Feuille 5 – Distributions en plusieurs variables

Exercice 1 (Intégrabilité des puissances de $|x|$)**.** Soit $B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < 1\right\}$ la boule unité de $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\int_B |x|^\alpha \,\mathrm{d}x < +\infty$ si et seulement si $\alpha > -2$.
2. La fonction $x = (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1}{|x|^3}$ est-elle dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 2 (Le retour de la valeur principale)**.** Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $B_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < \varepsilon\right\}$. Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$T : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon} \frac{x_1}{|x|^3} \varphi(x) \,\mathrm{d}x.$$

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, montrer que $\psi : x = (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_1}{|x|^3}\big(\varphi(x_1, x_2) - \varphi(-x_1, x_2)\big)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.
2. En déduire que T définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$. Elle est appelée *valeur principale* de $\frac{x_1}{|x|^3}$.

Exercice 3 (Calculs de dérivées)**.** On définit des formes linéaires T et T^+ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par :

$$T : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,t) \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad T^+ : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t,t) \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T et T^+ définissent des distributions sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\partial_1 T + \partial_2 T$ et $\partial_1 T^+ + \partial_2 T^+$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
3. Notons $D = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 \geqslant |x_1|\right\}$ et $\mathbf{1}_D$ sa fonction indicatrice, calculer $\partial_1 \mathbf{1}_D - \partial_2 \mathbf{1}_D$.
4. Calculer $\partial_1^2 \mathbf{1}_D - \partial_2^2 \mathbf{1}_D$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 4 (Mesure uniforme sur la sphère)**.** Soit γ la restriction à $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ de la mesure gaussienne standard, i.e. γ admet la densité $x \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2}\Big)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $\mu = \pi_* \gamma$ où $\pi : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}^d$ est la projection radiale.

1. Montrer que μ définit une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^d$.
2. Déterminer le support de μ.
3. Existe-t-il $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mu = T_f$?

L'exercice suivant est adapté de l'examen final de 2021.

Exercice 5 (Convolution de distributions)**.** Le but de l'exercice est de définir et d'étudier la convolée de deux distributions dont l'une est à support compact. On utilisera les notations suivantes.

- On note $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace des distributions à support compact.
- Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on note $\check{\varphi} : z \mapsto \varphi(-z)$ et $\tau_x \varphi : z \mapsto \varphi(z - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
- Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on note $\check{T} : \varphi \mapsto \langle T\,, \check{\varphi}\rangle$ et $\tau_x T : \varphi \mapsto \langle T\,, \tau_{-x}\varphi\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

1. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, montrer que $\operatorname{supp}(\check{\varphi}) = -\operatorname{supp}(\varphi)$ et $\operatorname{supp}(\tau_x\varphi) = x + \operatorname{supp}(\varphi)$. En déduire que $\operatorname{supp}(\check{T}) = -\operatorname{supp}(T)$ et $\operatorname{supp}(\tau_x T) = x + \operatorname{supp}(T)$ pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, montrer qu'il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,
$$|\langle E\,,\varphi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha \varphi\|.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on définit la *convolée* $\varphi * T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ par la formule :
$$\varphi * T : x \longmapsto \left\langle \tau_x \check{T}\,, \varphi \right\rangle = \langle T\,, \varphi(x-\cdot)\rangle. \tag{1}$$

3. Montrer que $\varphi * T \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a :
$$\partial^\alpha(\varphi * T) = (\partial^\alpha \varphi) * T = \varphi * (\partial^\alpha T).$$
4. Si on suppose $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\varphi * T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\operatorname{supp}(\varphi * T) \subset \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(T)$.

Soient $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. D'après les questions précédentes, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a $\varphi * \check{E} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On peut donc définir la *convolée* $E * T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ par la formule :
$$E * T : \varphi \longmapsto \left\langle T\,, \varphi * \check{E} \right\rangle. \tag{2}$$

5. Montrer que $E * T$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^d$.
6. Vérifier que $(E, T) \mapsto E * T$ est bilinéaire de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
7. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, montrer que $\partial^\alpha(E * T) = (\partial^\alpha E) * T = E * (\partial^\alpha T)$.
8. Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, de sorte que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$. On suppose que f est nulle presque partout hors d'un compact $K \subset \mathbb{R}^d$. Montrer que $T_f * T_g = T_{f*g}$.
9. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a :
$$\langle T_\rho * T\,, \varphi\rangle = \langle T\,, \varphi * \check{\rho}\rangle = \langle T_{\rho * T}\,, \varphi\rangle.$$
10. Calculer $\delta_0 * T$ où $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. De même, calculer $E * \delta_0$ où $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $(a_\alpha)_{|\alpha|\leqslant m}$ une famille de nombres complexes indexée par les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^d$ de longueur au plus m, on considère l'*opérateur différentiel* $P = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha$. On appelle *solution fondamentale* de P toute distribution $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $P(T_0) = \delta_0$.

11. Soient $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $T_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une solution fondamentale de P, déterminer une solution de l'équation $P(T) = E$ d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 6 (Solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur)**.** Soit $H = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside, on considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$F : (t, x) \longmapsto \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

1. Vérifier que $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que $\partial_t F - \partial_x^2 F = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, prouver que
$$\left\langle \partial_t F - \partial_x^2 F\,, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} F(\varepsilon, x)\varphi(\varepsilon, x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$
4. En déduire une expression simple de $\partial_t F - \partial_x^2 F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.