Université Paris-Sud 2000/2001
S3 SM C

Un corrigé du partiel de mathématiques
20 décembre 2000, durée 2 heure 30

Exercice 1: La courbe C est la réunion des deux arcs de cercle paramétrés de la manière suivante

$$\begin{aligned} C_1 &: t \in [-\pi, \pi/2] \mapsto (1+\cos t, \sin t) \\ C_2 &: t \in [0, 3\pi/2] \mapsto (\cos t, 1+\sin t) \end{aligned}$$

Remarquons de plus que $ydx + xdy$ est une différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$ et donc que son intégrale le long d'une courbe fermée est nulle. Donc

$$\begin{aligned} \int_C ydx + 2xdy = \int_C xdy &= \int_{C_1} xdy + \int_{C_2} xdy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi/2} (1+\cos t)\cos t dt + \int_0^{3\pi/2} \cos^2 t dt \end{aligned}$$

Or $\cos^2 t = (\cos(2t)+1)/2$ et une primitive de $\cos^2 t$ est $t/2 + \sin(2t)/4$. Donc

$$\begin{aligned} \int_C ydx + 2xdy &= ([\sin t + t/2 + \sin(2t)/4]_{-\pi}^{\pi/2} + [t/2 + \sin(2t)/4]_0^{3\pi/2} \\ &= 1 + \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2: La longueur d'une courbe $t \in I \to (x(t), y(t))$ où $I = [a,b]$ est un intervalle et x et y des fonctions C^1 est

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Ici, la longueur L vaut donc

$$L = \int_1^a \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^a \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} dt$$

Faisons le changement de variables $u = \sqrt{1+t^2}$ d'où $u^2 = 1+t^2$ et $tdt = udu$:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \frac{u^2}{u^2-1} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} 1 + \frac{1}{u^2-1} du \\ &= \sqrt{1+a^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \sqrt{1+a^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} [\ln \frac{u-1}{u+1}]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \\ &= \sqrt{1+a^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{\sqrt{1+a^2}+1} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \\ &= \sqrt{1+a^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{\sqrt{1+a^2}+1} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \end{aligned}$$

Exercice 3: Écrivons $F = (F_1, F_2)$. On vérifie que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé, F est un champ de gradients. Si $F = \mathrm{grad}(f)$, la circulation de

F le long d'une courbe d'extrémité A et B est égale à $f(B) - f(A)$. Cherchons f. Elle doit vérifier $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y)$ donc $f(x,y) = x^3y^2 + 3y^4x + g(y)$ où g est une fonction de y. La seconde équation à vérifier est $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y)$, c'est-à-dire en reportant la valeur de f déjà trouvée

$$2x^3y + 12y^3x + g'(y) = 2x^3y + 12xy^3 + \sin y$$

d'où, $g'(y) = \sin y$, $g(y) = -\cos y + C$, avec C une constante. Donc la fonction

$$f(x,y) = x^3y^2 + 3y^4x - \cos y$$

vérifie $\mathrm{grad}(f) = F$ et la circulation de F le long de la courbe C est égale à

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,1) - f(0,0) = 4 - \cos 1 - 1 = 3 - \cos 1$$

Exercice 4: Soit N le vecteur normal de la surface paramétrée $S : (u,v) \mapsto f(u,v)$

$$\begin{aligned} N(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) &= \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui est de norme $\sqrt{1+u^2}$. L'aire de S est donnée par l'intégrale double

$$\begin{aligned} &\int_{(u,v)\in[0,1]\times[0,\pi]} ||N(u,v)||dudv \\ &\qquad = \pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}du \end{aligned}$$

La courbe bordant S est formée des morceaux suivants correspondant aux côtés du rectangle $[0,1] \times [0,\pi]$

$$\begin{array}{ll} C_1 \ : u \in [0,1] \mapsto (u,0,0) & C_2 \ : u \in [0,1] \mapsto (-u,0,\pi) \\ C_3 \ : v \in [0,\pi] \mapsto (0,0,v) & C_4 \ : v \in [0,\pi] \mapsto (\cos v, \sin v, v) \end{array}$$

La longueur de la courbe est $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ avec

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^1 du = 1 \quad L_2 = \int_0^1 du = 1 \quad L_3 = \int_0^\pi dv = \pi \\ L_4 &= \int_0^\pi ((\sin v)^2 + (\cos v)^2 + 1)^{1/2} dv = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Donc $L = 2 + (1+\sqrt{2})\pi$.

Exercice 5: Comme $\mathbb{R}^2$ est étoilé, F est un champ de gradients si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q_c}{\partial x}$, c'est-à-dire si et seulement si $-4 = c$. La fonction f doit vérifier $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y + 3$, c'est-à-dire que $f(x,y) = x^2 - 4yx + 3x + g(y)$ et g doit alors vérifier

$$-4x + g'(y) = -4x + 8y - 4$$

c'est-à-dire $g'(y) = 8y - 4$. La fonction $f(x,y) = x^2 - 4yx + 3x - 4y^2 - 4y$ vérifie $\mathrm{grad}(f) = F_{-4}$. La circulation de F_{-4} le long d'une courbe fermée est nulle. Or $F_c = F_{-4} + (0, (c+4)x)$. Donc

$$\int_\gamma F_c \cdot dM = (c+4)\int_\gamma x dy = (c+4)\int_D dxdy = \pi(c+4)$$

La courbe est orientée de manière à ce que le domaine soit sur la gauche lorsqu'on parcourt la courbe, ou encore la base formée du vecteur normal sortant et du vecteur tangent est directe.

Exercice 6: On a $\operatorname{rot} F(x,y,z) = (z, xy, -xz)$. Par la formule de Green-Ostrogradski, et en notant T le bord du triangle orienté convenablement, le flux Φ de $\operatorname{rot} F$ à travers S est égal à $\int_T F \cdot dM = \int_T xydy - xzdz$. On décompose T en trois segments :

$$\begin{aligned} T_1 &: t \in [0,1] \mapsto t(0,0,-2) + (1-t)(0,1,1) = (0, 1-t, 1-3t) \\ T_2 &: t \in [0,1] \mapsto t(0,1,1) + (1-t)(2,0,-1) = (2(1-t), t, -1+2t) \\ T_3 &: t \in [0,1] \mapsto t(2,0,-1) + (1-t)(0,0,-2) = (2t, 0, -2+t) \end{aligned}$$

On vérifie que les segments sont parcourus dans le bon sens :

$$(0,0,-2) \to (2,0,-1) \to (0,1,1) \to (0,0,-2)$$

(la projection dans le plan $x0y$ est parcourue dans le sens trigonométrique). D'où

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_T x(ydy - zdz) \\ &= \int_0^1 0dt + \int_0^1 2(1-t)(t - 2(-1+2t))dt + \int_0^1 2t(2-t)dt \\ &= 2\int_0^1 \left((t-1)(-2+3t) + 2t - t^2\right) dt \\ &= 2\int_0^1 (2t^2 - 3t + 2)dt = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Exercice 7:

$$\det \begin{pmatrix} 10-\lambda & 9 & 9 \\ -9 & -8-\lambda & -9 \\ -9 & -9 & -8-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 9 & 9 \\ -1+\lambda & -8-\lambda & -9 \\ 0 & -9 & -8-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -1 & -8-\lambda & -9 \\ 0 & -9 & -8-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -9 & -8-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -8-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2(\lambda+8)$$

Les valeurs propres sont 1 (valeur propre double) et -8. Calculons l'espace propre E_1 associé à 1 : $(x,y,z) \in E_1$ si et seulement si

$$x + y + z = 0$$

c'est-à-dire $(x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$. Le sous-espace vectoriel est de dimension 2, si $v_1 = (1,0,-1)$ et $v_2 = (0,1,-1)$, (v_1, v_2) en est une base. De même (x,y,z) appartient à E_{-8} si et seulement si

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(x,y,z) = x(1,-1,-1)$. Une base de E_{-8} est $v_3 = (1,-1,-1)$ et E_{-8} est de dimension 1. Ainsi, f est diagonalisable car (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f. Dans cette base, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. Si $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale réelle tels que $\Delta^3 = D$, on a nécessairement $\alpha^3 = 1$, $\beta^3 = 1$, $\gamma^3 = -8$. Les seules solutions réelles sont $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$. Donc $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_i) : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $A = PDP^{-1}$. La matrice $B = P\Delta P^{-1}$ vérifie $B^3 = P\Delta^3 P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Calculons B numériquement. L'inverse de P s'obtient en inversant le système

$$\begin{cases} x + z = X \\ y - z = Y \\ -x - y - z = Z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = X - z \\ y = Y + z \\ -z = Z + X + Y \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2X + Y + Z \\ y = -X - Z \\ z = -Z - X - Y \end{cases}$$

D'où, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$