Université Paris-Sud 2001/2002
S3 SM C

Partiel de mathématiques
20 décembre 2001, durée 2h

Les théorèmes utilisés doivent être énoncés avec précision. Il en sera tenu compte. Le barème est indicatif

3/20 **Exercice 1:** Démontrer que l'intégrale curviligne

$$\int_{\mathcal{C}} 2x \sin y \; dx + (x^2 \cos y - 3y^2)dy$$

est indépendante du chemin $\mathcal{C}$ reliant $(1,0)$ et $(5,1)$ et la calculer.

3/20 **Exercice 2:** Soit la surface $\mathcal{S}$ d'équation $y = 4x + z^2$.

1) Calculer un vecteur normal et donner l'équation du plan tangent en un point M_0 de $\mathcal{S}$.

2) Calculer l'aire de la surface $\mathcal{S}$ comprise entre les plans $x = 0$, $x = 2$, $z = 0$, $z = 1$ en la ramenant à une intégrale du type $\int_a^b \sqrt{1+u^2}du$.

+2 pts 3) Calculer cette intégrale (on pourra utiliser la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ et calculer sa dérivée).

4/20 **Exercice 3:** Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie par $C(t) = (t^2, t)$.

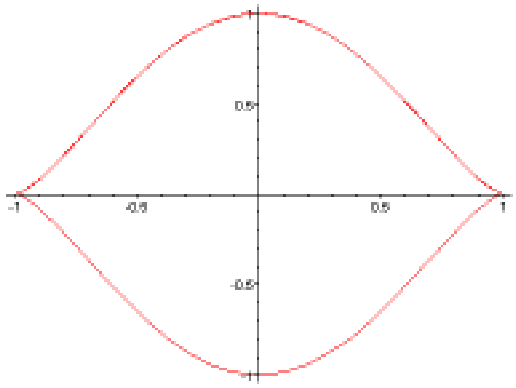
1) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

2) On prend maintenant $t > 0$. Soit f une fonction C^1 de $\mathbb{R}^+*$ dans $\mathbb{R}$. Soit Γ la courbe paramétrée donnée par $C_1(t) = C(t) + f(t)C\,'(t)$. On note M le point de $\mathcal{C}$ de paramètre t et P le point de Γ de paramètre t : on a donc $\overrightarrow{OP} = C_1(t)$, $\overrightarrow{OM} = C(t)$. Montrer que pour que la tangente en P à Γ soit parallèle à la droite OM, il faut et il suffit que f satisfasse une équation différentielle que l'on déterminera.

3) Résoudre l'équation différentielle trouvée.

6/20 **Exercice 4:** On note $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ l'application réciproque de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

1) Trouver un paramétrage de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + \sqrt[3]{y}^2 = 1$ en utilisant les fonctions cosinus et sinus.



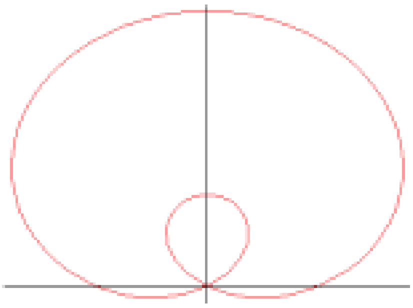
2) Calculer l'aire du domaine défini par $x^2 + \sqrt[3]{y}^2 \leq 1$ en se ramenant à une intégrale curviligne (énoncer le théorème utilisé).

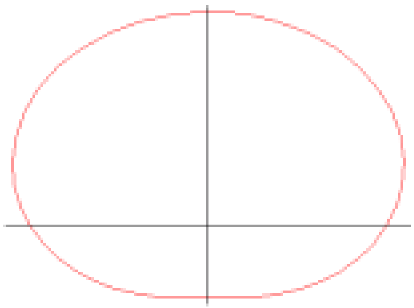
3) Soit F le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x, y) = (\ln(2 + \sin y), e^{\cos x}) \ .$$

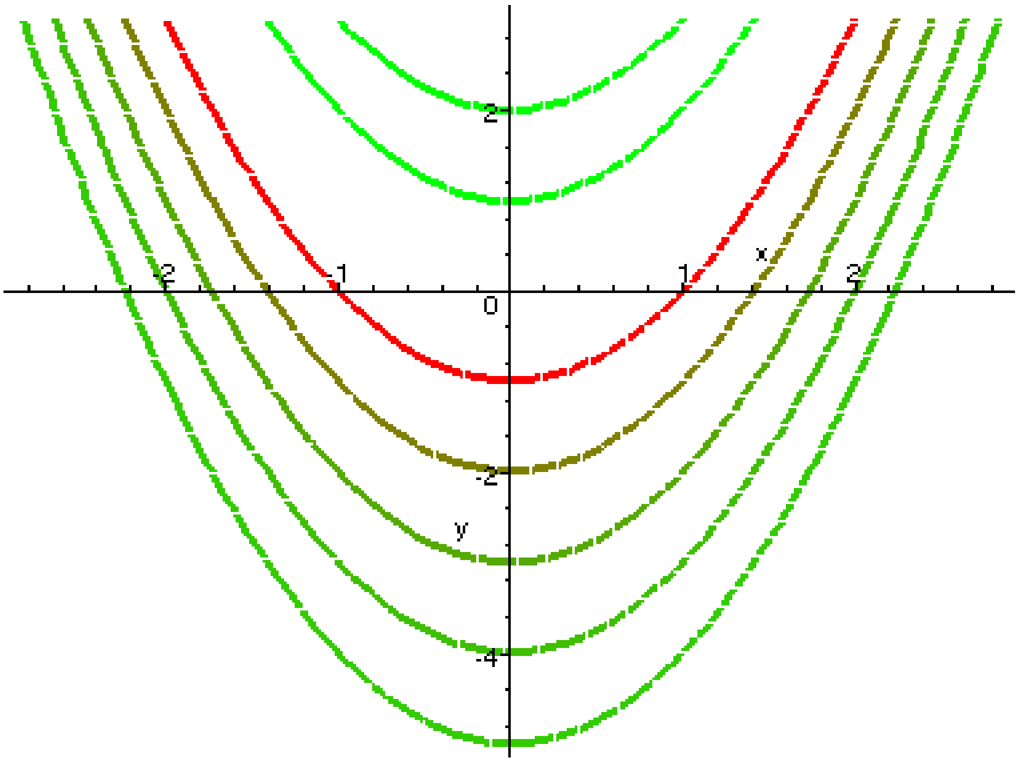
Calculer le flux de F à travers $\mathcal{C}$ en le ramenant au calcul d'une intégrale double (énoncer le théorème utilisé)

2/20 **Exercice 5:** Les deux courbes suivantes ont une équation de la forme $\rho = 1 + c \sin\theta$ avec $c > 0$. Que peut-on dire de la position de c par rapport à 1 dans chacun des cas ? Déterminer les nombres c pour lesquels une telle courbe a deux boucles. Dans quel sens sont parcourues les courbes ?





2/20 **Exercice 6:** Quelques courbes de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont tracées sur la page suivante. Sachant de plus que $f(0, y) = -y$, tracer aux points $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$ un vecteur de même direction et de même sens que le gradient de f (justifier et joindre la feuille à la copie).


x
y
-2
-1
0
1
2
2
-2
-4