1. <u>Convergence en 0</u> :

on a $\ln(1+t) = t + O(t^2)$ donc $\ln(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} + O(x)$

$= \sqrt{x}(1 + O(\sqrt{x}))$. Donc :

$$\frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+O(\sqrt{x})} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \text{ au vois. de } 0$$

On a donc :

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+\sqrt{x})} \right| \leq \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})} \leq \frac{C}{\sqrt{x}} \quad \text{pour } x \in]0,1].$$

L'intégrale converge absolument en 0.

<u>Convergence en $+\infty$</u> :

pour x assez grand $|\ln(1+\sqrt{x})| \geq 1$ donc

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+\sqrt{x})} \right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{pour } x \geq C_0.$$

l'intégrale converge absolument en $+\infty$.

2. <u>Convergence en 0</u> : pour $0 < x \leq 1/2$ on a : $1 - x^2 \geq 3/4$

donc $\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \leq C_0$. Au voisinage de 0 $\ln x = O(x^{-1/2})$ donc

$x\ln(x) \in O(x^{1/2})$ et donc $f(x) \in O(x^{1/2})$. L'intégrale

converge donc en 0 ($f(x)$ tend vers 0 quand $x \to 0^+$).

<u>Convergence en 1</u> : on pose $x = 1-t$, on doit étudier :

$$\int_{\to 0}^{1/2} \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t(2-t)^{3/2}}\, dt.$$

comme $\ln(1-t) = t + O(t^2)$ au vois de 0 on a : $\lim_{t \to 0^+} \frac{(1-t)\ln(1-t)}{t(2-t)^{3/2}} = 2^{-3/2}$.

la limite en 0 étant finie, l'intégrale converge en 0.
L'intégrale en x converge en 1.

3. Convergence en 0 :

$$\frac{|\ln x|^{\beta}}{(1-x)^{\alpha}} \sim |\ln x|^{\beta} \text{ quand } x \to 0.$$

Comme $\ln x \in O(x^{-\delta})$ pour tout $\delta > 0$ on a : $\ln x \in O(x^{-\frac{1}{2\beta}})$,
$|\ln x|^{\beta} \in O(x^{-1/2})$. L'intégrale $\int_{\to 0}^{1/2} |\ln x|^{\beta}\, dx$ converge ~~abs~~ ~~absolument~~, donc l'intégrale $\int_{\to 0}^{1/2} \frac{|\ln x|^{\beta}}{(1-x)^{\alpha}}\, dx$ converge pour toute valeur de α, β.

Convergence en 1 : on se ramène à la cv en 0 de $\int_{\to 0}^{1/2} \frac{|\ln(1-t)|^{\beta}}{t^{\alpha}}\, dt$

$|\ln(1-t)| \sim |t|$ quand $t \to 0$

donc $|\ln(1-t)|^{\beta} \sim |t|^{\beta}$ —— (opération légale)

donc $\frac{|\ln(1-t)|^{\beta}}{t^{\alpha}} \sim |t|^{\beta-\alpha}$ —— .

$\int_{\to 0}^{1/2} |t|^{\beta-\alpha}\, dt$ converge ssi $\beta - \alpha > -1$, donc l'intégrale converge en 1 ssi $\beta > \alpha - 1$.

Exercice 2 :

1) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \arctan\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{1+x^{-2}} \times \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$.

la fct $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc constante sur $]0, +\infty[$, et vaut $\pi/4 + \pi/4$ pour $x = 1$.

2) le seul problème est la convergence en $+\infty$.

On a : $\arctan t = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ et

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^4)$ quand $x \to 0$, donc :

$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ quand $x \to +\infty$.

on a donc :

$$\arctan t = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad \text{quand } x \to +\infty$$

et $t(\arctan t)^2 =$

$t\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^4}\right)\right)^2 =$

$t\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)^2 = t \times \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}\right)^2 + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)$

$= t \times \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{t} + \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) =$

$\frac{\pi}{2}t - \pi + \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Donc $f(t) = \frac{\pi}{2}t - \pi + \frac{1}{t} - at - b - \frac{c}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

$= \left(\frac{\pi}{2} - a\right)t - (\pi + b) + \frac{1-c}{t} + g(t)$ où $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge absolument, donc

$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ssi $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - a\right)t - (\pi + b) + \frac{1-c}{t}\,)\,dt$ converge

En calculant $\int_1^R (\quad)\,dt$ ~~on voit~~ et en faisant $R \to +\infty$ on voit

qu'il faut que : $a = \frac{\pi}{2}$, $b = -\pi$, $c = 1$ #.

Exercice 3

1 a) ~~on obtient : $f(x) - \int_a^x f'(t)\,dt$~~

la fonction à dériver est égale à :

$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt - x\int_a^x f'(t)\,dt + \int_a^x t f'(t)\,dt =$

$\int_a^x f(t)\,dt - x(f(x) - f(a)) + \int_a^x t f'(t)\,dt$, sa dérivée vaut :

$$f(x) - (f(x) - f(a)) - x f'(x) + x f'(x) = f(a).$$

On a $g(a) = 0$, $g(b) =$

$\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b (b-t) f'(t)\,dt$. Comme $g'(x) = f(a)$,

$g(b) - g(a) = (b-a) f(a)$, ce qui donne la formule.

2(a) : si $f(t) = \frac{\cos \ln t}{t}$, $f'(t) = -\frac{\cos \ln t + \sin \ln t}{t^2}$.

La relation du 1b) donne :

$$(n+1-n) f(n) = \frac{\cos \ln(n)}{n} = \int_{n}^{n+1} \frac{\cos \ln t}{t}\,dt + \int_n^{n+1} (n+1-t) \frac{\cos \ln t + \sin \ln t}{t^2}\,dt.$$

La 1ère intégrale devient en posant $v = \ln t$:

$$\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \cos v\,dv.$$

La 2ème devient en posant $t = n+u$:

$$\int_0^1 \frac{(1-u)}{(n+u)^2} (\cos \ln(n+u) + \sin \ln(n+u))\,du.$$

2b) Pour $u \in [0,1]$ on a : $|\cos \ln(n+u)| \leq 1$, $|\sin \ln(n+u)| \leq 1$, $|1-u| \leq 1$,

$(n+u)^2 \geq n^2$. On a donc :

$$\left| \frac{(1-u)}{(n+u)^2} (\cos \ln(n+u) + \sin \ln(n+u)) \right| \leq \frac{1}{n^2}. \text{ et donc :}$$

$|u_n'| \leq \int_0^1 \frac{1}{n^2}\,du = \frac{1}{n^2}$, d'où la convergence de la série $\sum u_n'$.

2c). On calcule : $\int_0^R \cos v\,dv = [-\sin v]_0^R = -\sin R$,

$-\sin R$ n'a pas de limite quand $R \to +\infty$, donc $\int_0^{+\infty} \cos v\,dv$ diverge.

2 d) soit $u_n = \frac{\cancel{\ln} \cos(\ln n)}{n}$.

$$v_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \cos v \, dv = \sin \ln n - \sin \ln(n+1).$$

On a : $u_n = u'_n + v_n$.

La série $\sum u'_n$ est convergente.

La série $\sum v_n$ est une série télescopique :

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \sin \ln n - \sin \ln(n+1) = \sin \ln(1) - \sin \ln(N+1)$$

La suite $\sin \ln(N)$ n'a pas de limite quand $N \to +\infty$, donc

$\sum v_n$ diverge.

La série $\sum u_n$ est donc divergente comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.