Université Paris-Sud 2000/2001
S3 SM C

Examen de mathématiques
17 janvier 2001, durée 3 heures

Les documents autres que le formulaire de MO sont interdits

Un barème approximatif est indiqué dans la marge.

Exercice 1: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4/20

1) Montrer que A est diagonalisable et calculer une base de vecteurs propres de A.

2) Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

5/20 **Exercice 2:** On considère le système différentiel

(S) $$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = m^2 x + (1-m)y \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

1) Calculer les valeurs propres de la matrice A du système différentiel (S). Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?

2) On suppose $m \neq 0$. Résoudre le système différentiel (S). Existe-t-il un réel m pour lequel toutes les solutions de (S) sont bornées pour $t \geq 0$? pour lequel toutes les solutions non nulles de (S) sont non bornées pour $t \geq 0$? Si oui, préciser pour quels réels m.

3) On prend $m = 2$. Déterminer la solution du système

(S) $$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x - y - 3e^{-t} \end{cases}$$

telle que $x(t)$ et $y(t)$ soient bornés pour $t \geq 0$ et que $x(0) = 1$.

5/20 **Exercice 3:**

1) Soit $I =]0, +\infty[$. Déterminer les solutions sur I de l'équation différentielle

(E) $$t\varphi'(t) + 2\varphi(t) = 0 \ .$$

2) Soit f_2, f_2, f_3 les fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x,y,z) = 2xz$, $f_2(x,y,z) = -2yz$, $f_3(x,y,z) = -x^2 + y^2$. Soit φ une fonction de $z \in I$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{\partial(f_1\varphi)}{\partial z} = \frac{\partial(f_3\varphi)}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2 \times I$ si et seulement si φ vérifie l'équation différentielle (E). Vérifier qu'on a alors $\frac{\partial(f_2\varphi)}{\partial z} = \frac{\partial(f_3\varphi)}{\partial y}$.

3) Pour $\varphi(z) = 1/z^2$, montrer qu'il existe une fonction g de $\mathbb{R}^2 \times I$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathrm{grad}(g)(x, y, z) = (\varphi(z)f_1(x, y, z), \varphi(z)f_2(x, y, z), \varphi(z)f_3(x, y, z))$$

et la calculer.

3/20 **Exercice 4:** Soit S la surface

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z^3 - 3xy = 0,\ z \neq 0\}$$

Calculer un vecteur normal à S et le plan tangent en un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S (on a donc $z_0^3 - 3x_0y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$). Soit D la droite d'équations $x = 2$, $y = z + 1$. Donner un vecteur directeur de D. Déterminer les points M_0 de S tels que le plan tangent à S en M_0 contienne la droite D.

3/20 **Exercice 5:** (Il sera tenu compte du soin avec lequel les théorèmes utilisés sont énoncés). Soit a, b, c des réels et $F_{a,b,c}$ le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ défini par $F_{a,b,c}(x, y, z) = (x+2y^2+xz, axy+byz, c(x^2+z)+y^2)$.

1) Calculer le rotationnel de $F_{a,b,c}$. Pour quelles valeurs de a, b, c est-il identiquement nul sur $\mathbb{R}^3$? Pour ces valeurs, que peut-on dire de la circulation de $F_{a,b,c}$ le long d'une courbe fermée orientée sans points doubles de $\mathbb{R}^3$?

2) Calculer la divergence de de $F_{a,b,c}$. Pour quelles valeurs de a, b, c est-elle identiquement nul sur $\mathbb{R}^3$? Pour ces valeurs, que peut-on dire du flux de de $F_{a,b,c}$ à travers une surface fermée orientée de $\mathbb{R}^3$?

+2 **Question bonus :** Soit F le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ donné par

$$F(x, y) = (y, y^2 + x)\ .$$

Calculer la circulation de F le long de la courbe paramétrée

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto ((2^t - 1)^{13}, \sin(\frac{\pi}{2}t^{12}))$$

d'extrémités $A = \gamma(0)$ et $B = \gamma(1)$.