Université Paris-Saclay
2022 – 2023

Master Mathématiques et Applications
Distributions et Analyse de Fourier

Chargés de TD : Blanche Buet et Thomas Letendre.

Feuille 8 – Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

Définition. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note

$$N_p(\varphi) = \sup\left\{ |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^d, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leqslant p, |\beta| \leqslant p \right\} \in [0, +\infty].$$

On rappelle que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $N_p(\varphi) < +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 (Distributions tempérées, exemples et contre-exemples). 1. Soient $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et P un polynôme tels que $f(x) = O(P(x))$ lorsque $|x| \to +\infty$, au sens où il existe $C \geqslant 0$ et $R \geqslant 0$ tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| \geqslant R$, $|f(x)| \leqslant C|P(x)|$. Montrer que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Comme $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ on a $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$|\langle f\,, \varphi\rangle| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\leqslant R} |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\leqslant R} |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Pour le premier terme, on a

$$\int_{|x|\leqslant R} |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{|x|\leqslant R} |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{i}$$

Pour traiter le second terme, notons $P = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha X^\alpha$, où les $a_\alpha \in \mathbb{C}$ sont les coefficients de P. L'estimation $f(x) = O(P(x))$ donne l'existence de C et R comme dans l'énoncé. Sans perte de généralité, on peut supposer que $R \geqslant 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| \geqslant R$:

$$|f(x)| \leqslant C|P(x)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} |a_\alpha||x^\alpha| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} |a_\alpha||x|^{|\alpha|} \leqslant C \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} |a_\alpha| \right) |x|^m.$$

En notant $C' = C \sum_{|\alpha|\leqslant m} |a_\alpha|$ on a donc :

$$\int_{|x|\geqslant R} |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant C' \int_{|x|\geqslant R} |x|^m |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = C' \int_{|x|\geqslant R} |x|^{m+d+1} |\varphi(x)| \frac{1}{|x|^{d+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|x|^{m+d+1}|\varphi(x)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^d |x_i| \right)^{m+d+1} |\varphi(x)| \leqslant d^{m+d+1} \sum_{i=1}^d |x_i|^{m+d+1} |\varphi(x)| \leqslant d^{m+d+2} N_{m+d+1}(\varphi).$$

Donc

$$\int_{|x|\geqslant R} |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant C' d^{m+d+2} \left(\int_{|x|\geqslant R} \frac{1}{|x|^{d+1}}\,\mathrm{d}x \right) N_{m+d+1}(\varphi). \tag{ii}$$

Notons que l'intégrale dans le terme de droite est bien finie et est juste une constante.

En regroupant (i) et (ii), et en remarquant que $\|\varphi\|_\infty \leqslant N_{m+d+1}(\varphi)$, on obtient l'existence de $\widetilde{C} \geqslant 0$ indépendant de φ tel que $|\langle f\,, \varphi\rangle| \leqslant \widetilde{C} N_{m+d+1}(\varphi)$. Donc $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

2. Est-ce que $g : x \mapsto e^{x^2}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

   La fonction g est L^1_{loc} donc définit bien un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On va montrer par l'absurde que $T_g \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

   Commençons par évoquer une approche qui ne marche pas telle quelle. Si $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, alors on pourrait étendre T_g en une unique forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En identifiant T_g et son extension à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on aurait alors $\langle T_g\,, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Notamment, on aurait $\langle T_g\,, \frac{1}{g}\rangle \in \mathbb{C}$. En effet $\frac{1}{g} : x \mapsto e^{-x^2}$ est une gaussienne, en particulier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

   On a très envie de dire que $\langle T_g\,, \frac{1}{g}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x = +\infty$ pour obtenir une contradiction. Le piège est que, comme $\langle T_g\,, \varphi\rangle$ est définit comme un prolongement par continuité lorsque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{D}(\mathbb{R})$, rien ne garantit que $\langle T_g\,, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} g\varphi \,\mathrm{d}x$ dans ce cas. En travaillant plus dans cette direction on pourrait arriver à une contradiction, mais on va préférer une autre approche.

   On va utiliser le critère énoncé dans l'exemple 3.3.5 des notes de cours. D'après ce critère, comme g est à valeurs positives et L^1_{loc}, si $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ il existerait $C \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

   $$\forall R > 0, \qquad \int_{-R}^{R} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C(1+R)^p.$$

   Or, par définition de l'exponentielle, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{x^2} \geqslant \frac{x^{2p}}{(2p)!}$. On aurait donc

   $$\begin{aligned} C &\geqslant \frac{1}{(1+R)^p}\int_{-R}^{R} e^{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{(1+R)^p}\int_{-R}^{R} \frac{x^{2p}}{(2p)!}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1+R)^p}\left[\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\right]_{-R}^{R} \\ &\geqslant \frac{2}{(2p+1)!}\frac{R^{2p+1}}{(1+R)^p} \xrightarrow[R\to+\infty]{} +\infty, \end{aligned}$$

   ce qui est absurde. Donc $T_g \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

3. Est-ce que $h : x \mapsto e^x e^{ie^x}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

   La fonction $h_0 : x \mapsto e^{ie^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et bornée sur $\mathbb{R}$. Par la question 1, on a $h_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est stable par dérivation, $h_0' = ih \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Donc $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$, calculs élémentaires)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$, on rappelle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\tau_a\varphi : x \mapsto \varphi(x-a)$ et, pour tout $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\tau_a S : \varphi \mapsto \langle S\,, \tau_{-a}\varphi\rangle$.
Justifier que les distributions sur $\mathbb{R}$ suivantes sont tempérées et calculer leurs transformées de Fourier.

1. $\delta_a^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.

   Soit $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, la distribution $\delta_a^{(k)}$ est à support compact donc elle est tempérée, voir l'exemple 3.3.2 du cours. On rappelle que l'opérateur de translation $\tau_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est défini par : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\tau_a\varphi : x \mapsto \varphi(x-a)$. Cet opérateur s'étend à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ en posant $\tau_a : T \mapsto T \circ \tau_{-a}$ et on a alors $\widehat{\tau_a T} = e^{-ia\xi}\widehat{T}$. En appliquant ceci à $\delta_0^{(k)}$ on obtient :

   $$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{\delta_a^{(k)}}(\xi) = \widehat{\tau_a(\delta_0^{(k)})}(\xi) = e^{-ia\xi}\widehat{\delta_0^{(k)}}(\xi) = e^{-ia\xi}(i\xi)^k\widehat{\delta_0}(\xi) = e^{-ia\xi}(i\xi)^k.$$

   Remarque. On obtient bien que $\widehat{\delta_a^{(k)}}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, ce qui est attendu pour la transformée de Fourier d'une distribution à support compact. On pourrait aussi calculer $\widehat{\delta_a^{(k)}}$ en utilisant la prop 3.4.8 du cours, qui affirme que $\widehat{\delta_a^{(k)}}(\xi) = \langle \delta_a^{(k)}\,, \exp(i\xi\cdot)\rangle$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

   Remarque. En dimension d, on a de même $\widehat{\partial_\alpha\delta_a} : \xi \mapsto e^{-ia\cdot\xi}(i\xi)^\alpha$ où $a \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

2. $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   La fonction cos est bornée, donc elle définit une distribution tempérée (voir exercice 1 question 1). On a :
$$\widehat{e^{ix}} = \widehat{e^{ix} \times 1} = \tau_1\left(\widehat{1}\right) = \tau_1(2\pi\delta_0) = 2\pi\delta_1.$$
   De même, $\widehat{e^{-ix}} = 2\pi\delta_{-1}$. Comme $\cos : x \mapsto \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, on a donc $\widehat{\cos} = \pi(\delta_{-1}+\delta_1)$.

3. $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$, la fonction indicatrice de $[-1,1]$.

   Comme f définit une distribution à support compact, elle est tempérée et $\widehat{f}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (prop 3.4.8 du cours). On pourrait calculer directement $\widehat{f}(\xi) = \langle f\,, \exp(i\xi\cdot)\rangle$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Nous allons voir une méthode alternative.

   On a $f' = \delta_{-1} - \delta_1$. Appliquons la transformée de Fourier à cette égalité. On obtient, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:
$$i\xi\widehat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi) = \widehat{\delta_{-1}}(\xi) - \widehat{\delta_1}(\xi) = e^{ix\xi} - e^{-ix\xi}.$$
   Donc, pour tout $\xi \neq 0$, on a $\widehat{f}(\xi) = 2\,\mathrm{sinc}(\xi)$. Comme les deux membres de cette égalités sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que l'égalité est aussi valable en 0. D'où $\widehat{f} = 2\,\mathrm{sinc}$.

   Rappelons que sinc est la somme de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k X^{2k}}{(2k+1)!}$ qui est de rayon de convergence infini. Cette fonction est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. (*facultatif*) $g_{ab} = \mathbf{1}_{[a,b]}$, la fonction indicatrice de $[a,b]$, où $-\infty < a < b < +\infty$.

   Comme dans la question précédente, g_{ab} est à support compact, donc elle définit une distribution tempérée dont la transformée de Fourier est lisse. On se ramène à $a = -1$ et $b = 1$ par translation et dilatation. Pour tout $\lambda > 0$, notons $D_\lambda : \varphi \mapsto \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. De la sorte, $D_\lambda(\mathbf{1}_{[-1,1]}) = \mathbf{1}_{[-\lambda,\lambda]}$. On a alors
$$g_{ab} = \tau_{\frac{a+b}{2}} \circ D_{\frac{b-a}{2}}(f).$$
   Soit $\lambda > 0$. Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, c'est aussi le cas de $D_\lambda(f)$. On peut alors calculer $\widehat{D_\lambda(f)}$ par sa formule intégrale : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
$$\widehat{D_\lambda(f)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-ix\xi} dx = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-i\lambda y\xi} dy = \lambda\widehat{f}(\lambda\xi),$$
   où on a effectué le changement de variable $x = \lambda y$. On a alors
$$\begin{aligned}\widehat{g_{ab}}(\xi) &= \exp\left(-i\frac{a+b}{2}\xi\right)\widehat{D_{\frac{b-a}{2}}f}(\xi) = \frac{b-a}{2}\exp\left(-i\frac{a+b}{2}\xi\right)\widehat{f}\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)\\ &= (b-a)\exp\left(-i\frac{a+b}{2}\xi\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{b-a}{2}\xi\right).\end{aligned}$$

Exercice 3 (Parité et transformée de Fourier)**.** Pour tout $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ on note $\check{\varphi} : x \mapsto \varphi(-x)$. Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{T}$ la distribution définie par $\check{T} : \varphi \mapsto \langle T\,, \check{\varphi}\rangle$. En généralisant le cas des fonctions, on dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est *paire* (resp. *impaire*) si $\check{T} = T$ (resp. si $\check{T} = -T$).

1. Montrer que $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est paire et que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est impaire.

   Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle\check{\delta_0}\,, \varphi\rangle = \langle\delta_0\,, \check{\varphi}\rangle = \check{\varphi}(0) = \varphi(0)$. Donc $\check{\delta_0} = \delta_0$ et δ_0 est paire. Par ailleurs, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \check{\varphi}\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} - \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle$$
   et donc $\check{\mathrm{vp}}\left(\frac{1}{x}\right) = -\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\check{\widehat{\varphi}} = \widehat{\check{\varphi}}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\check{\widehat{\varphi}}(\xi) = \widehat{\varphi}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{i\langle x\,,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-x) e^{-i\langle x\,,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \check{\varphi}(x) e^{-i\langle x\,,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x = \widehat{\check{\varphi}}(\xi).$$

Donc $\check{\widehat{\varphi}} = \widehat{\check{\varphi}}$.

3. Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\check{\widehat{S}} = \widehat{\check{S}}$.
Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\left\langle \check{\widehat{S}}\,,\varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{S}\,,\check{\varphi} \right\rangle = \left\langle S\,,\widehat{\check{\varphi}} \right\rangle = \left\langle S\,,\check{\widehat{\varphi}} \right\rangle = \langle \check{S}\,,\widehat{\varphi} \rangle = \left\langle \widehat{\check{S}}\,,\varphi \right\rangle,$$

et donc $\check{\widehat{S}} = \widehat{\check{S}}$.

Remarque. En particulier, la transformée de Fourier d'une fonction ou d'une distribution paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).

Exercice 4 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$, calculs moins élémentaires)**.** On note $H = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside et $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction signe, définie par $S(x) = -1$ si $x < 0$, $S(0) = 0$ et $S(x) = 1$ si $x > 0$.

1. Justifier que S définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ et montrer que $x\widehat{S} = -2i$.
Comme vu dans la question 1 de l'exercice 1, on a $L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et donc $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier et multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à croissante lente, on a $x\widehat{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle x\widehat{S}\,,\varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{S}\,,x\varphi \right\rangle = \langle S\,,\widehat{x\varphi} \rangle = \left\langle S\,,i\widehat{\varphi}' \right\rangle = -i\left\langle S'\,,\widehat{\varphi} \right\rangle = -2i\langle \delta_0\,,\widehat{\varphi} \rangle = -2i\left\langle \widehat{\delta_0}\,,\varphi \right\rangle$$

On en conclut que $x\widehat{S} = -2i\widehat{\delta_0} = -2i$.

2. En déduire que $\widehat{S} = -2i\,\mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
On rappelle que $x\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) = 1$. On vient de voir que $x\widehat{S} = -2i$, donc

$$x\left(\widehat{S} + 2i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.$$

On sait que les solutions de l'équation $xT = 0$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont les multiples des δ_0. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\widehat{S} = -2i\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big) + \lambda\delta_0$. Il reste à déterminer λ, ce que l'on va faire par des considérations de parité.
La fonction S est impaire. Comme l'opération $\check{\cdot}$ sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ prolonge celle sur les fonctions, on a $\check{S} = -S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Par la question 3 de l'exercice 3, on a donc : $\check{\widehat{S}} = \widehat{\check{S}} = -\widehat{S}$. En utilisant les propriétés de parité de δ_0 et $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ prouvée dans la question 1 de l'exerice 3, on obtient :

$$2i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda\delta_0 = -\widehat{S} = \check{\widehat{S}} = \left(-2i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda\delta_0\right)^{\vee} = -2i\mathrm{vp}\check{\left(\frac{1}{x}\right)} + \lambda\check{\delta_0} = 2i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda\delta_0.$$

Cela impose $2\lambda\delta_0 = 0$ et donc $\lambda = 0$. Finalement, on a donc $\widehat{S} = -2i\,\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$.

3. Calculer $\widehat{H}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
On écrit la fonction de Heaviside sous la forme $H = \frac{1}{2}(1+S)$. D'où $H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et :
$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\left(\widehat{1}+\widehat{S}\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi\delta_0 - 2i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \pi\delta_0 - i\,\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Justifier que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.
Comme $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on a $\widehat{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. D'après la question 2, $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{i}{2}\widehat{S} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Par inversion de Fourier, on obtient :
$$\widehat{\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{i}{2}\widehat{\widehat{S}} = \frac{i}{2}(2\pi)\check{S} = -i\pi S.$$

L'exercice suivant est adapté de l'examen final de 2021.

Exercice 5 (Transformation de Fourier et convolution dans $\mathcal{S}'$)**.** Soient $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on rappelle que leur convolée est la fonction définie par $\rho * T : x \mapsto \langle \tau_x \check{T}\,,\rho\rangle = \langle T\,,\rho(x-\cdot)\rangle$.

1. Soient $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $N_p(\varphi * \rho) \leqslant C N_p(\varphi)$.
Soient α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ de longueur au plus p. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a :
$$\begin{aligned} x^\alpha \partial^\beta(\varphi * \rho)(x) &= x^\alpha\Big((\partial^\beta\varphi) * \rho\Big)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (x-y+y)^\alpha \partial^\beta\varphi(y)\rho(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} y^\gamma \partial^\beta \varphi(y)(x-y)^{\alpha-\gamma}\rho(x-y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned} \left|x^\alpha \partial^\beta(\varphi * \rho)(x)\right| &\leqslant \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left\|y^\gamma \partial^\beta \varphi\right\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{\alpha-\gamma}|\rho(x-y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant N_p(\varphi) \sum_{\gamma \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} |z|^{\alpha-\gamma}|\rho(z)|\,\mathrm{d}z \leqslant C_\alpha N_p(\varphi), \end{aligned}$$
où $C_\alpha > 0$ est une constante ne dépendant que de ρ et α. Dans la dernière étape, on a utilisé le fait que $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ implique l'intégrabilité de $z \mapsto |z|^{\alpha-\gamma}|\rho|(z)$.
On pose $C = \max_{|\alpha| \leqslant p} C_\alpha$. D'après le calcul précédent, pour tout α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ de longueur au plus p on a :
$$\left\|x^\alpha \partial^\beta(\varphi * \rho)\right\|_\infty \leqslant C N_p(\varphi),$$
ce qui prouve le résultat.

2. Soient φ et $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{\varphi * \rho} = \widehat{\varphi}\,\widehat{\rho}$.
Soient α et $\beta \in \mathbb{N}^d$ et notons $p = \max(|\alpha|, |\beta|)$. D'après la question précédente, on a :
$$\left\|x^\alpha \partial^\beta(\varphi * \rho)\right\|_\infty \leqslant C N_p(\varphi) < +\infty.$$
Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p(\varphi * \rho) < +\infty$ et $\varphi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Calculons la transformée de Fourier de $\varphi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,
$$\begin{aligned} \widehat{\varphi * \rho}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x\,,\xi\rangle} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\rho(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle y\,,\xi\rangle}\varphi(y) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x-y\,,\xi\rangle}\rho(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle y\,,\xi\rangle}\varphi(y) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle z\,,\xi\rangle}\rho(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \widehat{\rho}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Il reste à justifier qu'on peut bien intervertir les intégrales par Fubini. C'est le cas car

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|e^{-i\langle x\,,\xi\rangle}\varphi(y)\rho(x-y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(y)||\rho(x-y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_{L^1}\|\rho\|_{L^1} < +\infty.$$

3. Soient $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\rho * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{\rho * S} = \widehat{\rho}\,\widehat{S}$.

   Indication. Rappelons qu'on a prouvé dans l'exerice 5 de la feuille 5 que $\rho * S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que $\langle \rho * S\,,\varphi\rangle = \langle S\,,\varphi * \check{\rho}\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

   Comme $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est tempérée, il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $|\langle S\,,\psi\rangle| \leqslant CN_p(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$|\langle \rho * S\,,\varphi\rangle| = |\langle S\,,\varphi * \check{\rho}\rangle| \leqslant CN_p(\varphi * \check{\rho}) \leqslant C\widetilde{C}N_p(\varphi),$$

   où on a utilisé que $\check{\rho} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et la constante $\widetilde{C}$ donnée par la question 1. Donc $\rho * S$ est tempérée. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$\left\langle \widehat{\rho * S}\,,\varphi\right\rangle = \langle \rho * S\,,\widehat{\varphi}\rangle = \langle S\,,\widehat{\varphi} * \check{\rho}\rangle = \left\langle \widehat{S}\,,\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi} * \check{\rho})\right\rangle.$$

   La formule d'inversion de Fourier dit que $\mathcal{F}^{-1} : \psi \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{\psi}(-\cdot)$. En utilisant le résultat de la question 2, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi} * \check{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^d}(\widehat{\widehat{\varphi} * \check{\rho}})(-\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{\widehat{\varphi}}(-\cdot)\widehat{\check{\rho}}(-\cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi})\check{\widehat{\rho}}(-\cdot) = \varphi\widehat{\rho}.$$

   Finalement $\left\langle \widehat{\rho * S}\,,\varphi\right\rangle = \left\langle \widehat{S}\,,\varphi\widehat{\rho}\right\rangle = \left\langle \widehat{\rho}\widehat{S}\,,\varphi\right\rangle$, d'où la conclusion.

   Remarquons que le produit $\widehat{\rho}\widehat{S}$ est bien défini. En effet, comme $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier est $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente (prop. 3.4.8 du cours). On a donc $\widehat{\rho} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ et donc $\widehat{\rho}\widehat{S}$ est bien définie dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la prop. 3.3.9 du cours.

Exercice 6 (Régularité du Dirac)**.** Déterminer les $s \in \mathbb{R}$ tels que $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$.
Soit $s \in \mathbb{R}$, on rappelle que $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\xi \mapsto \langle\xi\rangle^s\widehat{\delta_0} = \langle\xi\rangle^s$ est une fonction L^2. Par un changement de variable polaire,

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\langle\xi\rangle|^{2s}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d}\left(1+|\xi|^2\right)^s\mathrm{d}\xi = \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1})\int_0^{+\infty} r^{d-1}(1+r^2)^s\,\mathrm{d}r.$$

Dans le terme de droite, l'intégrande est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, et équivalente à r^{2s+d-1} lorsque $r \to +\infty$. L'intégrale est donc convergente si et seulement si $2s + d < 0$. Ainsi, on obtient que $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $s < -\frac{d}{2}$.

Exercice 7 (Distributions harmoniques)**.** Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution telle que $\Delta T = 0$.

1. Montrer que T est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$.
   Le laplacien Δ est l'opérateur différentiel $P(\partial)$ avec $P = \sum_{j=1}^d X_j^2 \in \mathbb{R}[X_1,\cdots,X_d]$. Le polynôme P est homogène de degré 2 et, pour tout $\xi \neq 0$ on a $P(\xi) = |\xi|^2 \neq 0$. Donc $\Delta = P(\partial)$ est elliptique d'ordre 2. C'est même le prototype des opérateurs elliptiques.
   Comme $\Delta T = 0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, le théorème 3.5.7 du cours nous donne que $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que T est un polynôme.
   Si on suppose que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on peut passer en Fourier dans l'équation $\Delta T = 0$. On obtient que
   $$0 = \widehat{\Delta T} = \widehat{P(\partial)T} = P(i\xi)\widehat{T} = -|\xi|^2\widehat{T}.$$
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction-test dont le support est contenu dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On a
   $$\left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle = \left\langle |\xi|^2\widehat{T}, \frac{\varphi}{|\xi|^2} \right\rangle = 0,$$
   où on a utilisé le fait que $|\cdot|^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annule pas sur le support de φ. Donc $\widehat{T}_{|\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} = 0$ et $\widehat{T}$ est supportée en 0. Comme en dimension 1, cela signifie que $\widehat{T}$ est une combinaison linéaire de Dirac en 0 et de ses dérivées. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ et une famille $(a_\alpha)_{|\alpha|\leqslant m}$ de complexes, indexée par les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^d$ de longueur au plus m, telle que :
   $$\widehat{T} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$
   On applique la transformation de Fourier de part et d'autre. En utilisant la formule d'inversion on obtient pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$:
   $$(2\pi)^d T(-\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \widehat{\partial^\alpha \delta_0}(\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \widehat{\delta}_0(\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha (i\xi)^\alpha.$$
   Finalement $T = (\frac{1}{2\pi})^d \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha X^\alpha$.

   Remarque. Attention, les polynômes sont tous éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ mais ils ne sont pas tous harmoniques, par exemple $\Delta(\sum_{i=1}^d X_i^2) = 2d$.

3. Si T est bornée, montrer que T est constante.
   On a vu dans la question 1 que si $\Delta T = 0$ alors $T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Cela a alors du sens de dire que T est bornée. Si c'est le cas, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la question 1 de l'exercice 1. Par la question 2, on a que $T \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_d]$.
   Ainsi T est un polynôle borné donc constant. Précisons un peu, en raisonnant par l'absurde. Si T n'était pas constant, il existerait une droite vectorielle, disons $\mathbb{R}u$ avec $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, sur laquelle il n'est pas constant. La fonction $P : t \mapsto T(tu)$ serait alors une fonction polynomiale d'une variable non constante. On aurait donc $|T(tu)| = |P(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, ce qui contredirait le fait que T est borné.

Exercice 8 (Théorème de structure des distributions tempérées — *facultatif*)**.** Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on se propose de prouver qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que :
$$S = \big(1 + |x|^2\big)^p (\mathrm{Id} - \Delta)^q f. \tag{1}$$
Commençons par des résultats préliminaires concernant la fonction $\psi : x \mapsto \frac{1}{1+|x|^2}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, montrer qu'il existe un polynôme $P_{p,\alpha}$ de degré au plus $|\alpha|$ tel que $\partial^\alpha(\psi^p) = \psi^{p+|\alpha|} P_{p,\alpha}$.
   On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on raisonne par récurrence sur $|\alpha|$. Pour $|\alpha| = 0$ le résultat est trivial avec $P_{p,\alpha} = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| > 0$. Supposons le résultat vrai pour tout β tel que

$|\beta| = |\alpha| - 1$. Il existe $\beta \in \mathbb{N}^d$ et $j \in \{1, \cdots, d\}$ tels que $\alpha_j = \beta_j + 1$ et $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \neq j$. Alors

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(\psi^p) &= \partial_j \partial^\beta(\psi^p) = \partial_j\Big(\psi^{p+|\beta|}P_{p,\beta}\Big) = \psi^{p+|\beta|}\partial_j(P_{p,\beta}) - (p+|\beta|)\psi^{p+|\beta|+1}2x_jP_{p,\beta} \\ &= \psi^{p+|\alpha|}\underbrace{\left((1+|x|^2)\partial_j(P_{p,\beta}) - 2x_j(p+|\beta|)P_{p,\beta}\right)}_{P_{p,\alpha}},\end{aligned}$$

et $P_{p,\alpha}$ ainsi défini est bien un polynôme de degré au plus $|\alpha|$ puisque $P_{p,\beta}$ est de degré au plus $|\beta|$ par l'hypothèse de récurrence. Cela conclut la récurrence et établit le résultat.

2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \cdots, p\}$, montrer qu'il existe $A \geqslant 0$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait $N_k(\psi^p\varphi) \leqslant A \max_{|\gamma|\leqslant k}\|\partial^\gamma\varphi\|_\infty$.
   Fixons $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $\beta \in \mathbb{N}^d$, par la règle de Leibniz on montre que :
   $$\partial^\beta(\psi^p\varphi) = \sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta_1}{\gamma_1}\cdots\binom{\beta_d}{\gamma_d}\partial^\gamma(\psi^p)\partial^{\beta-\gamma}\varphi. \tag{iii}$$
   D'après la question 1, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^d$, on a $\partial^\gamma(\psi^p) = \psi^{p+|\gamma|}P_{p,\gamma}$, où $P_{p,\gamma}$ est un polynôme de degré au plus $|\gamma|$. Par croissance comparée, $\psi(x)^{|\gamma|}P_{p,\gamma}(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$. Comme de plus cette fonction est continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}^d$, disons par $A_\gamma > 0$.
   En injectant ces relations dans l'équation (iii) on obtient que, pour tout α et $\beta \in \mathbb{N}^d$:
   $$\left|x^\alpha\partial^\beta(\psi^p\varphi)(x)\right| \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta_1}{\gamma_1}\cdots\binom{\beta_d}{\gamma_d}A_\gamma|x^\alpha\psi^p(x)|\left\|\partial^{\beta-\gamma}\varphi\right\|_\infty.$$
   Si on suppose maintenant que $|\alpha| \leqslant k \leqslant p$, on a $|x^\alpha\psi(x)^p| \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$. Donc il existe $A'_\alpha > 0$ telle que $\|x^\alpha\psi^p\|_\infty \leqslant A'_\alpha$. On a donc finalement,
   $$\left\|x^\alpha\partial^\beta(\psi^p\varphi)\right\|_\infty \leqslant \underbrace{A'_\alpha\left(\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta_1}{\gamma_1}\cdots\binom{\beta_d}{\gamma_d}A_\gamma\right)}_{A_{\alpha,\beta}}\max_{\gamma\leqslant\beta}\|\partial^{\beta-\gamma}\varphi\|_\infty = A_{\alpha,\beta}\max_{\gamma\leqslant\beta}\|\partial^\gamma\varphi\|_\infty.$$
   Donc pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ de longueur au plus k, on a $\left\|x^\alpha\partial^\beta(\psi^p\varphi)\right\|_\infty \leqslant A_{\alpha,\beta}\max_{|\gamma|\leqslant k}\|\partial^\gamma\varphi\|_\infty$.
   En posant $A = \max_{|\alpha|\leqslant k, |\beta|\leqslant k} A_{\alpha,\beta}$ on obtient donc $N_k(\psi^p\varphi) \leqslant A\max_{|\gamma|\leqslant k}\|\partial^\gamma\varphi\|_\infty$.
   On vérifie dans la preuve précédente que les constantes qui apparaissent sont indépendantes de φ à chaque étape. En particulier, A ne dépend pas de φ, ce qui donne le résultat attendu.

On revient maintenant à notre problème principal.

3. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, résoudre l'équation $(\mathrm{Id} - \Delta)\varphi = f$ d'inconnue $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, en utilisant que la transformée de Fourier est un isomorphisme, on a :
   $$(\mathrm{Id} - \Delta)\varphi = f \iff (1+|\xi|^2)\widehat{\varphi} = \widehat{f} \iff \widehat{\varphi} = (1+|\xi|^2)^{-1}\widehat{f} = \psi\widehat{f}.$$
   Si $\psi\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on obtientra par inversion de Fourier qu'il existe une unique solution à l'équation $(\mathrm{Id} - \Delta)\varphi = f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que c'est la fonction $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\Big(\psi\widehat{f}\Big)$.
   Vérifions que c'est le cas. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est aussi le cas de $\widehat{f}$. Il suffit donc de montrer que la fonction ψ est $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente. Elle est bien $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la question 1 montre que $|\partial^\alpha\psi| = \psi^{|\alpha|+1}|P_{1,\alpha}| \leqslant |P_{1,\alpha}|$. Donc $|\partial^\alpha\psi|$ est dominée par un polynôme pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, et donc ψ est bien à croissance lente.

4. En déduire que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'opérateur $(\mathrm{Id} - \Delta)^q$ réalise une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même. Expliciter son inverse $(\mathrm{Id} - \Delta)^{-q}$.

   Pour $q = 0$, on utilise la convention usuelle que $(\mathrm{Id} - \Delta)^0 = \mathrm{Id}$. Le résultat est donc trivial.

   Pour $q = 1$, le résultat de la question 3 montre que $\mathrm{Id} - \Delta$ est une bijection linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. La preuve montre aussi que :

$$(\mathrm{Id} - \Delta)^{-1} : f \longmapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{f}}{1 + |\xi|^2}\right).$$

   En d'autres termes, $(\mathrm{Id} - \Delta)^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ M_\psi \circ \mathcal{F}$, où $M_\psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'opérateur de multiplication par la fonction $\psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$.

   Remarque. On peut extraire du cours le fait que $\mathcal{F}$, M_ψ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (voir prop 3.3.2 point v. et la preuve de la prop 3.3.9). C'est donc aussi le cas de $(\mathrm{Id} - \Delta)^{-1}$.

   Pour tout $q \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, l'opérateur $(\mathrm{Id} - \Delta)^q$ est une bijection comme composée de q bijections. De plus son inverse est :

$$(\mathrm{Id} - \Delta)^{-q} = \left((\mathrm{Id} - \Delta)^{-1}\right)^q = \left(\mathcal{F}^{-1} \circ M_\psi \circ \mathcal{F}\right)^q = \mathcal{F}^{-1} \circ (M_\psi)^q \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\psi^q} \circ \mathcal{F}.$$

   On obtient donc que pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$(\mathrm{Id} - \Delta)^{-q} : f \longmapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{f}}{(1 + |\xi|^2)^q}\right).$$

Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on définit la distribution $S_{pq} : \varphi \longmapsto \left\langle S\,, \left(1 + |x|^2\right)^{-p} (\mathrm{Id} - \Delta)^{-q} \varphi \right\rangle$.

5. Pour p et q assez grands, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $|\langle S_{pq}\,, \varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_1$.

   Comme $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il existe $B > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\langle S\,, \chi\rangle| \leqslant B N_k(\chi)$ pour tout $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On réutilise l'expression de $(\mathrm{Id} - \Delta)^{-q}$ donnée à la question 4. Pour tout p et $q \in \mathbb{N}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$|\langle S_{p,q}\,, \varphi\rangle| = \left|\left\langle S\,, \psi^p \mathcal{F}^{-1}(\psi^q \widehat{\varphi})\right\rangle\right| \leqslant B N_k(\psi^p \mathcal{F}^{-1}(\psi^q \widehat{\varphi})).$$

   D'après la question 2, pour tout $p \geqslant k$, il existe $A_p \geqslant 0$ tel que $N_k(\psi^p \eta) \leqslant A_p \max_{|\gamma| \leqslant k} \|\partial^\gamma \eta\|_\infty$ pour tout $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Comme $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ (déjà vu dans la question 3), on a $\psi^q \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et donc $\mathcal{F}^{-1}(\psi^q \widehat{\varphi}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a donc :

$$|\langle S_{p,q}\,, \varphi\rangle| \leqslant A_p B \max_{|\gamma| \leqslant k} \left\|\partial^\gamma \mathcal{F}^{-1}(\psi^q \widehat{\varphi})\right\|_\infty \tag{iv}$$

   Soit γ tel que $|\gamma| \leqslant k$. On a $\mathcal{F}(\partial^\gamma \mathcal{F}^{-1}(\psi^q \widehat{\varphi})) = (i\xi)^\gamma \psi^q \widehat{\varphi}$ donc $\partial^\gamma \mathcal{F}^{-1}(\psi^q \widehat{\varphi}) = \mathcal{F}^{-1}\left((i\xi)^\gamma \psi^q \widehat{\varphi}\right)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a alors :

$$\begin{aligned}\left|\partial^\gamma \mathcal{F}^{-1}(\psi^q \widehat{\varphi})(x)\right| = \left|\mathcal{F}^{-1}\left((i\xi)^\gamma \psi^q \widehat{\varphi}\right)(x)\right| &\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \left|(i\xi)^\gamma \psi(\xi)^q \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\langle x\,,\xi\rangle}\right| d\xi \\ &\leqslant \|\widehat{\varphi}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{|\gamma|} \psi(\xi)^q d\xi.\end{aligned}$$

   Si on suppose que $q \geqslant k + d$ alors on a :

$$|\xi|^{|\gamma|} \psi(\xi)^{q-d} \leqslant |\xi|^k \psi(\xi)^{q-d} \leqslant \left(1 + |\xi|^2\right)^k \psi(\xi)^{q-d} \leqslant \psi(\xi)^{q-d-k} \leqslant 1$$

Comme la fonction ψ^d est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. En utilisant les deux inégalités précédentes, on obtient :

$$\left\|\partial^\gamma \mathcal{F}^{-1}(\psi^q \widehat{\varphi})\right\|_\infty \leqslant \|\widehat{\varphi}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi)^d \,\mathrm{d}\xi \leqslant \|\varphi\|_1 \|\psi^d\|_1. \tag{v}$$

Ainsi, si on suppose que $p \geqslant k$ et $q \geqslant k+d$, les équations (iv) et (v) montrent que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $|\langle S_{p,q}\,, \varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_1$, où on a posé $C = A_p B \|\psi^d\|_1$.

6. Conclure.

Soient p et $q \in \mathbb{N}$ suffisament grands pour qu'il existe $C > 0$ comme dans la question 5. La forme linéaire $S_{p,q} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ muni de cette norme, $S_{p,q}$ admet une unique extension en une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R}^d)$, encore notée $S_{p,q}$.
Il existe alors une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $S_{p,q} : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f\varphi$, c'est-à-dire que $S_{p,q} = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ (et donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$). Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle S\,, \varphi\rangle &= \left\langle S\,, (1+|x|^2)^{-p}(\mathrm{Id}+\Delta)^{-q}(\mathrm{Id}+\Delta)^q\big((1+|x|^2)^p\varphi\big)\right\rangle \\
&= \langle S_{p,q}\,, (\mathrm{Id}+\Delta)^q\big((1+|x|^2)^p\varphi\big)\rangle \\
&= \langle f\,, (\mathrm{Id}+\Delta)^q(1+|x|^2)^p\varphi\rangle \\
&= \langle (1+|x|^2)^p(\mathrm{Id}+\Delta)^q f\,, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Finalement, on a $S = (1+|x|^2)^p(\mathrm{Id}+\Delta)^q f$ comme attendu.