* **Calcul de ∇u** : $\quad u(x) = \sum_{i\in I} \phi_i(x) \langle a_i, x-t_i\rangle$

Soit $x \in \Omega$,

$$\nabla u(x) = \sum_{i\in I} \langle a_i, x-t_i\rangle \nabla\phi_i(x) + \sum_{i\in I} \phi_i(x)\, a_i$$

(*) ϕ_i sont à supports disjoints : la somme ne contient qu'un terme (dépend du point x)

$$\Rightarrow \|\nabla u\|_p \leq \underbrace{\Big\| \sum_{i\in I} \langle a_i, \cdot - t_i\rangle \nabla\phi_i \Big\|_p}_{①} + \underbrace{\Big\| \sum_{i\in I} \phi_i a_i \Big\|_p}_{②}$$

- ① : $$\Big\|\sum_{i\in I} \langle a_i, \cdot - t_i\rangle \nabla\phi_i\Big\|_p^p = \int_{x\in\Omega} \Big| \sum_{i\in I} \langle a_i, x-t_i\rangle \nabla\phi_i(x) \Big|^p dx$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{x\in\Omega} \sum_{i\in I} \big| \langle a_i, x-t_i\rangle \nabla\phi_i(x) \big|^p dx$$

$|x-t_i| \leq \frac{\delta\sqrt{n}}{2}$

$$\underset{\text{Fubini + Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{i\in I} |a_i|^p \left(\frac{\delta\sqrt{n}}{2}\right)^p \int_{\cancel{\Omega}\, \to T_i\setminus Q_i} |\nabla\phi_i(x)|^p dx$$

$\operatorname{supp} \nabla\phi_i \subset T_i \setminus Q_i$

$\begin{cases} \|\nabla\phi_i\|_\infty \leq \frac{2}{\alpha\delta} \\ \text{et } \alpha = \frac{\varepsilon}{4n} \end{cases}$

$$\leq \sum_{i\in I} |a_i|^p \left(\frac{\cancel{\delta}\sqrt{n}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\alpha\cancel{\delta}} \right)^p |T_i \setminus Q_i|$$

$|T_i\setminus Q_i| = (1-(1-2\alpha)^n)|T_i| \leq \underbrace{2\alpha n}_{=\frac{\varepsilon}{2}} |T_i|$

$$\leq \left(\frac{4n\sqrt{n}}{\varepsilon}\right)^p \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{i\in I} |a_i|^p$$

- ② : De même, $$\Big\|\sum_{i\in I} \phi_i a_i\Big\|_p^p = \int_\Omega \Big| \sum_{i\in I} \phi_i(x) a_i \Big|^p dx$$

$$= \sum_{i\in I} \int_{T_i} |\phi_i(x) a_i|^p dx$$

$|\phi_i(x)| \leq 1$

$$\leq \sum_{i\in I} |a_i|^p |T_i|$$

Ainsi : $$\|\nabla u\|_p \leq \Bigg(\underbrace{\frac{4n\sqrt{n}}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p}}_{\leq C\,\varepsilon^{1/p - 1}} + 1 \Bigg) \Bigg[\sum_{i\in I} |a_i|^p |T_i| \Bigg]^{1/p}$$

pour $\varepsilon \leq 1$ $(\Rightarrow \varepsilon^{1/p - 1} \geq 1)$

et de plus, $|a_i|^p = \left(\fint_{T_i} h(y)\,dy \right)^p \underset{\text{Jensen}}{\leq} \fint_{T_i} |h(y)|^p\,dy$

$$\Rightarrow \sum_{i\in I} |a_i|^p |T_i| = \sum_{i\in I} \int_{T_i} |h(y)|^p\,dy \leq \int_{\Omega} |h(y)|^p\,dy = \|h\|_p^p$$

<u>BILAN</u>: $\boxed{\|\nabla u\|_p \leq C\varepsilon^{1/p-1} \|h\|_p^p}$

• <u>Cas $p=+\infty$</u> : toujours parce que la somme ne contient qu'un terme pour chaque x donné ⊛

① : $$\Big\|\sum_{i\in I} \langle a_i, \cdot - t_i\rangle \nabla\phi_i\Big\|_\infty = \max_{i\in I} \|\langle a_i, \cdot - t_i\rangle \nabla\phi_i\|_\infty$$
$$\leq \frac{\delta\sqrt{n}}{2} \cdot \max_{i\in I} |a_i|\, \|\nabla\phi_i\|_\infty$$
$$\leq \frac{\cancel{\delta}\sqrt{n}}{2} \times \frac{8n}{\cancel{\delta}\varepsilon} \max_{i\in I} |a_i| \quad \text{et } |a_i| = \left|\fint_{T_i} h\right| \leq \|h\|_\infty$$
$$\leq \frac{4n\sqrt{n}}{\varepsilon} \|h\|_\infty$$

② : $$\Big\|\sum_{i\in I} \phi_i a_i\Big\|_\infty = \max_{i\in I} \|\phi_i a_i\|_\infty \leq \max_{i\in I} |a_i| \leq \|h\|_\infty$$

$$\Longrightarrow \boxed{\|\nabla u\|_\infty \leq C\varepsilon^{-1} \|h\|_\infty} \quad (\text{pour } \varepsilon \leq 1)$$

EXERCICE 2 Soit $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Il existe $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Borel tq.

$$\begin{cases} Du = f\mathcal{L}^n + g\mathcal{H}^{n-1} \\ \int |g| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dépend de } n \text{ uniquement}}}{C} \|f\|_{L^1} \qquad (*) \end{cases}$$

Remarque - $\underbrace{\|Du\|_{TV}}_{\text{mesure de Radon}} = |Du|(\mathbb{R}^n) \underbrace{\leq}_{\substack{"=" \\ \text{car } \mathcal{L}^n \perp \mathcal{H}^{n-1}}} \|f\|_{L^1} + \int |g| \, d\mathcal{H}^{n-1}$

Ainsi $(*) \Rightarrow \|Du\|_{TV} \leq cte \, \|f\|_{L^1}$

1/ On suit la même stratégie que dans l'EX. 1 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ($\Omega \to \mathbb{R}^n$ sans perte de généralité)

- K_δ grille cartésienne de $\mathbb{R}^n$ de pas $\delta > 0$ et $K_\delta = \{T_i\}_{i \in I}$ (tous les cubes ici) (I dnb)

- $\boxed{u_\delta(x) := \sum_{i \in I} \langle a_i, x - t_i \rangle \mathbb{1}_{T_i}(x)}$ et toujours $\boxed{a_i = \fint_{T_i} f}$

  pas de cut-off cette fois.

(i) $u_\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|u_\delta\|_{L^1} \leq \frac{\delta\sqrt{n}}{2} \|f\|_{L^1}$

Remarque : on définit par exemple $u_\delta(x) = 0$ sur ∂T_i, $i \in I$ et on sous-entend T_i cube ouvert

↳ somme de termes disjoints
↳ change u_δ sur un ens. de mesure nulle

* Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $|u_\delta(x)| \leq |a_i||x - t_i| \leq \frac{\delta\sqrt{n}}{2} |a_i|$ pour $i \in I$ tq $x \in T_i$

* $\|u_\delta\|_{L^1} = \int_{x \in \mathbb{R}^n} |u_\delta(x)| \, dx = \sum_{i \in I} \int_{x \in T_i} |u_\delta(x)| \, dx \leq \frac{\delta\sqrt{n}}{2} \sum_{i \in I} \underbrace{|T_i| |a_i|}_{\leq \int_{T_i} |f|}$

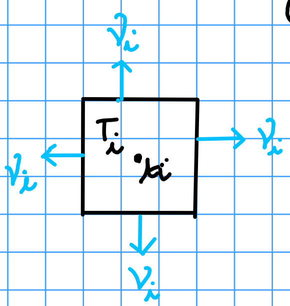
$$\Rightarrow \|u_\delta\|_{L^1} \leq \frac{\delta\sqrt{n}}{2} \|f\|_{L^1}$$

(ii) Calcul distributionnel de Du_δ $\rightarrow$ $u_\delta \in BV(\mathbb{R}^n)$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ fonction test,

$$\langle \nabla u_\delta, \varphi \rangle = -\langle u_\delta, \operatorname{div}\varphi \rangle$$

$$= -\sum_{i \in I} \int_{T_i} u_\delta(x) \operatorname{div}\varphi(x)\, dx$$



Or, IPP : $$\int_{T_i} u_\delta \operatorname{div}\varphi = -\int_{T_i} \langle \underbrace{\nabla u_\delta}_{=a_i}, \varphi \rangle + \int_{\partial T_i} u_\delta \langle \varphi, \overset{\text{normale ext. à } T_i}{\nu_i} \rangle$$

$$= -\int_{T_i} \langle a_i, \varphi \rangle + \int_{\partial T_i} \langle a_i, x - t_i \rangle \langle \varphi(x), \nu_i(x) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

En revenant à la $\sum_{i \in I}$:

$$\langle \nabla u_\delta, \varphi \rangle = \sum_{i \in I} \int_{T_i} \langle a_i, \varphi \rangle - \sum_{i \in I} \int_{\partial T_i} \langle a_i, x - t_i \rangle \langle \nu_i(x), \varphi(x) \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \langle g^a_\delta, \varphi \rangle + \int_{\mathbb{R}^n} \langle g^s_\delta, \varphi \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

où

- $g^a_\delta = \sum_{i \in I} a_i \mathbb{1}_{T_i}$
- $g^s_\delta(x) = \sum_{i \in I} \langle a_i, x - t_i \rangle \nu_i(x) \mathbb{1}_{\partial T_i}(x)$

Il reste à vérifier que $g^a_\delta \in L^1$ et $g^s_\delta \in L^1(\mathcal{H}^{n-1})$ et on aura

$$\nabla u_\delta = g^a_\delta \mathcal{L}^n + g^s_\delta \mathcal{H}^{n-1} \quad \text{mesure de Radon}$$

(et comme $u_\delta \in L^1 \Rightarrow u_\delta \in BV(\mathbb{R}^n)$)

- $\|g^a_\delta\|_{L^1} = \sum_{i \in I} |a_i| |T_i| = \|f\|_{L^1}$
- $\|g^s_\delta\|_{L^1(\mathcal{H}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^n} |g^s_\delta| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \sum_{i \in I} \int_{\partial T_i} |\langle a_i, x - t_i \rangle| \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$

(pas « $\overset{?}{=}$ » : il pourrait y avoir compensation entre les 2 termes sur une m̂ face) et comme $\int_{\partial T_i} |\langle a_i, x-t_i\rangle| \, dH^{n-1}(x) \leqslant |a_i| \frac{\delta\sqrt{n}}{2} \underbrace{|\partial T_i|}_{= \underbrace{2n}_{\text{nb de faces}} \cdot \delta^{n-1} = \frac{2n}{\delta}|T_i|}$

$\leqslant |a_i| \, n\sqrt{n} \, |T_i|$

on obtient $\|g_\delta^s\|_{L^1(H^{n-1})} \leqslant n\sqrt{n} \sum_{i\in I} |a_i||T_i| = n\sqrt{n} \, \|f\|_{L^1}$

(iii) Soit $\eta > 0$. Choisir $\delta > 0$ tel que $\|f - g_\delta^a\|_{L^1} \leq \eta$

* Si $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ f uniformément continue et on peut

x, y dans le même T_i $\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \eta$

[fixer $\delta > 0$ tel que $|x-y| \leq \delta\sqrt{n} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \eta' = \frac{\eta}{|(\mathrm{supp} f)^1|}$ ← 1-voisinage de supp f

($\delta\sqrt{n} < 1$) pour rester dans $(\mathrm{supp} f)^1$

On a alors,

$$\|f - g_\delta^a\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \sum_{i\in I} a_i \mathbb{1}_{T_i}(x)| \, dx = \sum_{i\in I} \int_{T_i} |f(x) - a_i|$$

$f(x) - a_i = f(x) - ⨍_{T_i} f(y) = ⨍_{T_i} (f(x) - f(y))$

$$\leqslant \sum_{i\in I} \int_{x\in T_i} ⨍_{y\in T_i} \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq \eta'} \, dy \, dx$$

car f à support compact

$$\leqslant \eta' \sum_{\substack{i\in I \\ i \text{ tq } T_i \cap \mathrm{supp} f \neq \emptyset}} |T_i|$$

$$\leqslant \eta$$

* Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$: on conclut par densité de $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$:

Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tq $\|f - \varphi\|_{L^1} \leq \eta/2$

$$\|f - g_\delta^a\|_{L^1} \leqslant \|f - \varphi\|_{L^1} + \|\varphi - g_{\delta a}^\delta\|_{L^1} \quad \text{où } a_i = ⨍_{T_i} \varphi$$

$$\leqslant \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2}$$ pour $\delta > 0$ donné par le cas précédent appliqué à φ.