Université Paris-Sud 2000/2001
S3 SM C

Corrigé du test de mathématiques
3 novembre 2000, durée 1 heure 30

Exercice 1: On a

$$\begin{aligned}
u_n &= n(\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^5}} - \sqrt[2]{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}) \\
&= n(\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[2]{1+\frac{a}{n}} + \frac{1}{n}\epsilon(n)) \\
&= n(1+\frac{1}{5n} - (1+\frac{a}{2n}) + \frac{1}{n}\epsilon(n)) \\
&= \frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \epsilon(n)
\end{aligned}$$

avec ϵ des suites tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$. La limite de la suite $(u_n)_n$ est donc $\frac{1}{5} - \frac{a}{2}$.

Exercice 2:

1) La dérivée $f'(x) = (2x + \sin x)/4$ est une fonction impaire. Elle est positive sur $[0, 1]$. On a $f(1) = f(-1) = (1 - \cos 1)/4 < 1$ et $f(0) = -1/4$. L'image de f est contenue dans $[-1/4, (1 - \cos 1)/4] \subset I$. Posons $g(x) = f(x) - x$. Sa dérivée est $g'(x) = \frac{x}{2} - 1 + \frac{\sin x}{4}$. Sur I, $g'(x) \leq 1/2 - 1 + \frac{\sin 1}{4} \leq -1/4 < 0$. Donc g est décroissante sur I. Comme $g(-1) = 5/4 - \cos(1)/4 > 1/4 > 0$ et $g(1) = -3/4 - \cos(1)/4 < 0$, g est une bijection de I sur $g(I)$ et prend une et une seule fois la valeur 0 par le théorème des valeurs intermédiaires. D'où l'existence d'un unique $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$. Comme $g(0) < 0$, ℓ est négatif.

2)

$$|f'(x)| \leq \frac{2 + \sin 1}{4} \leq \frac{3}{4}$$

3) Comme $f(I) \subset I$, comme $u_0 \in I$, il en est de même de $u_n = f^n(u_0)$. En utilisant le théorème des accroissements finis, pour x et $y \in I$, il existe $c \in I$ tel que $f(x) - f(y) = (x - y)f'(c)$ et en utilisant la majoration de f', on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$$

On l'applique avec $x = u_n$ et $y = \ell$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$:

$$|f(u_n) - \ell| \leq \frac{3}{4}|u_n - \ell|$$

4) Montrons que $|u_n - \ell| \leq (\frac{3}{4})^n|u_0 - \ell|$. Pour $n = 0$, cela est vrai. Supposons que cela le soit pour n. Alors

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{3}{4}|u_n - \ell| \leq (\frac{3}{4})^{n+1}|u_0 - \ell| \ .$$

En appliquant le principe de récurrence, l'inégalité est démontrée. Comme la suite $(3/4)^n$ converge vers 0, la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

5) La fonction f' est décroissante sur $[-0,3,-0,2]$ et négative. Donc $|f'(x)| < |f'(-0,3)| < 0,23$ sur $J = [-0,3,-0,2]$. De plus ℓ appartient à J car $f(-0,2) + 0,2 < 0$ et $f(-0,3) + 0,3 > 0$. Par le même raisonnement que précédemment, si x et $y \in J$, on a $|f(x) - f(y)| \leq 0,23|x-y|$. En particulier, $f(J) \subset J$ et

$$|f(f(-0,2)) - \ell| \leq 0,23^2|-0,2-\ell| < 0,23^2 \times 0,1 \leq 0,005$$

Donc $|\ell - (-0,23)| < 5 \times 10^{-3} + 10^{-3} < 10^{-2}$.

Exercice 3:

1) On a $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-2)^2 \leq 0$ et est strictement positive pour $x \neq 2$. Donc f est strictement croissante. Ensuite, $f(x) - x = x(x-1)(x-2)$. Il y a donc trois solutions qui sont 0, 1 et 2.

2) Comme f est croissante, la suite (u_n) est monotone. L'intervalle $I = [0,1]$ est stable par f car si $0 \leq x \leq 1$, $0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 1$. Comme $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geq 0$, la suite u_n est croissante, strictement croissante si $u_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 1$ et stationnaire dans les deux cas particuliers. Elle est majorée par 1. Donc, la suite (u_n) converge. Les seules limites possibles sont 0, 1 et 2. Si $u_0 = 0$, la limite est 0, Si $u_0 > 0$, $0 < u_n \leq 1$ et la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

Exercice 4:

1)

$$\text{grad } F = \left[(2\,x + y)\,e^{(x^2 + x\,y)},\, x\,e^{(x^2 + x\,y)}\right]$$

$$g'(0) = \text{grad } F(1,2) \cdot [3,5] = 17e^3$$

2)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z)) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z))$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z)) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z))$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z)) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}(\Phi_1(x,y,z),\Phi_2(x,y,z))$$

Dans le cas particulier,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = (2\,x\,z^2 + z\,(x^2+y^2) + 2\,x^2\,z)\,e^{(x^2\,z^2 + x\,z\,(x^2+y^2))}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2\,x\,z\,y\,e^{(x^2\,z^2 + x\,z\,(x^2+y^2))}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = (2\,x^2\,z + x\,(x^2+y^2))\,e^{(x^2\,z^2 + x\,z\,(x^2+y^2))}$$