# Corrigé devoir 4 S3PMCP 2008-2009

## Exercice 1.

1) On calcule $\varepsilon_n = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$, en traçant le tableau de variation de $f_n$ : on a : $f_n'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n} - n2x\dfrac{x}{(1+x^2)^{n+1}}$

$= \dfrac{(1+x^2)-2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \dfrac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$. $f_n'$ s'annule en $x=\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$,

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}}.$$

On a donc $\varepsilon_n \le \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, la suite $(f_n)$ converge vers 0 uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

2) Pour $x \geq 0$ fixé, $f_n(x) \geq 0$, et $f_n(x)$ décroît vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ donc la série $\sum(-1)^n f_n(x)$ est une série alternée, donc convergente, la série de fonctions $\sum(-1)^n f_n$ est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$. Pour montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$, il faut montrer que :

$$\lim_{N\to+\infty}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)\right| = 0.$$

Comme pour $x$ fixé, la série $\sum(-1)^n f_n(x)$ est alternée, on a la majoration du reste :

$$|R_N(x)| = \left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)\right| \le |f_N(x)|.$$

On a donc :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |R_N(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_N(x)| = \varepsilon_N \quad \text{(voir 1))}.$$

Comme on a vu que $\lim_{N\to+\infty} \varepsilon_N = 0$, la série $\sum(-1)^n f_n$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3) On fixe $x \geq 0$. Si $x=0$ $f_n(0)=0$, la série $\sum f_n(0)$ converge.

Si $x>0$ on a $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ la série $\sum \frac{x}{(1+x^2)^n}$ converge

par majoration par une série géométrique ( $1+x^2>1$ si $x>0$).

On a donc convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$

Pour $x>0$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}$ ( car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ si $|a|<1$)

$= \frac{1+x^2}{x^2}$.

On a donc $$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{1+x^2}{x}, & x>0 \end{cases}$$

4) (a). Pour $a \leq x \leq b$ on a $1+x^2 \geq 1+a^2$ donc

$$|f_n(x)| \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

On a donc $$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq \frac{b}{(1+a^2)^n} =: d_n.$$

la série $\sum d_n$ converge comme une série géométrique ($a>0$),

la série de fonctions $\sum f_n$ converge donc normalement sur $[a,b]$.

(b) Pour $a \leq x < +\infty$ on a :

$$|f_n(x)| = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \leq \frac{1}{(1+a^2)^{n-1}}\left(\frac{x}{1+x^2}\right).$$

la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et tend vers 0 en $+\infty$,

elle est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ ( le sup est atteint en $x=1$ et vaut $\frac{1}{2}$).

On a donc $$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{c}{(1+a^2)^{n-1}} = \frac{c(1+a^2)}{(1+a^2)^n} = m_n.$$

la série $\sum m_n$ converge comme une série géométrique, la série de fonctions $\sum f_n$ converge donc normalement sur $[a,+\infty[$ si $a>0$.

(c) Montrons que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur $[0,1]$ (elle ne sera donc pas normale sur $[0,1]$, car la convergence normale implique la convergence uniforme).

On regarde si

$$\alpha_N = \sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \right| \quad \text{vérifie } \lim_{N\to+\infty} \alpha_N = 0.$$

on a : $$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{x}{(1+x^2)^N} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^N} \frac{1}{1-\frac{1}{(1+x^2)}} = \frac{1+x^2}{x(1+x^2)^N} & \text{si } x>0. \end{cases}$$

On calcule $\displaystyle\sup_{x\in]0,1]} \left| \frac{1}{x(1+x^2)^{N-1}} \right|$. On a évidemment

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(1+x^2)^{N-1}} = +\infty, \quad \text{donc } \sup_{x\in]0,1]} \left| \frac{1}{x(1+x^2)^{N-1}} \right| = +\infty.$$

On a donc $\alpha_N = +\infty$, et évidemment $\lim_{N\to+\infty} \alpha_N$ n'est pas $0$.

On peut montrer directement que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$ en calculant

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}}.$$ , et en regardant si la série $\sum \varepsilon_n$ converge.

On écrit $$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)}.$$ On sait que :

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} e \quad \text{donc } \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}.$$ On a donc :

$\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$ quand $n\to+\infty$. La série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$ diverge (série de Riemann divergente), donc $\sum \varepsilon_n$ diverge, et $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

## Exercice 2.

1) On fixe $x \in \mathbb{R}$. Si $x=0$ $f_n(0)=0$, $\sum f_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$,

on a $\left|\sin\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| \leq \frac{|x|}{n^2}$, $\left|\frac{x}{n^2}\cos x\right| \leq \frac{|x|}{n^2}$ donc

$|f_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2}$. La série $\sum f_n(x)$ converge par

majoration par une série de Riemann convergente.

2) Comme $|f_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2}$ on a : $\sup_{x \in [-r,r]} |f_n(x)| \leq \frac{2r}{n^2}$.

Comme la série $\sum \frac{2r}{n^2}$ converge, la série de fonctions $\sum f_n$

converge normalement sur $[-r,r]$.

Pour regarder la convergence normale sur $\mathbb{R}$, on calcule :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{x}{n^2}\right) - \frac{x}{n^2}\cos x\right|.$$

Prenons $x = 2\pi n^2$ on a $f_n(2\pi n^2) = \sin\left(\frac{2\pi}{\cancel{}}\right) - 2\pi\cos(2\pi n^2) = -2\pi$

on a donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \geq 2\pi$, donc $\sum \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$ diverge,

la série de fonctions $\sum f_n$ converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 3.

1] On majore $|f_n(x)|$ sur $[a,b]$ avec $0<a<b$.

si $a<x<b$ on a $|nx|<nb$ et $|e^{-nx^2}| \leq e^{-na^2}$,

donc $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)| \leq nbe^{-na^2}$.

La série numérique $\sum nbe^{-na^2}$ converge évidemment (majorer $e^{-x}$ pour $x \geq 1$ par $\frac{C}{x^3}$), la série de fonctions $\sum f_n$

converge donc normalement sur $[a,b]$.

2) on a $f_n(x) = g_n(x)'$ pour $g_n(x) = -\frac{1}{2} e^{-nx^2}$.

la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $[a,b]$ si $0<a<b$.

la série de fonctions $\sum g_n' = \sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a,b]$. Par un théorème du cours, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = g(x)' \quad \text{pour} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x).$$

On peut calculer $g(x)$ pour $x \in [a,b]$ :

$$g(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x^2})^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-x^2}}\right).$$

On a donc :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-x^2}}\right)' = \frac{x e^{-x^2}}{(e^{-x^2}-1)^2}. \quad \#.$$