Université Paris-Sud 2000/2001

S3 SM C

Test de mathématiques

3 novembre 2000, durée 1 heure 30

Les documents autres que le formulaire de MO et les calculettes sont interdits.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1: Soit a un réel positif, calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sqrt[5]{n^5 + n^4 + 1} - \sqrt[2]{n^2 + an + 1}$.

Exercice 2: Soit f la fonction de $I = [-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = (x^2 - \cos x)/4$.

1) Montrer que $f(I) \subset I$ et que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution ℓ dans l'intervalle I (on ne demande pas de calculer ℓ).

2) Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

3) On considère la suite (u_n) définie par la donnée du réel u_0, avec $|u_0| \leq 1$, et la relation de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 - \cos u_n}{4} \ .$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à I et que

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{3}{4} |u_n - \ell| \ .$$

4) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

5) En utilisant les (ou certaines des) valeurs numériques suivantes, calculer ℓ à 10^{-2} près en justifiant

$$|f(-0,2) + 0,2350| < 10^{-4} \qquad |f(-0,3) + 0,2163| < 10^{-4}$$
$$|f(f(-0,2)) + 0,2293| < 10^{-4} \qquad |f(f(-0,3)) + 0,2324| < 10^{-4}$$
$$|f'(-0,2) + 0,1496| < 10^{-4} \qquad |f'(-0,3) + 0,2238| < 10^{-4}$$

Exercice 3: Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Trouver les solutions de l'équation $f(x) = x$.

2) Etudier la convergence de la suite récurrente définie par $u_{n+1} = u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n$, $0 \leq u_0 \leq 1$.

Exercice 4: Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{x^2+xy}$.

1) Calculer le gradient de f. Calculer la dérivée en $t = 0$ de la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(1+3t, 2+5t)$.

2) Soit $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ une application C^1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. On pose $F = f \circ \Phi$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ en fonction des dérivées partielles de f, Φ_1 et Φ_2. Si Φ est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x,y,z) = (xz, x^2+y^2)$, calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.