1-xe^{ix}}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-xe^{ix}}\right)$$

$$\frac{e^{ix}}{1-xe^{ix}} = \frac{e^{ix}(1-xe^{-ix})}{(1-x\cos x)^2+x^2\sin^2 x} = \frac{e^{ix}-x}{1+x^2-2x\cos x}$$

Donc:

$$f'(x) = \cancel{x}\ \frac{1}{1+x^2-2x\cos x} \times \left(x(\cos x - x) + \sin x\right).$$

3) On dérive $g(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right) = \arctan(u(x))$

$$g' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$u'(x) = \frac{1}{(1-x\cos x)^2} \times \left((\sin x + x\cos x)(1-x\cos x) + x\sin x\,(\cos x - x\sin x)\right)$$

$$= \frac{1}{(1-x\cos x)^2} \times \left(\sin x + x\cos x - x\sin x\cos x - x^2\cos^2 x + x\sin x\cos x - x^2\sin^2 x\right)$$

$$= \frac{1}{(1-x\cos x)^2} \times \left(\sin x + x\cos x - x^2\right).$$

$$1+u^2 = \frac{(1-x\cos x)^2 + x^2\sin^2 x}{(1-x\cos x)^2} = 1+x^2-2x\cos x,$$

$$\frac{u'}{1+u^2} = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1+x^2-2x\cos x} = f'(x).$$

~~Ok~~

On a $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in ]-1,1[$ et

$f(0) = 0 = g(0)$, donc $f(x) = g(x)$ #

Exercice 4.

1) On utilise $R = \sup\{r \geq 0 \mid \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$.

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n = \sum_{k \geq 0} k!\, r^{k^2} = \sum_{k\geq 0} b_k.$$

On applique la règle de d'Alembert :

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = (k+1)\, r^{(k+1)^2 - k^2} = (k+1)\, r^{2k+1}$$

$\frac{b_{k+1}}{b_k} \to 0$ si $0 \leq r < 1$, $\frac{b_{k+1}}{b_k} \to +\infty$ si $r > 1$.

Donc $\sum b_k$ converge si $r < 1$, diverge si $r > 1$. Le rayon de convergence est égal à $1$.

2) On applique le même critère :

la série $\sum a_n r^n$ converge ssi les deux séries $\sum_{n\geq 1} a_{2n} r^{2n}$ et $\sum_{n\geq 1} a_{2n+1} r^{2n+1}$ convergent

c'est à dire ssi $\sum_{n\geq 1} a^n r^{2n}$ et $\sum b^n r^{2n+1}$ convergent,

donc ssi $ar^2 < 1$ et $br^2 < 1$. $\iff$ $r < \min\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$.

On a donc $R = \min\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$.