Corrigé de l'examen de rattrapage S3 PMCP Analyse du 9 juin 2009

Exercice 1.

On sait que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ quand $x \to 0$ donc

$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ quand $n \to +\infty$ et donc

$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{2n^{5/2}} + O\left(\frac{1}{n^{7/2}}\right) =: v_n + r_n + w_n.$

On a $|r_n| \leq \frac{c}{n^{5/2}}$, $|w_n| \leq \frac{c}{n^{7/2}}$ les séries $\sum r_n$ et $\sum w_n$ sont donc absolument convergentes, par majoration par des séries de Riemann convergentes.

On a $|v_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$. la série $\sum |v_n|$ n'est donc pas convergente.

Si la série $\sum u_n$ était absolument convergente, il en serait de même de la série $\sum v_n$ (car $v_n = u_n - r_n - w_n$), ce qui n'est pas le cas.

La série $\sum u_n$ n'est donc pas absolument convergente.

On peut aussi le voir directement en utilisant que $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$ quand $n \to +\infty$ donc $|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ quand $n \to +\infty$ et en utilisant le critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

– La série $\sum v_n$ est une série alternée ($\frac{1}{\sqrt{n}}$ décroît vers 0) donc convergente. La série $\sum u_n$ est convergente comme somme de trois séries convergentes.

Exercice 2.

1) On a $\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{t^2+n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$, la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ converge,

donc la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions $u_n(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $S(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. On a donc :

$$\lim_{t\to 0} S(t) = S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3.

1) On a $f_n(0) = 1$, la série $\sum f_n(0)$ diverge.

Pour $x \neq 0$ $f_n(x) \sim \frac{1}{x^2 n^2}$ quand $n \to +\infty$ donc $\sum f_n(x)$ converge par comparaison avec une série de Riemann.

2) On a $S_{p,q}(x) \geq u_p(x)$ car $u_n(x) \geq 0 \ \forall n$

donc $S_{p,q}\left(\frac{1}{p}\right) \geq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^*$, elle y vérifie le critère de Cauchy uniforme : c'est à dire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que si $N \leq p < q$ on a :

$$|S_{p,q}(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Comme $S_{p,q}\left(\frac{1}{p}\right) \geq 1/2$, c'est impossible.

3) On a $\sup_{x\in[a,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) = \frac{1}{1+n^2a^2}$

$\sum u_n(a)$ est convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. L'argument est le même sur $]-\infty,-a]$.

4). Chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}^*$, la fonction S est donc continue sur $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ pour tout $a>0$ (par la partie 3)) donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

On calcule $u_n'(x) = -\dfrac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$.

On a $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |u_n'(x)| \leq \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} \dfrac{2n^2x}{n^4x^4} = \dfrac{2}{a^3n^2}$.

La série de fonctions $\sum u_n'$ converge donc normalement (donc uniformément) sur $[a,+\infty[$ (et aussi sur $]-\infty,-a]$) pour tout $a>0$.

La fonction S est donc dérivable sur $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

5) On regarde $T(x) = x^2(S(x)-1) =$

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\frac{1}{x^2}} = R\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $R(t)$ est définie dans l'exercice 2.

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2(S(x)-1) = \lim\limits_{t\to 0^\pm} R(t) = \dfrac{\pi^2}{6}$,

ce qui veut dire que $S(x) = 1 + \dfrac{\pi^2}{6x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand $x \to \pm\infty$.

Exercice 4

1) La fonction $\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc localement intégrable. On regarde séparément la convergence en 0 et en $+\infty$.

Convergence en 0 :

on a : $e^{-ax} = 1 - ax + O(x^2)$, $e^{-bx} = 1 - bx + O(x^2)$

quand $x \to 0$ donc :

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = (b-a) + O(x).$$

la fonction f a donc une limite finie en 0^+, donc est bornée au voisinage de 0, l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge absolument.

Convergence en $+\infty$:

On a $|e^{-ax}| \leq \frac{1}{x}$, $|e^{-bx}| \leq \frac{1}{x}$ pour x assez grand,

donc $|f(x)| \leq \frac{2}{x^2}$ pour x assez grand, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge absolument.

2) les deux intégrales $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x}\,dx$ et $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x}\,dx$ convergent par ce qu'on vient de voir, le résultat suit de la linéarité des intégrales impropres.

3) en posant $ax = t$ on a : $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

et en posant $bx = t$ on a : $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

les deux intégrales en t sont convergentes donc :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

4) $\frac{e^{-t} - 1}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et converge vers -1 quand $t \to 0^+$

car $e^{-t} = 1 - t + O(t^2)$ quand $t \to 0$.

donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$ converge.

On a donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{a\varepsilon}^{1}\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \int_{b\varepsilon}^{1}\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a\varepsilon}^{1}\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\varepsilon}^{1}\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = \int_0^1\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \int_0^1\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = 0.$$

5) On a : $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{1}{t}\,dt$

$$= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \ln b\varepsilon - \ln a\varepsilon = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On a donc :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}\,dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$