Feuille 7 – Espaces de Sobolev en plusieurs variables

Exercice 1 ($H^1(B) \not\subseteq L^\infty(B)$ en dimension $d \geqslant 3$)**.** Soit $d \geqslant 3$, on note $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 1\}$. En dimension 1, l'inégalité de Sobolev montre l'inclusion $H^1(]-1,1[) \subset L^\infty(]-1,1[)$. Le but de l'exercice est de montrer qu'une telle inclusion est fausse en dimension $d \geqslant 3$, en exhibant une fonction dans $H^1(B) \setminus L^\infty(B)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $f_\alpha : x \mapsto |x|^\alpha$ de B dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\alpha > 1-d$, calculer les dérivées partielles $(\partial_i f_\alpha)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ de f_α dans $\mathcal{D}'(B)$.

   Indication. Commencer par calculer la restriction de $\partial_i f_\alpha$ à $B \setminus \{0\}$.

   Comme $\alpha > -d$ on a $f_\alpha \in L^1(B) \subset \mathcal{D}'(B)$ (voir exercice 4 de la feuille 6). Par ailleurs f_α est $\mathcal{C}^\infty$ sur $B \setminus \{0\}$. Sur ce domaine, ses dérivées partielles au sens des distributions coïncident donc avec celle au sens usuel. Pour tout $x \in B \setminus \{0\}$,

$$f_\alpha(x) = |x|^\alpha = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$\forall j \in \{1, \cdots, d\} \qquad \partial_j f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2x_j = \alpha x_j |x|^{\alpha-2}$$

   Afin d'éviter les confusions, notons $g_j : x \mapsto \alpha x_j |x|^{\alpha-2}$ de B dans $\mathbb{R}$. Pour tout $j \in \{1, \cdots, d\}$, on a $g_j \in L^1(B) \subset \mathcal{D}'(B)$ et $(\partial_j f_\alpha)_{|B\setminus\{0\}} = (g_j)_{|B\setminus\{0\}}$.
   Soit $j \in \{1, \cdots, d\}$, montrons que $\partial_j f_\alpha = g_j$ dans $\mathcal{D}'(B)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(B)$, on a :

$$\langle \partial_j f_\alpha , \varphi \rangle = -\langle f_\alpha , \partial_j \varphi \rangle = -\int_B f_\alpha \partial_j \varphi \, \mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1} f_\alpha \partial_j \varphi \, \mathrm{d}x$$

   car $f_\alpha \partial_j \varphi \in L^1(B)$.
   Soit $\varepsilon > 0$, on note $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \varepsilon\}$ et $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = \varepsilon\}$. On applique la formule de Gauss–Green sur l'ouvert $\mathcal{C}^1$ borné $B \setminus \overline{B_\varepsilon}$, qui est bordé par l'hypersurface $S_1 \cup S_\varepsilon$. Comme on a enlevé 0, on a $f_\alpha \in \mathcal{C}^1(\overline{B} \setminus B_\varepsilon)$. Comme de plus φ est à support compact dans B, le terme de bord porté par S_1 sera nul. Notons σ_ε la mesure superficielle de S_ε et $N(x) = \frac{x}{|x|}$ le champ de vecteurs unitaires radial issu de 0. On rappelle que N est normal aux sphères. On obtient

$$\begin{aligned} -\int_{\varepsilon<|x|<1} f_\alpha \partial_j \varphi \, \mathrm{d}x &= \int_{\varepsilon<|x|<1} g_j \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{|x|=1} f_\alpha \varphi N_j \, \mathrm{d}\sigma_1 + \int_{|x|=\varepsilon} f_\alpha \varphi N_j \, \mathrm{d}\sigma_\varepsilon \\ &= \int_{\varepsilon<|x|<1} g_j \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{|x|=\varepsilon} x_j |x|^{\alpha-1} \varphi(x) \, \mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

   On majore l'intégrale sur S_ε :

$$\left| \int_{|x|=\varepsilon} x_j |x|^{\alpha-1} \varphi(x) \, \mathrm{d}\sigma_\varepsilon(x) \right| \leqslant \varepsilon^\alpha \|\varphi\|_\infty \sigma_\varepsilon(S_\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha+d-1} \|\varphi\| \sigma_1(S_1) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \qquad \text{(i)}$$

   car $\alpha + d - 1 > 0$. Étant donné que $g_j \varphi \in L^1(B)$, on a finalement $\langle \partial_j f_\alpha , \varphi \rangle = \langle g_j , \varphi \rangle$. Donc $\partial_j f_\alpha = g_j$, comme annoncé.

2. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha \in H^1(B) \setminus L^\infty(B)$.
   Soit $\alpha > 1 - d$, d'après la question 1 on a $f_\alpha \in \mathcal{D}'(B)$ et pour tout $j \in \{1, \cdots, d\}$, $\partial_j f_\alpha$ est associée à la fonction intégrable $x \mapsto \alpha x_j |x|^{\alpha-2}$. On a d'une part

$$f_\alpha \in L^2(B) \iff \int_B |x|^{2\alpha} \,\mathrm{d}x < \infty \iff 2\alpha > -d \iff \alpha > -\frac{d}{2}$$

   et d'autre part

$$\begin{aligned}\forall j \in \{1, \cdots, d\}, \partial_j f_\alpha \in L^2(B) &\iff \sum_{j=1}^{d} \int_B \alpha^2 x_j^2 |x|^{2\alpha-4} \,\mathrm{d}x < +\infty \iff \int_B |x|^{2\alpha-2} \,\mathrm{d}x < \infty \\ &\iff 2\alpha - 2 > -d \iff \alpha > 1 - \frac{d}{2}.\end{aligned}$$

   Donc $f_\alpha \in H^1(B)$ si et seulement si $\alpha > 1 - \frac{d}{2}$.
   Par ailleurs, on a $f_\alpha \in L^\infty(B)$ si et seulement si $\alpha \geqslant 0$. Donc $f_\alpha \in H^1(B) \setminus L^\infty(B)$ si et seulement si $0 > \alpha > 1 - \frac{d}{2}$. Comme $d > 2$, on a $1 - \frac{d}{2} < 0$. On peut donc bien choisir un α satisfaisant ces conditions. En particulier $H^1(B) \not\subseteq L^\infty(B)$.

Exercice 2 (Pas de trace sur $L^2(B)$)**.** Soient $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < 1\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = 1\}$ et σ la mesure superficielle de S. On a vu en cours que l'application trace $\gamma : \mathcal{C}^\infty(\overline{B}) \to L^2(S, \sigma)$ définie par $\gamma : f \mapsto f_{|S}$ se prolonge uniquement en une application linéaire continue de $H^1(B)$ vers $L^2(S, \sigma)$.
Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire continue $\widetilde{\gamma} : L^2(B) \to L^2(S, \sigma)$ telle que $\widetilde{\gamma}_{|\mathcal{C}^\infty(\overline{B})} = \gamma$.
On va raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe $\widetilde{\gamma} : L^2(B) \to L^2(S, \sigma)$ linéaire continue et telle que $\widetilde{\gamma}_{|\mathcal{C}^\infty(\overline{B})} = \gamma$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$ on a $\widetilde{\gamma}(\varphi) = \gamma(\varphi) = \varphi_{|S} = 0$.
Comme $\mathcal{C}_0^\infty(B)$ est dense dans $\left(L^2(B), \|\cdot\|_2\right)$, on a $\widetilde{\gamma} = 0$ par continuité. C'est absurde, car par exemple $\widetilde{\gamma}(\mathbf{1}) = \gamma(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_S \neq 0$.

Exercice 3 (Pas de trace sur les ouverts irréguliers)**.** On va donner un exemple d'ouvert borné dont le bord est régulier par morceaux mais pour lequel le théorème de trace est mis en défaut. Soit $p > 2$, on considère l'ouvert borné $\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x_1 < 1 \text{ et } 0 < x_2 < x_1^p\right\}$. Il n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. Cependant, son bord est la réunion de trois courbes $\mathcal{C}^1$, notées Γ_1, Γ_2 et Γ_3 et paramétrées respectivement par :

$$\gamma_1 : t \mapsto (t, 0), \qquad \gamma_2 : t \mapsto (1, t), \qquad \text{et} \qquad \gamma_3 : t \mapsto (t, t^p)$$

de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit σ_i la mesure superficielle de Γ_i, on définit une mesure superficielle σ sur $\partial\Omega$ par $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Soit $\gamma : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega, \sigma)$ définie par $\gamma : f \mapsto f_{|\partial\Omega}$. Le but de l'exercice est de montrer que γ ne se prolonge pas en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ vers $L^2(\partial\Omega, \sigma)$.
Pour tout $\alpha \geqslant 1$ on définit $f_\alpha : (x_1, x_2) \mapsto e^{-\alpha x_1}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\alpha \geqslant 1$, $\|f_\alpha\|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant C\alpha^{1-p}$.
   Soit $\alpha \geqslant 1$, la fonction f_α est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont $\partial_1 f_\alpha = -\alpha f_\alpha$ et $\partial_2 f_\alpha = 0$. Par le théorème de Fubini–Tonelli et le changement de variable $t = \alpha x_1$, on trouve :

$$\begin{aligned}\|f_\alpha\|_2^2 = \int_\Omega e^{-2\alpha x_1} \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 &= \int_0^1 \int_0^{x_1^p} e^{-2\alpha x_1} \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1 = \int_0^1 x_1^p e^{-2\alpha x_1} \,\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_0^\alpha \frac{t^p e^{-2t}}{\alpha^{p+1}} \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\alpha^{p+1}} \int_0^\infty t^p e^{-2t} \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Donc

$$\|f_\alpha\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|f_\alpha\|_2^2 + \|\partial_1 f_\alpha\|_2^2 + \|\partial_2 f_\alpha\|_2^2 = (1+\alpha^2)\|f_\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant 2\alpha^{1-p}\int_0^\infty t^p e^{-2t}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui donne le résultat avec $C = 2\int_0^{+\infty} t^p e^{-2t}\,\mathrm{d}t \in \left]0,+\infty\right[$ dépendant de p mais pas de α.

2. Montrer qu'il existe $c>0$ telle que, pour tout $\alpha \geqslant 1$, $\|f_\alpha\|_{L^2(\partial\Omega,\sigma)}^2 \geqslant \frac{c}{\alpha}$.

   Soit $\alpha \geqslant 1$, par définition de σ, on a

$$\begin{aligned}\|f_\alpha\|_{L^2(\partial\Omega,\sigma)}^2 &= \int_{\partial\Omega} f_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}\sigma(x) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} f_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}\sigma_i(x) \geqslant \int_{\Gamma_1} f_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}\sigma_1(x)\\ &\geqslant \int_{]0,1[\times\{0\}} f_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}\sigma_1(x).\end{aligned}$$

   On peut calculer le dernier terme en utilisant l'exercice 2 de la feuille 6 avec le paramétrage γ_1. On obtient :

$$\int_{]0,1[\times\{0\}} f_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}\sigma_1(x) = \int_0^1 f_\alpha(\gamma_1(t))^2|\gamma_1'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-2\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-2\alpha}}{2\alpha} \geqslant \frac{1-e^{-2}}{2\alpha},$$

   ce qui donne le résultat souhaité avec $c = \frac{1-e^{-2}}{2}$.

3. Conclure.

   On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une application $\widetilde{\gamma} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega,\sigma)$ linéaire continue qui étend γ. Alors il existe $M>0$ tel que, pour tout $f \in H^1(\Omega)$,

$$\|f\|_{L^2(\partial\Omega,\sigma)}^2 \leqslant M\|f\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

   D'après les questions 1 et 2 on aurait alors pour tout $\alpha \geqslant 1$:

$$\frac{c}{\alpha} \leqslant \|f_\alpha\|_{L^2(\partial\Omega,\sigma)}^2 \leqslant M\|f_\alpha\|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant MC\alpha^{1-p},$$

   donc $\alpha^{2-p} \geqslant \frac{c}{MC} > 0$ pour tout $\alpha \geqslant 1$. C'est absurde car $p>2$ et donc $\alpha^{2-p} \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$.

Exercice 4 (Régularité de $|u|$ avec $u \in H^1(\Omega)$)**.** Soit $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ la fonction *signe* définie par : $\mathrm{sgn}(t) = -1$ si $t<0$, $\mathrm{sgn}(t) = 1$ si $t>0$ et $\mathrm{sgn}(0)=0$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert non vide. On se propose de montrer que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ à valeurs réelles on a $|u| \in H^1(\Omega)$ et $\partial_i|u| = \mathrm{sgn}(u)\partial_i u$ pour tout $i \in \{1,\cdots,d\}$.

1. Soit $B \subset \Omega$ une boule ouverte. Pour tout $\varepsilon>0$ on définit $\varphi_\varepsilon : t \mapsto \sqrt{t^2+\varepsilon}$. Montrer que pour tout $u \in H^1(B)$ à valeurs réelles on a $\varphi_\varepsilon \circ u \in H^1(B)$ et

$$\forall i \in \{1,\dots,d\}, \qquad \partial_i(\varphi_\varepsilon \circ u) = (\varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u.$$

   Indication. Approcher u par une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\overline{B})$.

   Pour tout $\varepsilon>0$, la fonction φ_ε est lisse sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $\varphi_\varepsilon' : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon}}$ est bornée par 1.

   Fixons $\varepsilon>0$ et utilisons l'indication. Comme B est un ouvert $\mathcal{C}^1$ borné, on a $\mathcal{C}^\infty(\overline{B})$ dense dans $H^1(B)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\overline{B})$ qui converge vers u dans $\left(H^1(B), \|\cdot\|_{H^1}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $\varphi_\varepsilon \circ u_n$ est lisse sur un voisinage de B et

$$\forall i \in \{1,\cdots,d\}, \qquad \partial_i(\varphi_\varepsilon \circ u_n) = \left(\varphi_\varepsilon' \circ u_n\right)\partial_i u_n. \tag{ii}$$

Montrons d'abord que $\varphi_\varepsilon \circ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_\varepsilon \circ u$ dans $L^2(B)$. Comme $u \in L^2(B)$, la fonction $\varphi_\varepsilon \circ u$ est bien définie presque partout. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème des accroissement finis pour φ_ε entre $u(x)$ et $u_n(x)$,

$$|\varphi_\varepsilon \circ u_n - \varphi_\varepsilon \circ u| \leqslant \|\varphi_\varepsilon'\|_\infty |u_n - u| \leqslant |u_n - u|$$

presque partout sur B. Donc $\|\varphi_\varepsilon \circ u_n - \varphi_\varepsilon \circ u\|_2 \leqslant \|u_n - u\|_2$. On a donc $\varphi_\varepsilon \circ u_n - \varphi_\varepsilon \circ u \in L^2(B)$ et donc $\varphi_\varepsilon \circ u \in L^2(B)$ en particulier. De plus,

$$\|\varphi_\varepsilon \circ u_n - \varphi_\varepsilon \circ u\|_2 \leqslant \|u_n - u\|_2 \leqslant \|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{iii}$$

On vient de voir que $\varphi_\varepsilon \circ u \in L^2(B)$. Comme par ailleurs $\varphi_\varepsilon' \circ u \in L^\infty(B)$ et $\partial_i u \in L^2(B)$ on a $(\varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u \in L^2(B)$. Il suffit donc de prouver la formule attendue pour les dérivées partielles pour obtenir $\varphi_\varepsilon \circ u \in H^1(B)$. On va prouver cette formule en passant à la limite sur n dans (ii). D'après (iii), on a $\varphi_\varepsilon \circ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_\varepsilon \circ u$ dans $L^2(B)$ et donc dans $\mathcal{D}'(B)$. Par continuité de la dérivation on a donc $\partial_i(\varphi_\varepsilon \circ u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} \partial_i(\varphi_\varepsilon \circ u)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$.

Soit $i \in \{1, \cdots, d\}$, on a

$$\begin{aligned}
\big\|(\varphi_\varepsilon' \circ u_n)\partial_i u_n - (\varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u\big\|_2 &\leqslant \big\|(\varphi_\varepsilon' \circ u_n)(\partial_i u_n - \partial_i u)\big\|_2 + \big\|(\varphi_\varepsilon' \circ u_n - \varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u\big\|_2 \\
&\leqslant \|\varphi_\varepsilon'\|_\infty \|\partial_i u_n - \partial_i u\|_2 + \big\|(\varphi_\varepsilon' \circ u_n - \varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u\big\|_2 \\
&\leqslant \|\partial_i u_n - \partial_i u\|_{H^1} + \big\|(\varphi_\varepsilon' \circ u_n - \varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u\big\|_2.
\end{aligned}$$

Le premier terme dans le membre de droite tend vers 0 par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En général, le second terme de ne tend pas vers 0. Cependant, quitte à extraire, on peut supposer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ presque partout sur B. On a alors la convergence simple suivante presque partout sur B :

$$\varphi_\varepsilon'(u_n(x))\partial_i u(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_\varepsilon'(u(x))\partial_i u(x).$$

Comme φ_ε' est bornée par 1, on peut dominer par la fonction $\partial_i u \in L^2(B)$. D'après le théorème de convergence dominée L^2 (voir exercice 1 de la feuille 4), on a donc

$$(\varphi_\varepsilon' \circ u_n)\partial_i u \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} (\varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u.$$

Finalement

$$\big\|(\varphi_\varepsilon' \circ u_n)\partial_i u_n - (\varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u\big\|_2 \leqslant \|\partial_i u_n - \partial_i u\|_{H^1} + \big\|(\varphi_\varepsilon' \circ u_n - \varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u\big\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc $(\varphi_\varepsilon' \circ u_n)\partial_i u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (\varphi_\varepsilon' \circ u)\partial_i u$ dans $L^2(B)$ et donc dans $\mathcal{D}'(B)$. Ainsi, on peut bien passer à la limite dans (ii). Cela prouve que $\varphi_\varepsilon \circ u \in H^1(B)$ ainsi que les formules voulues pour ses dérivées partielles.

2. Soit $u \in H^1(B)$ à valeurs réelles, montrer que $|u| \in H^1(B)$ et

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \qquad \partial_i |u| = \operatorname{sgn}(u)\partial_i u.$$

Les familles $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\varphi'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, respectivement vers $|\cdot|$ et vers sgn. On a donc les convergences simples suivantes presque partout sur B :

$$\varphi_\varepsilon \circ u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |u|$$
$$\forall i \in \{1, \cdots, d\}, \qquad (\varphi'_\varepsilon \circ u)\partial_i u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \operatorname{sgn}(u)\partial_i u.$$

D'une part, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ on a $|\varphi_\varepsilon \circ u| \leqslant \sqrt{1+|u|^2} \in L^2(B)$. Par le théorème de convergence dominée L^2 on a donc $\varphi_\varepsilon \circ u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |u|$ dans $L^2(B)$ et donc dans $\mathcal{D}'(B)$. Donc, pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, $\partial_i(\varphi_\varepsilon \circ u) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{D}'} \partial_i|u|$.

D'autre part, on peut dominer $(\varphi'_\varepsilon \circ u)\partial_i u$ par $|\partial_i u| \in L^2(B)$. Donc, pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, $(\varphi'_\varepsilon \circ u)\partial_i u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \operatorname{sgn}(u)\partial_i u$ dans $L^2(B)$ et donc dans $\mathcal{D}'(B)$.

On a u et donc $|u| \in L^2(B)$. En passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans les expressions obtenues à la question 1, on obtient $\partial_i|u| = \operatorname{sgn}(u)\partial_i u$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$. Comme $\operatorname{sgn}(u)$ est bornée et $\partial_i u \in L^2(B)$ on a donc $\partial_i|u| \in L^2(B)$ et donc $|u| \in H^1(B)$.

3. Conclure par recollement que ce résultat est aussi vrai sur Ω.

   Soit $u \in H^1(\Omega)$ à valeurs réelles. On a $u \in L^2(\Omega)$ et donc $|u| \in L^2(\Omega)$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, les distributions $\partial_i|u|$ et $\operatorname{sgn}(u)\partial_i u$ sont égales sur toute boule ouverte dans Ω. Par l'unicité dans le principe de recollement, on a donc $\partial_i|u| = \operatorname{sgn}(u)\partial_i u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme précédemment, $\partial_i u \in L^2(B)$ et $\operatorname{sgn}(u)$ est bornée. Donc $\partial_i|u| \in L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$. On a donc $|u| \in H^1(\Omega)$, avec les dérivées partielles voulues.