Plan détaillé de la preuve de Hrushovski

Gabriel Giabicani, Yves Laszlo

8 décembre 2011

1. Le théorème et réductions (GA)
   - Énoncé du théorème principal (GA)
   - Une application
   - Énoncé uniforme et réduction au cas uniforme (GA, ultraproduits)
   - Réduction au cas uniforme et projectif, lisse, séparable (GA)

2. Réduction σ-uniforme avec V projectif lisse et seconde projection $S \to V^{\sigma}$ finie et séparable (géométrie aux différences des corps)
   - Contrôle des multiplicités I
   - Dimension totale et borne des points des spécialisations par Frobenius
   - Contrôle des multiplicités II

3. Preuve du théorème σ-uniforme (GA -lemme de déplacement-, théorie des modèles des corps valués -analysibilité, contrôle raffiné des points par dimension inertielle-)
   - Déplacement
   - Cardinaux et déplacement

Commentaires et bibliographie

- Les mathématiques expliquées ici sont dues à E. Hrushovski.
- Outre le texte original, l'exposé s'appuie largement sur le travail de M2 de G. Giabicani et ses notes d'Aachen ;
- Elles s'appuient aussi, dans une moindre mesure, sur le groupe de travail organisé par J.-B. Bost, Y. Laszlo et F. Loeser à l'ENS et des notes correspondantes (voir www.math.u-psud.fr/~laszlo/gdtFrobenius).
- On y trouve(ra)
  1. le texte d'E. Hrushovski ;
  2. les notes informelles de Z. Chatzidakis sur la géométrie aux différences et sur les exposés de M. Hils (multiplicités transformelles) ;
  3. les notes d'E. Bouscaren et Y. Laszlo sur la dimension inertielle et l'analysibilité.

1. Le théorème et réductions (GA)
   - Énoncé du théorème principal (GA)
   - Une application
   - Énoncé uniforme et réduction au cas uniforme (GA, ultraproduits)
   - Réduction au cas uniforme et projectif, lisse, séparable (GA)

2. Réduction σ-uniforme avec V projectif lisse et seconde projection $S \to V^\sigma$ finie et séparable (géométrie aux différences des corps)

3. Preuve du théorème σ-uniforme (GA -lemme de déplacement-, théorie des modèles des corps valués -analysibilité, contrôle raffiné des points par dimension inertielle-)

Notations : q puissance d'un premier p, et k corps de caractéristique p , φ_q est le Frobenius $x \mapsto x^q$ de k.
Si V est une k-variété, $\Phi_q \subset V \times V^{\varphi_q}$ désigne le graphe du Frobenius arithmétique $\phi_q : \ V \to V^{\varphi_q}$.
La notation $K_q = (K_q, \varphi_q)$ désigne un corps $K_q \models ACF_p$ muni du Frobenius φ_q.

Théorème (Théorème principal)

Pour tout d, d', il existe $C(d, d') > 0$ tel que pour tout :

- *$k \models ACF_p$;*
- *V fermé irréductible de dimension d de $\mathbf{A}_k^n$ d'adhérence $\overline{V} \hookrightarrow \mathbf{P}_k^n$;*
- *S fermé irréductible de $V \times V^{\varphi_q}$, d'adhérence de $\overline{S} \subset \mathbf{P}_k^n \times \mathbf{P}_k^n$ telle que les deux projections $S \to V$ and $S \to V^{\varphi_q}$ sont dominantes et l'une des deux est quasi-finie,*

alors, si $q > C(d, \deg \overline{V} + \deg \overline{S})$, on a

$$\mathrm{card}\,[S(k) \cap \Phi_q(k)] = \delta q^d + e, \ \textit{avec :}$$

avec $\delta = \frac{[S:V]}{[S:V^{\varphi_q}]_{\mathrm{ins}}}$ et $|e| \leqslant C(d, \deg \overline{V} + \deg \overline{S}) q^{d-\frac{1}{2}}$.

Théorème (Poonen, Fakhruddin)

Soit f une endomorphisme dominant de variétés intègres sur k algébriquement clos. Si

- *soit $k = \overline{\mathbf{F}_p}$,*
- *soit X projective polarisée sur k de caractéristique nulle et f de degré > 1,*

alors les points périodiques de f sont denses dans X.

Le premier résultat entraîne le second par des arguments standards (détails).

Soit $U \neq \varnothing$ affine ouvert non vide de X.

Comme $f^{-1}(U) \cap U \neq \varnothing$, $U \times U$ rencontre le graphe Γ_f de f.

D'après le théorème appliqué à $S = \Gamma_f \cap (U \times U)$, il existe $q = p^n$ et $x \in S \cap \Gamma_q(\bar{\mathbf{F}}_p)$, *i.e.* $\varphi_q(x) = f(x)$.

Mais il existe m tel que $x \in X(\mathbf{F}_{q^m})$ et donc $\varphi_q^m(x) = x$ et $f^m(x) = x$ car φ_q et f commutent.$\square$

Données (Données uniformes pour V, S)

- $d \in \mathbf{N}$
- $\beta : B' \to B^2$ *avec* B, B' *intègres affines de type fini sur* $\mathbf{Z}$
- $\mathcal{V}$ *un* B*-schéma quasi-projectif de type fini*
- $\mathcal{S}$ *un* B'*-fermé de* $B' \times_{B^2} \mathcal{V}^2$
- *pour tout corps* L *et* $b \in B'(L)$ *on note* $\beta(b) = (b_1, b_2) \in B^2(L)$.
- *On suppose que pour tout* b

  $\mathcal{V}_{b_1}, \mathcal{V}_{b_2}, \mathcal{S}_b$ *géométriquement irréductibles de dimension* d
  les projections $\mathcal{S}_b \to \mathcal{V}_{b_1}$ *et* $\mathcal{S}_b \to \mathcal{V}_{b_2}$ *dominantes*[1]
- *si* $b \in B'(K_q)$ *vérifie* $\beta(b) = (b_1, \varphi_q(b_1))$, *on note*[2]

$$\mathcal{V}_b(\mathcal{S}, q) = \{c \in \mathcal{V}_{b_1}(K_q) : (c, \varphi_q(c)) \in \mathcal{S}_b(K_q)\}.$$

[1]donc génériquement quasi-finies

[2]On a alors $\mathcal{V}_{b_2} = \mathcal{V}_{\varphi_q(b_1)} = \mathcal{V}_{b_1}^{\varphi_q}$

Théorème (Théorème uniforme)

Avec les données uniformes pour $(\mathcal{V},\mathcal{S})$, supposons de plus que la seconde projection $\mathcal{S}_b \to \mathcal{V}_{b_2}$ est quasi-finie. Alors, il existe B'' ouvert non vide de B' et $C > 0$ tel que pour tout $q > C$ primaire, tout $b \in B''(K_q)$ d'image

$$\beta(b) = (b_1, \varphi_q(b_1)) \in B(K_q)^2,$$

on a

- $\operatorname{card}(\mathcal{V}_b(\mathcal{S},q))$ *est fini et*

$$\operatorname{card}\mathcal{V}_b(\mathcal{S},q) = \delta q^d + e, \text{ où}$$

- $\delta = \frac{[\mathcal{S}_b : \mathcal{V}_{b_1}]}{[\mathcal{S}_b : \mathcal{V}_{b_1}^{\varphi_q}]_{\mathrm{ins}}}$;
- $|e| \leqslant Cq^{d-\frac{1}{2}}$.

Lemme (Réduction 1)

Le théorème uniforme entraîne le théorème principal.

Idée de la preuve [élémentaire : ultraproduits].

Dans la situation du théorème principal, on suppose qu'on a pour d fixé

$$\mathcal{S}_i \hookrightarrow \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_i^{\varphi_{q_i}}$$

tels que $\deg(\bar{\mathcal{S}}_i), \deg(\bar{\mathcal{V}}_i)$ bornés et

$$q_i^{\frac{1}{2}-d}(\mathrm{card}(\mathcal{S}(K_{q_i}) \cap \Phi_{q_i}) - \delta q_i^d) \to \infty.$$

Par projection, on peut supposer $\mathcal{V}_i \hookrightarrow \mathbf{A}^{2d+1}$ de degré borné et de même pour $\mathcal{S}_i$. Ces familles sont donc limitées et sont ainsi définies par un nombre borné d'équation polynomiales de degré borné.

Les $\mathcal{S}_i, \mathcal{V}_i$ se mettent en famille sur un ultraproduit $L := \prod_{\mathcal{U}} K_{q_i}$, famille qui provient de $\mathcal{S}, \mathcal{V}$ comme dans le théorème uniforme sur un sous-anneau de type fini $D \subset L$ (muni d'une famille dense de points $D \to K_{q_i}$).

Le $\mathcal{U}$-Frobenius $\varphi :\ x_i \mapsto x_i^{q_i}$ laisse stable D (Łos).

On applique le théorème uniforme à $\beta :\ B = \mathrm{Spec}\,(D) \to B \times B$ défini par $b \mapsto (b, b^{\varphi})$ et $\mathcal{S}, \mathcal{V}$.$\square$

Théorème (Théorème uniforme projectif, lisse, séparable)

On part des données uniformes pour $\left(\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{S}}\right)$ *et de* $\mathcal{V}$ *ouvert de* $\overline{\mathcal{V}}$*. Soit* $\mathcal{S}$ *la restriction de* $\overline{\mathcal{S}}$ *à* $\mathcal{V}$*. Supposons de plus que*

- $\overline{\mathcal{V}}$ *lisse et projectif sur* B *et*
- $\mathcal{S}_b \to \mathcal{V}_{b_2}$ *quasi-finie et séparable pour tout* $b \in B'$ *d'image* (b_1, b_2)*.*

Alors, il existe $C > 0$ *tel que pour tout* $q > C$ *primaire et tout* $b \in B'(K_q)$ *d'image* $\beta(b) = (b_1, \varphi_q(b_1))$ *on ait*

$$\left|\left(\overline{\mathcal{S}}_b \cdot \Phi_q\right) - \operatorname{card} \mathcal{V}_b(\mathcal{S}, q)\right| \leqslant C q^{d-1}$$

où le produit d'intersection $\left(\overline{\mathcal{S}}_b \cdot \Phi_q\right)$ *est calculé dans la variété projective lisse* $\overline{\mathcal{V}}_{b_1} \times \overline{\mathcal{V}}_{b_1}^{\varphi_q}$*.*

Théorème (Calcul du nombre d'intersection, cas uniforme et projectif, lisse, séparable)

Avec les données uniformes pour $(\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{S}})$, supposons de plus

- $\overline{\mathcal{V}}$ *projectif lisse sur* B ;
- *la première projection* $\bar{\mathcal{S}}_b \to \overline{\mathcal{V}}_{b_1}$ *de degré constant* δ ;
- *la seconde projection* $\overline{\mathcal{S}}_b \to \overline{\mathcal{V}}_{b_2}$ *quasi-finie et séparable.*

Alors, il existe $C > 0$ *tel que pour toute* $q > C$ *primaire, tout* $b \in B'(K_q)$ *d'image* $\beta(b) = (b_1, \varphi_q(b_2)) \in B^2(K_q)$, *tel que le produit d'intersection* [3]

$$\left(\overline{\mathcal{S}}_b \cdot \Phi_q\right)$$

vérifie

$$\left(\overline{\mathcal{S}}_b \cdot \Phi_q\right) = \delta q^d + e \text{ avec } |e| \leqslant C q^{d-\frac{1}{2}}.$$

Idée de la preuve : Changement de base propre, Formule des traces de Lefschetz, Weil I, majoration, élémentaire mais non triviale, des valeurs propres des correspondances.

[3] Calculé dans la variété projective lisse $\overline{\mathcal{V}}_{b_1} \times \overline{\mathcal{V}}_{b_1}^{\varphi_q}$.

On peut supposer b fermé (changement de base et densité)

La formule de Lefschetz s'écrit (avec $\ell \nmid q$)

$$\left(\overline{\mathcal{S}}_b \cdot \Phi_q\right) = \left({\Phi_q}^t \circ \overline{\mathcal{S}}_b \cdot \Delta\right) = \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{tr}\left({\Phi_q}^t \circ \overline{\mathcal{S}}_b, H^i\left(\overline{\mathcal{V}}_{b_1}, \mathbf{Q}_\ell\right)\right)$$

avec pour $i = 2d$ l'égalité $\dim H^{2d}\left(\overline{\mathcal{V}}_{b_1}, \mathbf{Q}_\ell\right) = 1$ et

$$\operatorname{tr}\left({\Phi_q}^t \circ \overline{\mathcal{S}}_b, H^{2d}\left(\overline{\mathcal{V}}_{b_1}, \mathbf{Q}_\ell\right)\right) = \delta q^d$$

Les valeurs propres de Φ_q^t sont de norme $q^{i/2}$ sur le H^i pour tout plongement $\mathbf{Q}_\ell \hookrightarrow \mathbf{C}$ (Weil 1).

Comme $\overline{\mathcal{S}}_b$ et Φ_q commutent (à twist près), reste à majorer les valeurs propres de $\overline{\mathcal{S}}_q$ en famille, ce qui est élémentaire (mais non trivial) avec la formule des traces pour obtenir

$$\sum_{i=0}^{2d-1} (-1)^i \operatorname{tr}\left({\Phi_q}^t \circ \overline{\mathcal{S}}_b, H^i\left(\overline{\mathcal{V}}_{b_1}, \mathbf{Q}_l\right)\right) = \mathcal{O}\left(q^{d-\frac{1}{2}}\right).$$

$\square$

Lemme (Réduction 2)

Le théorème uniforme projectif, lisse, séparable et l'estimation des nombres d'intersection précédente entraînent le théorème uniforme et donc le théorème principal.

Idée de la preuve :

altérations de de Jong pour se ramener au cas projectif lisse ;

pour la séparabilité, deux cas :

soit B' domine $\mathrm{Spec}\,(\mathbf{Z})$ auquel cas, quitte à se localiser sur $\mathrm{Spec}\,(\mathbf{Z})$, les fibres $\mathcal{S}_b \to \mathcal{V}_{b_2}$ sont quasi-finies et séparables (constructibilité de la séparabilité) ;

soit B est un $\mathbf{F}_p$-schéma, et un changement de base par Frobenius permet de se se ramener au cas séparable. □

1. Le théorème et réductions (GA)

2. Réduction σ-uniforme avec V projectif lisse et seconde projection $S \to V^{\sigma}$ finie et séparable (géométrie aux différences des corps)
   - Contrôle des multiplicités I
   - Dimension totale et borne des points des spécialisations par Frobenius
   - Contrôle des multiplicités II

3. Preuve du théorème σ-uniforme (GA -lemme de déplacement-, théorie des modèles des corps valués -analysibilité, contrôle raffiné des points par dimension inertielle-)

Données (Données différentielles)

- *$d \in \mathbf{N}$ et $k = (k, \sigma)$ corps aux différences parfait et inversif ;*
- *$\overline{V}$ projectif lisse sur k, géométriquement irréductible de dimension d ;*
- *$\overline{S}$ fermé dans $\overline{V} \times \overline{V}^{\sigma}$, géométriquement irréductible de dimension d avec les deux projections dominantes et $\overline{S} \to \overline{V}^{\sigma}$ séparable ;*
- *V le plus grand ouvert U de $\overline{V}$ tel que $\overline{S}_{U^\sigma} \to U^{\sigma}$ soit fini[4] ;*
- *$\tilde{S} = \overline{S} \cap (V \times V^{\sigma})$*
- *Si S fermé de $V \times V^{\sigma}$, on note $\Sigma \star S \hookrightarrow [\sigma]_k V$ la σ-variété aux différences*
$$\Sigma \star S = \{x \in [\sigma]_k V : (x, \sigma(x)) \in S\}.$$

Remarque : Avec les données uniformes, si k contient le corps des fonctions de B' et que $(\overline{\mathcal{V}}, \mathcal{V}, \overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S}) \otimes k = (\bar{V}, V, \bar{S}, S)$, les variétés S et $\tilde{S}$ coïncident sur un ouvert :

$$\dim(S \Delta \tilde{S}) \leqslant d - 1.$$

[4] existe car σ bijectif

Théorème (Théorème σ-uniforme)

Avec les données différentielles, il existe

- *un σ-domaine de (σ-)type fini $D_\sigma \subset k$;*
- *$\overline{\mathcal{V}}$ un D_σ-schéma projectif lisse, $\overline{\mathcal{S}}$ un fermé de $\overline{\mathcal{V}} \times_{D_\sigma} \overline{\mathcal{V}}^\sigma$ et $\mathcal{V}$ ouvert de $\overline{\mathcal{V}}$ tels que $(\overline{\mathcal{V}}, \mathcal{V}, \overline{\mathcal{S}}) \otimes_{D_\sigma} k = (\bar{V}, V, \bar{S})$,*
- *$C > 0$*

tel que pour toute $q > C$ primaire et tout point $h : D_\sigma \to K_q$, on a

$$\operatorname{card}\left[\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}_h(K_q)\right] = \left|\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}_h(K_q)\right| + e = (\overline{\mathcal{S}}_h \cdot \Phi_q) + e', \text{ avec } [5]$$

$\widetilde{\mathcal{S}} = \overline{\mathcal{S}} \cap (\mathcal{V} \times_{D_\sigma} \mathcal{V}^\sigma)$;

$|e|, |e'| \leqslant Cq^{d-1}$;

$\left|\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}_h(K_q)\right|$ est la somme des multiplicités géométriques des points de $\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}_h$ vu comme la sous-K_q-variété algébrique de $\mathcal{V}_h$ définie par $\{(x \in \mathcal{V}_h) : (x, \varphi_q(x)) \in \widetilde{\mathcal{S}}_h\}$;

le produit d'intersection $(\overline{\mathcal{S}}_h \cdot \Phi_q)$ est calculé dans la variété projective lisse $\overline{\mathcal{V}}_h \times \overline{\mathcal{V}}_h^{\varphi_q}$.

---

[5] Notons que la notation $\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}_h$ n'est pas ambiguë car $(\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}})_h = \Sigma\star(\widetilde{\mathcal{S}}_h)$.

On a besoin de deux lemmes de "contrôle des mauvais lieux" des spécialisations par Frobenius en fonction de la dimension totale. Le premier facile, le second plus délicat (cf. exposés Chatzidakis-Hills). L'utilité de ces lemmes provient de l'estimation suivante :

Lemme

Avec les notations précédentes, si une projection $S \to V$ ou $S \to V^\sigma$ est quasi-finie, on a[6] $\dim.\mathrm{tot}\, \Sigma \star S \leqslant \dim(S)$.

Supposons $S \to V^\sigma$ quasi-finie.Soit (D, σ) algébriquement intègre et $x \in \Sigma \star S(D)$ *i.e.* $(x, \sigma(x)) \in S(D)$. On doit évaluer

$$\deg.\mathrm{tr}_k\, k(\sigma^n(x), n \geqslant 0).$$

$$\text{Mais } \overline{k(x, \sigma(x))} = \overline{k(\sigma(x))}$$

donc, comme $\sigma(x) \subset \bar{x}_\sigma$, on a

$$\deg.\mathrm{tr}_k(x, \sigma(x)) \leqslant \deg.\mathrm{tr}_k(\sigma(x)) \leqslant \deg.\mathrm{tr}_k(x) \leqslant \dim(V) = \dim(S).$$

[6] En fait, on a égalité

De même,

$$\deg.\mathrm{tr}_k(x, \cdots, \sigma^(x)) \leqslant \deg.\mathrm{tr}_k(\sigma^n(x)) \leqslant \dim(S).$$

Si $S \to V$ quasi finie, $\sigma(x)$ algébrique sur $k(x)$ et on conclut en composant par σ. $\square$
On verra qu'il faudra une notion de dimension plus subtile pour terminer la preuve du théorème.

Lemme (Premier lemme de majoration)

Soit X un σ-schéma au dessus d'un σ-schéma Y noethérien tel que $\forall y \in Y$, $\dim.\mathrm{tot}\, X_y \leqslant d$. Alors il existe $C > 0$ tel que pour q primaire tel que $q > C$ et tout $y \in Y(K_q)$, on a

$$\mathrm{card}\, X_y(K_q) \leqslant Cq^d.$$

Pour la preuve, voir prop. 3.6 notes de Zoé de juin 2006.$\square$

Proposition (Second lemme de majoration)

Soit X un schéma aux différences de type (σ-)fini sur Y noethérien tel que $\forall y \in Y$, $\dim.\mathrm{tot}\, X_y \leqslant d$. Il existe un entier $C > 0$ tel que pour toute q assez grand puissance d'un nombre premier, et pour tout $y \in Y(K_q)$ la somme des multiplicités géométrique de $X_y(K_q)$ est $\leqslant Cq^d$.

Idée de la preuve : Pour contrôler les multiplicités, on introduit la notion de multiplicité transformelle des σ-variétés.

Elle se spécialise sur la notion de multiplicité des variétés lorsque $\sigma = \varphi_q$:

si la multiplicité transformelle de X est $\leqslant n$, il existe $C > 0$ tel que les multiplicités des points de $X(K_q)$ sont $\leqslant Cq^n$.

Pour la preuve complète, voir prop. 3.16 notes de Zoé de juin 2006.$\square$

Lemme (Réduction 3)

Le théorème σ-uniforme entraîne le théorème uniforme projectif, lisse, séparable et donc le théorème principal.

Idée de la preuve : Géométrie aux différences des corps, lien entre multiplicité transformelle et multiplicité géométrique.

On part donc des données uniformes $\left(B', B, \overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{S}}, \mathcal{V}, \mathcal{S}\right)$ comme dans le théorème uniforme projectif et lisse.
On va démontrer le théorème uniforme pour $\widetilde{\mathcal{S}}$ puis pour $\mathcal{S}$.

Étude de $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Soit T_1 une composante de

$$T = \{b \in [\sigma]B' : b_2 = b_1^\sigma\},$$

avec $\beta(b) = (b_1, b_2)$. Notons qu'on a

$$T(K_q) = \{b \in B'(K_q) | \ b_2 = \varphi_q(b)\}.$$

Soit k la clôture parfaite inversive de $k(T_1)_\sigma$.

Le théorème σ-uniforme (et le calcul du produit d'intersection) appliqués à

$$\overline{S}_k \subset \overline{V}_k \times \overline{V}_k^{\sigma}$$

et un argument d'ultra-produit donnent un ouvert non vide T_1' de T_1 et $C \in \mathbf{N}$ tels qu'on a

$(*)(T_1', C)$: pour $q > C$, pour tout $b \in T_1'(K_q)$, la différence

$$\delta(b) = \left| \mathrm{card}\, \Sigma \star \widetilde{\mathcal{S}}_b(K_q) - \left(\overline{\mathcal{S}}_b \cdot \Phi_q\right) \right|,$$

qui s'écrit aussi (calcul du produit d'intersection)

$$\left| \mathrm{card}\, \mathcal{V}_b(\widetilde{\mathcal{S}}, q) - \delta q^{d-1} \right| + \mathcal{O}(q^{d-1})$$

est un $\mathcal{O}(q^{d-1})$.

On conclut par récurrence noethérienne que c'est vrai sur T tout entier.

Comparaison de $\widetilde{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{S}$.

Le B'-schéma $\mathcal{S}\triangle\widetilde{\mathcal{S}}$ est relativement de dimension $\leqslant d-1$ et la seconde projection sur $\mathcal{V}^\sigma$ est quasi-finie. On a alors (facile)

$$\forall b \in B',\ \operatorname{dim.tot}[(\Sigma\star\mathcal{S})_b\triangle(\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}})_b] \leqslant d-1.$$

D'après le premier lemme de majoration, on a

$$\operatorname{card}\mathcal{V}_b(\mathcal{S},q) := \operatorname{card}(\Sigma\star\mathcal{S}(K_q)) = \operatorname{card}(\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}(K_q)) + \mathcal{O}(q^{d-1}).$$

Au dessus des ouverts denses où les projections $\mathcal{S}_b, \widetilde{\mathcal{S}}_b \to \mathcal{V}^\sigma_{b_2}$ sont étales, les variétés algébriques $\mathcal{V}_b(\mathcal{S},q), \mathcal{V}_b(\widetilde{\mathcal{S}},q)$ sont lisses.

Le second lemme de majoration assure alors

$$\operatorname{card}(\Sigma\star\mathcal{S}(K_q)) = |\Sigma\star\mathcal{S}(K_q)| + \mathcal{O}(q^{d-1}) \text{ et}$$

$$\operatorname{card}(\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}(K_q)) = |\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}(K_q)| + \mathcal{O}(q^{d-1}).$$

$\square$

1. Le théorème et réductions (GA)

2. Réduction σ-uniforme avec V projectif lisse et seconde projection $S \to V^\sigma$ finie et séparable (géométrie aux différences des corps)

3. Preuve du théorème σ-uniforme (GA -lemme de déplacement-, théorie des modèles des corps valués -analysibilité, contrôle raffiné des points par dimension inertielle-)
   - Déplacement
   - Cardinaux et déplacement

Dans ce qui suit, V est projective et lisse.

$\mathcal{C}(V)$ désigne l'ensemble des $S \subset V \times V^\sigma$ tels que

- S irréductible de dimension d ;
- les projections sur V, V^σ dominantes ;

$\mathcal{C}_f(V) = \{S \in \mathcal{C}(V) \text{ tel que } S \to V^\sigma \text{ fini}\}$
$\mathbf{Z}\mathcal{C}(V), \mathbf{Z}\mathcal{C}_f(V) =$ les groupes engendrés

$\mathbf{Z}\mathcal{C}_r(V) = \langle S_0 - S_\infty \rangle$ où $S_t \subset V \times V^\sigma \times \mathbf{P}^1$ de dimension $d+1$ avec $S_0, S_\infty \in \mathcal{C}(V)$

Lemme (Lemme de déplacement)

Soit $S \in \mathcal{C}(V)$. Il existe $S' \in \mathbf{Z}\mathcal{C}_f(V)$ tel que $S - S' \in \mathbf{Z}\mathcal{C}_r(V)$.

Preuve : Chevalley.$\square$

Proposition

Soit S_t tel que $S_0 - S_\infty \in \mathcal{C}_{r,\mathrm{sep}}(V)$. Il existe $D \subset k$ de type fini sur $\mathbf{Z}$, des familles projectives $\mathcal{V}$ sur D et $\mathcal{S}_t \hookrightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{V}^\sigma \times \mathbf{P}^1_D$ sur $\mathbf{P}^1_D$ tels que que pour q primaire assez grand et $h : D \to K_q$, on a :

$$\operatorname{card} \Sigma \star (\mathcal{S}_0)_h(K_q) - \operatorname{card} \Sigma \star (\mathcal{S}_\infty)_h(K_q) = \mathcal{O}(q^{d-1})$$

Idée de la preuve : On montre

$$\operatorname{card} \Sigma \star (\mathcal{S}_0)_h(K_q) - \operatorname{card} \Sigma \star (\mathcal{S}_t)_h(L_q) = \mathcal{O}(q^{d-1})$$

avec $L_q = \overline{K_q(t)}$.
On utilise le morphisme de spécialisation (S projective)

$$\mathrm{res} \ : \ X(L_q) = X(L_q^{\geqslant 0}) \to X(K_q)$$

pour les variétés projectives $X = \mathcal{V}_h, \mathcal{S}_h$ où $L_q^{\geqslant 0}$ est l'anneau de valuation de $L_q = \overline{K_q(t)}$ (en 0). On prouve pour cela 3 lemmes, dont un (lemme clef) est difficile et recèle sans doute l'idée la plus novatrice. Quelques notations d'abord.

U_{et} = le plus grand ouvert de V tel que $\mathcal{S}_0 \cap (U_{\mathrm{et}} \times U_{\mathrm{et}}^{\sigma}) \to U_{\mathrm{et}}^{\sigma}$ est étale. Soit $W = \mathcal{V}_h - U_{\mathrm{et}}$ le complémentaire.
On a une application $\mathrm{res} : \Sigma * (\mathcal{S}_t)_h(L_q) \to \mathcal{V}_h(K_q)$
On pose $\widetilde{W} = \mathrm{res}^{-1}(W)$: ce n'est pas une variété σ-algébrique, ni même un définissable dans la théorie des σ-corps.

Lemme

$$\mathrm{card}(\Sigma * (\mathcal{S}_0)_h(K_q) - \mathrm{card}(\Sigma * (\mathcal{S}_0)_h(K_q) \setminus W) = \mathcal{O}(q^{d-1})$$

Lemme (Le lemme clef)

$$\mathrm{card}(\Sigma * (\mathcal{S}_t)_h(L_q)) - \mathrm{card}(\Sigma * (\mathcal{S}_t)_h(L_q) \setminus \widetilde{W}) = \mathcal{O}(q^{d-1})$$

Lemme

$\mathrm{res} : (\Sigma * (\mathcal{S}_t)_h)(L_q) \setminus \widetilde{W}) \to (\Sigma * (\mathcal{S}_0)_h(K_q) \setminus W)$ *est bijectif pour* q *primaire assez grand.*

Le premier lemme est une conséquence directe du premier lemme de majoration, le troisième du lemme de Hensel.

Attention

La preuve du second lemme est difficile.
On montre que W est analysable dans la théorie des corps valués aux différences de « dimension inertielle » $< d$.
On montre pour cette notion de dimension un lemme de majoration par spécialisation au Frobenius.

D'après les 3 lemmes précédents, on peut remplacer S par un cycle équivalent dans les conditions précédentes (puisque le produit d'intersection se conserve par équivalence).
Le lemme de déplacement assure qu'on peut supposer $S \to V^{\sigma}$ fini (et séparable).
Comme on est dans un cas fini, on a $S = \tilde{S}$. Comme S et Φ_q sont en position général, on a par définition

$$\operatorname{card} \Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}_h(K_q) \leqslant (\mathcal{S}_h \cdot \Phi_q) \leqslant \left|\Sigma\star\widetilde{\mathcal{S}}_h(K_q)\right|,$$

ce qui, comme on a vu, joints aux lemmes de majoration, donne l'intégralité du théorème σ-uniforme $\cdots$, et une intense jubilation ! $\square$

On peut supposer X intègre de dimension d.

Tout est défini sur un schéma local S de type fini sur $\mathbf{Z}$.

Par récurrence sur la dimension de S, on se ramène à S un trait et à remonter un point périodique x sur la fibre spéciale sur la fibre générique.

Comme les points périodiques sont denses, on peut supposer x lisse d'ordre n.

L'hypothèse de degré assure que les points périodiques d'ordre n des fibres sont en nombre fini.

Les schémas de points fixes $\Delta \cap \Gamma_{f^n}$ relatifs sont définis par d équations dans un schéma régulier de dimension d.

Ils sont de dimension $\geqslant 1$ en un point lisse (th de la dimension de Serre).

On remonte alors une courbe de point fixe passant par x (qui forcément n'est pas verticale).

Retour

D est un quotient $\mathbf{Z}[X_1, \cdots, X_n]/(P_1, \cdots, P_n)$ définissant $B' \subset \mathbf{A}^n_{\mathbf{Z}}$.

Le point générique η est L-rationnel : il définit $\eta_L \in L^n$ et une famille $\eta_i \in K^n_{q_i}$.

On a une famille finie d'égalités

$$P_1(\eta) = 0, \cdots, P_m(\eta) = 0 \text{ dans } L.$$

D'après le théorème de Łos, pour presque tout i, on a $P(\eta_i) = 0$ dans $K^n_{q_i}$.

On déduit $\eta_i \in B'(K_{q_i})$ pour presque tout i.

De même, les η_i sont denses dans B'.

Retour

Soit $I = \{i = (T_i, C_i),\ T_i \hookrightarrow T_1$ouvert non vide, $C_i \in \mathbf{N}\}$ ordonné par $i \leqslant j$ si $T_i \supseteq T_j$ et $C_i \leqslant C_j$. L'ordre est filtrant et tout contre-exemple $b_i \in T_i(K_{q_i})$ à $(*)(i)$ l'est pour $*(j)$.

Supposons qu'il existe un contre-exemple $b_i \in T_1(K_{q_i})$ à $(*)(i)$ et considérons un ultrafiltre $\mathcal{U}$ de I contenant la base de filtre $\{i : i_0 \leqslant i\}$ pour tout i_0.En particulier, $\lim_{\mathcal{U}} C_i = +\infty$.

Soit $k = (K, \sigma) = \prod'_{\mathcal{U}} K_{q_i}$ et $b = \prod'_{\mathcal{U}} b_i \in T_1(k)$. Le corps k est inversif et parfait (Łos).

Comme $b_i \in T_j$ pour tout $i \geqslant j$, l'ensemble des i tels que $b_i \in T_j$ est dans $\mathcal{U}$ et donc $b \in T_j(k)$ de sorte que b est dans tout ouvert donc est générique dans T_1.

Soit $D_\sigma \hookrightarrow k, \tilde{V}, \ldots, C$ comme dans le théorème σ-uniforme. On peut supposer $b \in T_1(D_\sigma)$.

Le théorème de Łos assure que le point générique $D_\sigma \to k$ déduit de b est induit par des points $h_i : D_\sigma \to K_{q_i}$ ($\mathcal{U}$-presque partout) déduits de b_i tels que $\mathcal{S}_{h_i}, V_{h_i}, \cdots$ soient les fibres de S, V, ... au dessus de b_i.

Le théorème σ-uniforme assure alors que $\mathcal{U}$-presque partout on a $\delta(h_i) = \delta(b_i) \leqslant C$ et donc $C_i < C$ $\mathcal{U}$-presque partout, ce qui contredit $\lim_{\mathcal{U}} C_i = +\infty$. Retour