Complexes simpliciaux hyperboliques de grande dimension.

Frédéric Haglund
URA 1169 du C.N.R.S. : Topologie et Dynamique
Laboratoire de Mathématiques - Université Paris Sud (Bâtiment 425)
F-91405 ORSAY CEDEX
e-mail: frederic.haglund@math.u-psud.fr

14/11/2003

Résumé. Nous donnons un critère combinatoire local pour qu'un complexe simplicial fini ait un revêtement universel hyperbolique au sens de Gromov.

Abstract. We give a local combinatorial criterion for finite simplicial complexes which implies the Gromov-hyperbolicity of the universal covering.

2000 MSC : 05C12, 53C21, 57Q05.

Mots-clés : courbure combinatoire négative ou nulle, complexes simpliciaux asphériques, graphes Gromov-hyperboliques ou semi-hyperboliques.

Key-words : non positive combinatorial curvature, aspherical simplicial complexes, Gromov-hyperbolic graphs, semi-hyperbolic graphs.

0. Introduction.

Dans Asymptotic Invariants of Infinite Groups, M. Gromov fait remarquer qu'il y a peu de constructions (non arithmétiques) de groupes hyperboliques de grande dimension. En particulier on manquait jusqu'alors d'un critère combinatoire local assurant l'hyperbolicité du revêtement universel d'un complexe simplicial de dimension quelconque (cf. [G], 7.A.III.(c)).

Dans cet article nous étudions les complexes simpliciaux de dimension finie localement finis. En première partie nous proposons un critère combinatoire local (cf. Définitions 1.2 et 1.12) qui assure la contractilité du revêtement universel et d'autres propriétés de convexité combinatoire (cf. Théorème 2.7.5). Un léger renforcement de ce critère donne l'hyperbolicité au sens de Gromov du revêtement universel (cf. Théorème 3.5).

Le critère local d'hyperbolicité est le suivant. Dans les links des sommets du complexe X, les voisinages de deux simplexes non voisins (i.e. à distance combinatoire > 1) doivent être disjoints ou d'intersection un simplexe. Ces voisinages de simplexes se comportent comme s'ils étaient des "convexes" du link.

Pour étudier le revêtement universel $\tilde{X}$ d'un tel complexe (section 3, Théorème 3.5), nous écrivons $\tilde{X}$ comme union croissante de boules combinatoires. Nous montrons que ces boules sont contractiles, et que deux géodésiques joignant le centre de la boule à deux sommets du bord de la boule liés par une arête sont à distance de Hausdorff ≤ 1. Cette finesse des bigones entraîne l'hyperbolicité (d'après [P]). D'ailleurs il n'est pas clair que $\tilde{X}$ peut être muni d'une structure de complexe simplicial métrique $CAT(0)$ (cf. 1.14).

Tout repose en fait sur la compréhension du passage de la boule de rayon n à la boule de rayon $n+1$. C'est pourquoi nous étudions en section 2 les extensions élémentaires de complexes : nous montrons comment obtenir un complexe vérifiant le critère d'hyperbolicité à partir de recollements (particulièrement simples) de tels complexes (voir Théorèmes 2.4 et 2.7.5).

Enfin pour mener à bien l'étude des extensions nous donnons en section 1 (après les rappels et premières définitions) un lemme technique essentiel (le lemme du voisinage 1.11)

Dans un prochain article nous utiliserons les résultats obtenus ici pour voir que les complexes finis de groupes finis dont les développements locaux satisfont notre critère sont développables (de π_1 hyperboliques). On présentera une méthode pour fabriquer des espaces contractiles de dimension quelconque admettant un groupe d'automorphisme discret, cocompact et résiduellement fini. A l'aide de ces résultats nous construirons des exemples de groupes hyperboliques de dimension cohomologique virtuelle arbitrairement grande. Enfin, nous donnons aussi des constructions de groupes de Coxeter à angles droits hyperboliques au sens de Gromov, de dimension cohomologique virtuelle arbitrairement grande.

Ce dernier résultat - notre but initialement - a été obtenu indépendamment par T. Januszkiewicz et J. Swiatkowski dans Hyperbolic Coxeter groups of large dimension ([JS]), récemment publié. D'autre part, dans une communication privée T. Janusz-kiewicz m'a prévenu qu'il a obtenu des résultats très semblables à ceux qu'on lira ici.

1. Intersections convexes de voisinages.

1.1 Rappels et notations sur les complexes simpliciaux.

Complexe, simplexe, sous-complexe. Dans tout ce qui suit X désigne un complexe simplicial (abstrait). On note S_X l'ensemble des sommets de X et plus généralement S_Y l'ensemble des sommets d'un sous-complexe Y. Ainsi X est un ensemble de simplexes σ, c'est à dire de parties finies (non vides) de S_X, stable par passage aux sous-parties (non vides) et par intersections (non vides ; cf. [HW] section 1.9 et 1.10 p 41,45 pour les premières définitions sur les complexes simpliciaux abstraits). La *dimension* d'un simplexe σ est $|\sigma| - 1$. Pour un simplexe σ et un sous-complexe Y nous écrirons $\sigma \in Y$ si σ est un simplexe de Y. Pour tout simplexe σ de X, nous noterons encore σ le sous-complexe de X formé des parties non vides de σ. Un couple de S_X tel que la partie correspondante est une arête a de X est une *arête orientée* (notée $\vec{a}$). L'arête opposée sera notée $\overline{\vec{a}}$. Nous dirons que deux simplexes σ et τ sont *joignables* si $\sigma \cup \tau$ est un simplexe de X, auquel cas nous appellerons $\sigma \cup \tau$ le *joint de σ et τ.*

Morphisme. Soient X, Y deux complexes simpliciaux. Un morphisme de X dans Y est une application $f : S_X \to S_Y$ telle que pour tout simplexe σ de X l'image directe $f(\sigma)$ est un simplexe de Y (alors f définit par les images directes une unique application $X \to Y$, encore notée f). Le morphisme est *non dégénéré* si f est injective sur tout simplexe. C'est un *isomorphisme* si f est bijective et son inverse est aussi un morphisme.

Sous-complexes pleins. Rappelons qu'un sous-complexe Y de X est *plein* si pour tout simplexe σ de X on a : $\sigma \subset S_Y \Rightarrow \sigma \in Y$. Deux sous-complexes pleins Y, Z sont égaux $\iff S_Y = S_Z$. Une intersection de sous-complexes pleins est pleine. Si $Z \subset Y \subset X$ avec Z plein dans Y et Y plein dans X, alors Z est plein dans X. Si $S \subset S_X, S \neq \emptyset$, nous appelons complexe *engendré par S* l'intersection des sous-complexes pleins dont l'ensemble des sommets contient S (c'est le sous-complexe plein formé des simplexes σ de X tels que $\sigma \subset S$). Par exemple si Y est un sous-complexe l'ensemble des simplexes de X disjoints de Y est vide ou le sous-complexe engendré par $S_X \setminus S_Y$. Pour éviter des lourdeurs, nous nous autoriserons à employer l'expression "complexe engendré par S" même quand S est vide : c'est par définition le vide (donc pas un sous-complexe au sens strict).

Voisinages. Pour tout sous-complexe Y de X soit $V(Y, X)$ le sous-complexe formés des simplexes de X contenus dans un simplexe touchant Y. C'est le *voisinage de Y dans X.* Nous notons $\partial V(Y, X)$ le sous-complexe (plein) formé des simplexes de $V(Y, X)$ ne touchant pas Y (c'est le *bord de* $V(Y, X)$). Lorsque $Y = \{s\}$, nous allégeons $V(\{s\}, X)$ en $V(s, X)$.

Plus généralement, pour tout sous-complexe $Y \subset X$ et tout entier $n \geq 1$, on note $V^n(Y, X)$ l'union des simplexes σ de X contenant un sommet v tel que $d(v, S_Y) \leq n - 1$. Par exemple, $V^1(Y, X) = V(Y, X), V^2(Y, X) = V(V(Y, X), X)$, et en fait $V^{n+1}(Y, X) = V(V^n(Y, X), X)$. Si $Y = \{s\}$ on note plutôt $V^n(s, X)$ On note $\partial V^n(Y, X)$ le sous-complexe de $V^n(Y, X)$ engendré par les sommets à distance n de S_X. On a bien $\partial V^1(Y, X) = \partial V(Y, X)$ et pour $n \geq 1$ également $\partial V^{n+1}(Y, X) = \partial V(V^n(Y, X), X)$.

D'autre part, pour tout simplexe σ, nous notons $\mathrm{St}(\sigma, X)$ le sous-complexe formés des simplexes de X contenus dans un simplexe contenant σ (c'est l'*étoile de σ dans X*). Nous noterons $\mathrm{Lk}(\sigma, X)$ le sous-complexe de $\mathrm{St}(\sigma, X)$ formé des simplexes ne touchant pas σ (le link de σ dans X). Lorsque σ est un sommet s, on a $\mathrm{St}(s, X) = V(s, X)$, et $\mathrm{Lk}(s, X) = \partial V(s, X)$.

Nous dirons qu'un morphisme $f : X \to Y$ est un *isomorphisme local* (ou un *revêtement*) si pour tout $p \in S_X$, f induit un isomorphisme de $V(p, X)$ sur $V(f(p), Y)$.

1.1.1 Remarque sur les voisinages et les sous-complexes pleins.
Si $K \subset X$ est plein et si $s \in S_K$, alors $V(s, K) = V(s, X) \cap K$. Plus généralement si Y est un sous-complexe de K, alors $V(Y, X) \cap K = V(Y, K)$

Démonstration
Traitons d'abord le cas où $Y = \{s\}$. L'inclusion $V(s, K) \subset V(s, X) \cap K$ est évidente. Réciproquement, si un simplexe de K est joignable à s dans X, il l'est dans K par plénitude de K dans X.
Pour Y un sous-complexe de K, on a $V(Y, X) \cap K = (\bigcup_{s\in Y} V(s, X)) \cap K = \bigcup_{s\in Y} V(s, X)$ $\cap K = \bigcup_{s\in Y} V(s, K)$ (par ce qui précède). Par définition on a donc $V(Y, X) \cap K = V(Y, K)$.
$\square$

1.2 Plusieurs notions de convexité locale combinatoire.

(P_0) Tout voisinage de sommet est plein dans X.

(P_1) Tout voisinage de sommet et d'arête est plein dans X.

(P) Tout voisinage de simplexe est plein dans X.

(D) X est de drapeaux, i.e. si $\sigma \subset S_X$ est telle que deux sommets distincts de σ sont liés par une arête de X, alors σ est un simplexe de X.

(ICV_0) Pour deux sommets s, t non liés par une arête de X, l'intersection des voisinages de sommets $\mathrm{St}(s, X)$ et $\mathrm{St}(t, X)$ est vide ou un simplexe $\sigma \subset \mathrm{Lk}(s, X) \cap \mathrm{Lk}(t, X)$. Pour toute arête a d'extrémités s, t on a $\mathrm{St}(s, X) \cap \mathrm{St}(t, X) = \mathrm{St}(a, X)$.

(ICV) On suppose que (ICV_0) est vérifiée et que de plus pour toute arête a et tout sommet s non dans $V(a, X)$, l'intersection de $\mathrm{St}(s, X)$ avec $V(a, X)$ est vide ou un simplexe $\sigma \subset \mathrm{Lk}(s, X) \cap \partial V(a, X)$.

(ICV_{-1}) On suppose que (ICV) est vérifiée et que de plus pour deux arêtes a et b, avec $b \cap V(a, X) = \emptyset$, l'intersection de $V(a, X)$ avec $V(b, X)$ est vide ou un simplexe $\sigma \subset \partial V(a, X) \cap \partial V(b, X)$.
Le sigle (ICV) veut évoquer : intersection convexe de voisinages. Par exemple, un complexe ayant (ICV_0) a la combinatoire la plus simple possible pour les voisinages de sommets.

1.3 Définition (chemins, géodésiques, cycles).
1) Un chemin de longueur n de X *est une suite $(p_0, \cdots, p_n)$ de sommets de X, tels que $\{p_i, p_{i+1}\}$ est une arête de X pour tout $0 \le i < n$.*
2) Si X est connexe alors S_X est muni de la distance combinatoire d, minimum de la longueur des chemins joignant deux sommets. Une géodésique de X *est un chemin de X dont la longueur est la distance entre ses extrémités. Une partie de S_X est dite* convexe *(resp.* totalement géodésique*) si toute (resp. une) géodésique entre deux sommets de la partie a tous ses sommets dans la partie. Pour un sommet s et un entier $n \ge 0$, nous noterons $B_X(s, n)$ (resp. $\Sigma_X(s, n)$) le sous-complexe de X engendré par l'ensemble des sommets t tel que $d(s, t) \le n$ (resp. $d(s, t) = n$) : c'est la* boule *(resp. la* sphère*)* de centre s et de rayon n dans X.

3) Un chemin $(p_1, \cdots, p_n)$ est un cycle de X de longueur n *si ses sommets sont deux à deux distincts et $\{p_n, p_1\}$ est aussi une arête. Une* corde *du cycle est une arête $\{p_i, p_j\}$ avec $1 \leq i < j - 1 \leq n$ (et $\{i, j\} \neq \{1, n\}$). Le complexe X est dit* sans n-cycle *si tous ses cycles de longueur $\leq n$ ont une corde. Pour $n = 4, 5, 6$ on dit sans carré, sans pentagone, sans hexagone.*

Attention ! En général, l'inclusion $V^n(s, X) \subset B_X(s, n)$ est stricte, car $\partial V^n(s, X)$ (et donc $V^n(s, X)$ lui-même) n'est pas toujours un sous-complexe plein. Ce sera cependant le cas si X est connexe, simplement connexe et satisfait la condition (ICV), cf. lemme 3.1.

1.4 Lemme. *X vérifie (ICV_0) si et seulement si X vérifie (D) et est sans carré. De plus un tel X vérifie (P_0) ; en fait X vérifie même (P).*

Démonstration

Montrons d'abord que si X a (ICV), alors X a (D).

On raisonne par récurrence sur le cardinal k de l'ensemble σ des sommets d'un sous-graphe complet de X. Evident si $k \leq 2$, donc on suppose $k \geq 3$, on considère une partition $\sigma = \{s, t\} \cup \sigma'$ avec $|\sigma'| = k - 2$. Alors par récurrence $\{s\} \cup \sigma'$ et $\{t\} \cup \sigma'$ sont des simplexes de X. Donc σ' est un simplexe de $\mathrm{St}(s, X) \cap \mathrm{St}(t, X)$, donc σ est un simplexe de $\mathrm{St}(\{s, t\}, X)$ par (ICV_0) (deuxième propriété).

Notons que la condition “de drapeaux” entraîne immédiatement (P_0).

Montrons que X est sans carré. Pour cela on considère un carré, deux sommets s, t diamétralement opposé sur ce carré. Ou bien s et t sont liés, ou bien la première partie de (ICV_0) dit que les deux autres sommets du carré sont liés, ce qui conclut.

Montrons maintenant que X vérifie (P). Soit σ un simplexe de X et τ un simplexe tel que $S_\tau \subset V(\sigma, X)$. On raisonne par récurrence sur $\dim \tau$; il n'y a rien à faire si $\dim \tau = 0$.

Si $\dim \tau > 0$ écrivons $\tau = \rho * \{p\}$. Par récurrence il existe $s \in \sigma$ tel que $\rho \in V(s, X)$. Soit $t \in \sigma$ tel que $p \in V(t, X)$.

Si p est lié à s alors $S_\tau \subset V(s, X)$. Par (P_0) nous avons $\tau \in V(s, X) \subset V(\sigma, X)$.

Si p n'est pas lié à s, alors $S_\tau \subset V(t, X)$. En effet par (ICV_0) l'intersection $V(s, X) \cap V(p, X)$ est un simplexe, qui d'ailleurs contient t et ρ. Ici encore par plénitude nous avons $\tau \in V(t, X) \subset V(\sigma, X)$.

Réciproquement supposons que X soit un complexe de drapeaux sans carré.

Soit s, t deux sommets liés dans X par une arête a. Soit σ un simplexe de $\mathrm{St}(s, X) \cap \mathrm{St}(t, X)$. Alors tous les sommets de σ sont joignables à la fois à s et à t : donc $\sigma \cup \{s\} \cup \{t\}$ est l'ensemble des sommets d'un graphe complet de X. Par (D) il existe un simplexe τ de X engendré par cet ensemble de sommet. C'est dire que $\sigma \in \mathrm{St}(a, X)$.

Soit maintenant s, t deux sommets non liés dans X tels que $\mathrm{St}(s, X) \cap \mathrm{St}(t, X)$ est non vide. Soit S l'ensemble des sommets de $\mathrm{St}(s, X) \cap \mathrm{St}(t, X)$: montrons que S engendre un graphe complet. En effet si u, v sont distincts dans S, alors (s, u, t, v) est un carré de X. Comme X est sans carré et que s et t ne sont pas liés, on voit que nécessairement u et v sont liés. Donc S engendre un graphe complet. Et par (D) en fait S engendre un simplexe de X. La condition (ICV_0) est satisfaite.

$\square$

1.5 Lemme. *La condition (ICV) (resp. (ICV_{-1})) est équivalente à la condition être de drapeaux, sans pentagone (resp. sans hexagone).*

Démonstration

Soit π un pentagone de X vérifiant (ICV) : nous devons y trouver une corde. Soit a une arête de π et s le sommet de π non dans a. Ou bien s est lié à l'une des extrémités de a (ce qui donne une corde), ou bien s n'est pas dans $V(a, X)$ et donc d'après (ICV) les deux voisins de s dans π sont liés dans X.

Réciproquement supposons X de drapeaux, sans pentagone. Soit s un sommet et a une arête de X (d'extrémités u, v), avec $s \notin V(a, X)$, i.e. s non lié à u ou v. Soit S l'ensemble des sommets de $\mathrm{St}(s, X) \cap V(a, X)$.

Soit t, w deux sommets distincts de S. Alors (s, t, u, w) ou (s, t, v, w) est un carré de X, ou bien (s, t, u, v, w) ou (s, t, v, u, w) est un pentagone de X. Puisque s n'est pas joignable dans X à u ou v, la condition sans pentagone donne $\{t, w\}, \{t, v\}$ ou $\{u, w\}$ est une arête de X. Les deux derniers cas (correspondant au pentagone) entraînent eux-aussi que $\{t, w\}$ est une arête de X, par la condition sans carré.

Ainsi S engendre un graphe complet de X et, par (D), S est un simplexe. Avec le lemme précédent on a bien que X vérifie (ICV).

Soit maintenant h un hexagone de X vérifiant (ICV_{-1}) : nous devons y trouver une corde. Soit a une arête de h et b l'arête de h ne touchant pas a. Ou bien b rencontre $V(a, X)$ (ce qui donne une corde), ou bien d'après (ICV_{-1}) les deux sommets de h non dans $a \cup b$ sont liés dans X.

Réciproquement supposons X de drapeaux, sans hexagone. Soit a, b deux arêtes de X (d'extrémités r, s et u, v), avec $b \cap V(a, X) = \emptyset$. Soit S l'ensemble des sommets de $V(a, X) \cap V(b, X)$.

Soit t, w deux sommets distincts de S ; alors l'une des propriétés suivantes est vraie : (s, t, u, w), (s, t, v, w), (r, t, u, w) ou (r, t, v, w) est un carré, (s, t, u, v, w), (r, t, u, v, w), (r, s, t, u, w) ou (r, s, t, v, w) est un pentagone ou enfin (r, s, t, u, v, w), (r, s, t, v, u, w), (r, s, v, w, u, t) ou (r, s, w, u, v, t) est un hexagone de X. Puisque r, s ne sont pas joignables dans X à u ou v, la condition sans hexagone ramène le cas de l'hexagone à l'un des cas de pentagone, puis les cas de pentagones à un cas de carré, enfin on obtient dans tous les cas que $\{t, w\}$ est une arête de X.

Ainsi S engendre un graphe complet de X et par (D) S est un simplexe. Avec le lemme précédent on a bien que X vérifie (ICV).

□

Les diverses propriétés d'intersection convexe de voisinage sont locales, au sens où il suffit qu'elles soient vraies dans toutes les boules de rayon 3 pour qu'elles soient vraies dans le complexe simplicial. Le résultat suivant est une autre illustration de ce caractère local.

1.6 Lemme. *Soit $\overline{X}$ un complexe simplicial connexe et Γ un groupe d'automorphismes de $\overline{X}$. Soit δ la distance de translation de Γ sur $\overline{X}$, i.e. le minimum des distances combinatoires dans $\overline{X}$ entre un sommet s et son translaté γs (avec $\gamma \neq 1$). Notons X le quotient $\Gamma \backslash \overline{X}$.*

i) Si $\delta > 2$ alors X est un complexe simplicial.

ii) Si $\delta > 3$ alors $\overline{X}$ a $(D) \iff X$ a (D).

iii) Si $\delta > 4$ alors $\overline{X}$ est $(ICV_0) \iff X$ est (ICV_0).

iv) Si $\delta > 5$ alors $\overline{X}$ est $(ICV) \iff X$ est (ICV).

v) Si $\delta > 6$ alors $\overline{X}$ est $(ICV_{-1}) \iff X$ est (ICV_{-1}).

Démonstration

Montrons le point i). Si $\delta > 1$ alors Γ agit sans inversion, au sens où $(\gamma\sigma = \sigma, \gamma \in \Gamma) \Rightarrow \gamma_{|\sigma} = \mathrm{id}_{|\sigma}$. Dans ce cas X est un "multicomplexe simplicial", dont l'ensemble de sommets est le quotient $S_X = \Gamma\backslash S_{\overline{X}}$, avec comme simplexes les parties $\sigma = \pi(\overline{\sigma})$ (en notant $\pi : S_{\overline{X}} \to S_X$ la surjection canonique). Comme il n'y a pas d'inversion $\dim \sigma = \dim \overline{\sigma}$. Il est clair que X est stable par passage aux sous-parties non vides.

Pour $\overline{\sigma}, \overline{\tau} \in \overline{X}$ tels que $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, on peut quitte à translater $\overline{\sigma}$ écrire $\overline{\sigma} = \{\overline{x}_0, \overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_i, \cdots, \overline{x}_k\}$ et $\overline{\tau} = \{\overline{y}_0, \overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_i, \cdots, \overline{y}_\ell\}$, avec $\overline{x}_0 = \overline{y}_0$ et $\Gamma\overline{x}_j = \Gamma\overline{y}_j \iff j \in \{0, 1, \cdots, i\}$. La condition $\delta > 2$ entraîne alors $\overline{x}_j = \overline{y}_j$ pour tout $j \in \{0, 1, \cdots, i\}$. Donc $\sigma \cap \tau$ est bien un simplexe de X. Ainsi X est un complexe simplicial.

De plus $\pi : S_{\overline{X}} \to S_X$ est un isomorphisme local (la surjectivité locale est automatique, l'injectivité locale vient de $\delta > 2$).

Montrons le point ii). L'image par π d'un sous-graphe complet $\overline{K}$ est un sous-graphe complet K. Donc si X est de drapeaux K est le 1-squelette d'un simplexe σ. Comme π est un isomorphisme local, $\overline{K}$ engendre un simplexe (préimage de σ). On a donc toujours : X de drapeaux $\Rightarrow \overline{X}$ de drapeaux.

Supposons réciproquement $\overline{X}$ de drapeaux. Soit K un sous-graphe complet de X, p un sommet de K et $a_1, \cdots, a_k$ les arêtes de K contenant p. Soit alors $\overline{p}$ un sommet de $\pi^{-1}(p)$ et $\overline{a_1}, \cdots, \overline{a_k}$ les arêtes de $\pi^{-1}(K)$ issues de $\overline{p}$. Supposons que les extrémités $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ de $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ différentes de $\overline{p}$ ne soient pas liées. Soit alors $\overline{p}'_2$ le voisin de $\overline{p}_1$ tel que $\pi(\overline{p}'_2) = p_2$. On a $\overline{p}'_2 \neq \overline{p}_2$ et $(\overline{p}'_2, \overline{p}_1, \overline{p}, \overline{p}_2)$ est un chemin donc $0 \leq \delta \leq d(\overline{p}'_2, \overline{p}_2) \leq 3$.

Donc lorsque $\delta > 3$ la réunion $\cup_{i=1}^{i=k} \overline{a}_i$ engendre un sous-graphe complet $\overline{K}$ de $\overline{X}$. Comme $\overline{X}$ est de drapeaux, $\overline{K}$ engendre un simplexe $\overline{\sigma}$ et donc K engendre le simplexe $\pi(\overline{\sigma})$. Ainsi X est de drapeaux.

Supposons maintenant que $(p_1, \cdots, p_m)$ soit un m-cycle de X. Soit $c = (p_1, \cdots, p_m, p_1)$ le chemin correspondant. Soit $\overline{c} = (\overline{p}_1, \cdots, \overline{p}_m, \overline{p}'_1)$ un relevé de c à $\overline{X}$. Si $\overline{p}'_1 \neq \overline{p}_1$ alors $\delta \leq m$. Donc si on suppose $\delta > n$, le relevé de tout m-cycle (avec $m \leq n$) est un m-cycle. On en déduit que si $\delta > n$ et si $\overline{X}$ est sans n-cycle alors X est sans n-cycle.

Réciproquement si $\delta \geq n$ et si X est sans n-cycle alors $\overline{X}$ est sans n-cycle. Car un n-cycle de $\overline{X}$ se projette sur un n-cycle de X, dans lequel on doit avoir une corde, cette corde fait apparaître un m-cycle avec $m < n$, et le relevé de ce m-cycle étant un m-cycle, on obtient une corde dans le cycle de départ.

Finalement si $\delta > n$ alors X est sans n-cycle $\iff$ X est sans n-cycle. On conclut la preuve du lemme en utilisant les lemmes 1.4, 1.5 et le résultat préliminaire sur la propriété (D).

□

1.7 Lemme. *Supposons qu'un complexe simplicial X ait la propriété (D) (resp. (ICV_0), resp. (ICV), resp. (ICV_{-1})). Alors tout sous-complexe plein K a aussi la propriété (D) (resp. (ICV_0), resp. (ICV), resp. (ICV_{-1})).*

Démonstration

Soit Y un sous-complexe plein et K un sous-graphe complet de Y. si X est de drapeaux, K engendre un simplexe σ de X. Comme Y est plein, on a en fait $\sigma \in Y$. Donc si X a (D) alors Y a (D).

Soit c un n-cycle de Y. Si X est sans n-cycle, alors c a une corde dans X. Comme Y est plein cette corde est dans Y. Donc si X est sans n-cycle, alors Y est sans n-cycle. On conclut avec les lemmes 1.4, 1.5 et le résultat préliminaire sur la propriété (D).

□

1.8 Lemme. *Soit X un complexe simplicial ayant (ICV) (resp. (ICV_{-1})) et soit σ un simplexe de X. Si s (resp. τ) est un sommet (resp. un simplexe) de X dont le voisinage ne touche pas σ, alors l'intersection $V(\sigma, X) \cap V(s, X)$ (resp. $V(\sigma, X) \cap V(\tau, X)$) est vide ou un simplexe.*

Démonstration

Soit T l'ensemble des sommets de l'intersection des voisinages, supposé non vide. Puisque X a (ICV) les voisinages de simplexes sont pleins et il suffit de montrer que T engendre un simplexe de X. Comme X est de drapeaux, il suffit de montrer que T engendre un graphe complet.

Soient donc deux sommets u, v distincts de T. Il existe alors un sommet t ou une arête b de σ tels que $\{u, v\} \subset V(t, X)$ ou $\{u, v\} \subset V(b, X)$.

Lorsque X est (ICV) et s est un sommet non dans $V(\sigma, X)$, on a donc $\{u, v\} \subset V(t, X) \cap V(s, X)$ ou $\{u, v\} \subset V(b, X) \cap V(s, X)$, dans les deux cas des simplexes. Donc u et v sont liés.

Lorsque X est (ICV_{-1}) et τ est un simplexe ne touchant pas $V(\sigma, X)$, il existe un sommet s ou une arête a de τ tels que $\{u, v\} \subset V(s, X)$ ou $\{u, v\} \subset V(a, X)$. Dans tous les cas, les intersections $V(t, X) \cap V(s, X)$, $V(t, X) \cap V(a, X)$, $V(b, X) \cap V(s, X)$ ou $V(b, X) \cap V(a, X)$ sont des simplexes contenant $\{u, v\}$, qui sont donc liés.

$\square$

Dans la suite de cette section nous allons donner des critères locaux pour avoir la convexité des intersections de voisinage.

1.9 Définition. *Soit X un complexe simplicial. Soit σ, τ deux simplexes de dimensions n, m. Nous dirons que X est (ICV_0) en σ, τ si $n = m = 0$ et : ou bien $\sigma = \tau$, ou bien σ et τ sont liés par une arête a et $V(\sigma, X) \cap V(\tau, X) = St(a, X)$, ou bien encore $d(\sigma, \tau) > 1$ et $V(\sigma, X) \cap V(\tau, X)$ est vide ou un simplexe. Nous dirons que X est (ICV) (resp. (ICV_{-1})) en σ, τ si $n = 0, m = 1$ (resp. $n = 1, m = 1$) et ou bien $\sigma \cap V(\tau, Y) \neq \emptyset$ ou bien $\sigma \cap V(\tau, Y) = \emptyset$ et alors $V(\sigma, X) \cap V(\tau, X)$ est vide ou un simplexe.*

Avec cette définition, il est clair qu'un complexe est (ICV_0) s'il l'est en s, t pour s, t deux sommets quelconques (idem avec (ICV) et (ICV_{-1})).

1.10 Lemme de recouvrement. *Soit X un complexe simplicial. Soit σ, τ deux simplexes de dimension $n = 0, m = 0$ (resp. $n = 0, m = 1$, $n = 1, m = 1$). Supposons qu'il existe un sous-complexe plein K contenant $\sigma \cup \tau \cup (V(\sigma, X) \cap V(\tau, X)$, et que K ait (ICV_0) (resp. (ICV), (ICV_{-1})). Alors X est (ICV_0) (resp. (ICV), (ICV_{-1})) en σ, τ.*

Démonstration

D'abord $V(\sigma, X) \cap V(\tau, X) = V(\sigma, K) \cap V(\tau, K)$. En effet $V(\sigma, X) \cap V(\tau, X) = V(\sigma, X) \cap V(\tau, X) \cap K = (V(\sigma, X) \cap K) \cap (V(\tau, X) \cap K)$. Or comme K est plein et contient σ, τ on a $V(\sigma, X) \cap K = V(\sigma, K)$ et $V(\tau, X) \cap K = V(\tau, K)$ (voir la remarque initiale 1.1.1).

Alors les intersections à étudier ont la forme voulue parce qu'on a mis sur K l'hypothèse correspondante.

$\square$

1.11 Lemme du voisinage. *Soit Y un complexe simplicial, X un sous-complexe plein tel que $Y = V(X, Y)$. On note ∂Y le sous-complexe de Y engendré par les sommets non dans*

X. Si ρ est un simplexe de ∂Y on suppose que l'ensemble des sommets joignables à chaque sommet de ρ engendre un simplexe σ_ρ de X joignable à ρ. Enfin on suppose que tous les voisinages de sommet $V(s,Y)$, avec $s \in X$, sont pleins dans Y.

Si X et les $V(s,X)$ sont (ICV_0) (resp. (ICV), (ICV_{-1})) alors Y l'est aussi.

Démonstration

Notons d'abord que sous les hypothèses un sommet de Y non dans X est dans ∂Y. D'autre part on voit que $\sigma_\rho = \cap_{s\in\rho}\sigma_s$ (intersection sur l'ensemble des sommets de ρ).

a) Supposons que X et les $V(s,X)$ sont (ICV_0), et montrons que Y est (ICV_0) en s,t pour s,t deux sommets quelconques (tels que $s \neq t$ et $V(s,Y)\cap V(t,Y) \neq \emptyset$).

- Supposons s lié à t, avec s (ou t) dans X. Alors le lemme de recouvrement 1.10 s'applique à $V(s,Y)$ (ou $V(t,Y)$) en s,t.

- Supposons s dans X et $t \in \partial Y$ avec t non lié à s. Alors $\rho = V(s,Y)\cap V(t,Y)\cap X$ est un simplexe de X. En effet $V(s,Y)\cap V(t,Y)\cap X = V(s,Y)\cap\sigma_t$, vide ou un simplexe comme intersection d'un sous-complexe plein et d'un simplexe. Or $V(s,Y)\cap V(t,Y)$ est non vide. Et si τ est un simplexe de $V(s,Y)\cap V(t,Y)\cap\partial Y$, alors tout sommet de $\sigma_{\{t,\tau\}}$ est dans ρ, car lié à t et lié dans σ_τ à s. Dans tous les cas de figure $\rho \neq \emptyset$.

Montrons que $V(s,Y)\cap V(t,Y) \subset \mathrm{St}(\rho,Y)$. Soit τ un simplexe de $V(s,Y)\cap V(t,Y)\cap\partial Y$. Comme nous l'avons vu ci-dessus il existe un sommet $x \in \rho$ lié à t et τ. Comme $V(x,Y)$ a (ICV_0), l'intersection $V(s,V(x,Y))\cap V(t,V(x,Y))$ est un simplexe, dans lequel τ est joignable à ρ.

Maintenant fixons un sommet x quelconque de ρ. Alors $V(s,Y)\cap V(t,Y)\subset V(x,Y)$ et le lemme de recouvrement s'applique à $K = V(x,Y)$ en s,t.

- Si s et t sont dans ∂Y et liés par une arête a, alors $V(s,Y)\cap V(t,Y)\cap X$ est le simplexe σ_a. Soit τ un simplexe de $V(s,Y)\cap V(t,Y)\cap\partial Y$. Montrons d'abord que $\sigma_\tau\cap\sigma_a \neq \emptyset$.

Pour cela considérons des sommets $u \in \sigma_{\{s,\tau\}}, v \in \sigma_{\{t,\tau\}}, x \in \sigma_a$. Alors s,t,u,v sont dans $V(x,Y)$. Donc si $t \notin V(u,Y)$, alors par (ICV_0) dans $V(x,Y)$ l'intersection $V(t,V(x,Y))\cap V(u,V(x,Y))$ est un simplexe contenant s et v, donc $s \in V(v,Y)$. Il en résulte que $\sigma_{\{s,\tau\}}\cap\sigma_t \neq \emptyset$ ou $\sigma_{\{t,\tau\}}\cap\sigma_s \neq \emptyset$: finalement $\sigma_\tau\cap\sigma_a \neq \emptyset$.

Soit alors ρ un simplexe de $V(s,Y)\cap V(t,Y)$, montrons que ρ est joignable à a. C'est évident si $\rho \subset X$. Sinon soit τ la face de ρ opposée à $\rho\cap X$, puis soit y un sommet du simplexe $\sigma_\tau\cap\sigma_a$. On a $\{s,\rho\},\{t,\rho\} \in V(y,Y)$ (par plénitude), donc par (ICV_0) dans $V(y,Y)$ nous avons ρ joignable à $a = \{s,t\}$ (dans $V(y,Y)$).

- Supposons pour finir que s et t sont dans ∂Y, non liés dans Y.

Supposons d'abord que l'intersection $\sigma = \sigma_s\cap\sigma_t$ est non vide. Montrons qu'alors $V(s,Y)\cap V(t,Y) \subset \mathrm{St}(\sigma,Y)$.

Soit donc τ un simplexe de $V(s,Y)\cap V(t,Y)\cap\partial Y$. Soit x un sommet de $\sigma_{\{s,\tau\}}$. Si x est lié à t, alors τ et σ sont deux simplexes de $V(s,V(x,Y))\cap V(t,V(x,Y))$. Donc par (ICV_0) dans $V(x,Y)$ nous avons τ joignable à σ. Si x n'est pas lié à t, nous avons vu ci-dessus que $V(x,Y)\cap V(t,Y)$ est un simplexe, dans lequel on peut joindre τ à σ.

Soit maintenant x un quelconque sommet de σ : alors le lemme de recouvrement s'applique en s,t avec $K = V(x,Y)$.

Finalement reste à traiter le cas où $\sigma_s\cap\sigma_t$ est vide. Soit u un sommet lié à s et t (nécessairement $u \in \partial Y$).

Supposons que pour un autre sommet v de $V(s,Y)\cap V(t,Y)$ il existe un sommet x de X lié simultanément à s,u,v. Alors x n'est pas lié à t car $\sigma_s\cap\sigma_t=\emptyset$. Nous avons déjà montré que $V(x,Y)\cap V(t,Y)$ est un simplexe. Or ce simplexe contient $u,v,\sigma_{\{u,t\}},\sigma_{\{v,t\}}$. On en déduit que $\sigma_{\{u,t\}}$ est joignable à v, donc est contenu dans $\sigma_{\{v,t\}}$. Par symétrie on a en fait $\sigma_{\{u,t\}}=\sigma_{\{v,t\}}$. Nous pouvons alors recommencer dans l'autre sens le raisonnement à partir de n'importe quel sommet y de $\sigma_{\{u,t\}}=\sigma_{\{v,t\}}$: nous voyons que $\sigma_{\{u,s\}}=\sigma_{\{v,s\}}$. Evidemment on obtient aussi les égalités $\sigma_{\{u,t\}}=\sigma_{\{v,t\}},\sigma_{\{u,s\}}=\sigma_{\{v,s\}}$ si on part de l'hypothèse $\sigma_{\{u,t\}}\cap\sigma_{\{v,t\}}\neq\emptyset$.

Supposons alors par l'absurde que v est un autre sommet de $V(s,Y)\cap V(t,Y)$ tel que $\sigma_{\{u,s\}}\cap\sigma_{\{v,s\}}=\emptyset$. D'après ce qui précède nous devons avoir aussi $\sigma_{\{u,t\}}\cap\sigma_{\{v,t\}}=\emptyset$. Choisissons des sommets x,x',y,y' dans $\sigma_{\{u,s\}},\sigma_{\{v,s\}},\sigma_{\{u,t\}},\sigma_{\{v,t\}}$. Comme X est (ICV_0) ou bien x est lié à y', ou bien x' est lié à y. Supposons pour fixer les idées que $\{x,y'\}$ est une arête de X. Alors nous avons déjà vu que $V(x,Y)\cap V(t,Y)$ est un simplexe, donc u est lié à y', qui est donc un sommet de $\sigma_{\{u,t\}}\cap\sigma_{\{v,t\}}$, contradiction.

Ainsi le simplexe σ joint de $\sigma_{\{s,u\}}$ et de $\sigma_{\{t,u\}}$ est indépendant du sommet u de $V(s,Y)\cap V(t,Y)$. Il est alors immédiat que tout simplexe de $V(s,Y)\cap V(t,Y)$ est joignable à σ. D'autre part, pour $x\in\sigma_{\{s,u\}}$ et $y\in\sigma_{\{t,u\}}$, ou bien x (resp. y) est lié à t (resp. s), et alors le lemme de recouvrement s'applique en s,t à $K=V(x,Y)$ (resp. $K=V(y,Y)$), ou bien x n'est pas lié à t, y n'est pas lié à s, et alors $V(s,Y)\cap V(t,Y)=(V(s,Y)\cap V(y,Y))\cap(V(x,Y)\cap V(t,Y))$. Or on a déjà montré que les deux facteurs sont des simplexes, ce qui conclut.

b) Supposons maintenant que X et les $V(s,X)$ sont (ICV). D'après ce qui précède nous savons déjà que Y est (ICV_0). Montrons que Y est (ICV) en s,a pour s un sommet et $a=\{x,y\}$ une arête quelconques (tels que $s\notin V(a,Y)$ et $V(s,Y)\cap V(a,Y)\neq\emptyset$). Nous poserons $\tau(s,x)=V(s,Y)\cap V(x,Y)$ et $\tau(s,y)=V(s,Y)\cap V(y,Y)$. Au a) nous avons vu que ces intersections sont le vide ou un simplexe. Par hypothèse $V(s,Y)\cap V(a,Y)=\tau(s,x)\cup\tau(s,y)$ est non vide, donc l'une des deux intersections au moins est non vide. Nous nous servirons librement de ces faits.

- Si s et a sont dans X alors nécessairement $V(s,Y)\cap V(a,Y)\subset X$. Sinon soit u un sommet de $V(s,Y)\cap V(a,Y)\cap\partial Y$: alors u est lié à s et à un sommet de a, donc s et ce sommet sont liés dans σ_u, absurde. Nous pouvons alors appliquer le lemme de recouvrement en s,a avec $K=X$.

- Supposons $s\in\partial Y, a\in X$. Alors $\sigma=V(s,Y)\cap V(a,Y)\cap X$ est un simplexe.

En effet $V(s,Y)\cap X=\sigma_s$, et comme X est plein on a $V(a,Y)\cap X=V(a,X)$, qui est plein dans X (puisque X est (ICV_0)) donc est aussi plein dans Y. Donc σ est vide ou un simplexe. Mais $\sigma=(\tau(s,x)\cap X)\cup(\tau(s,y)\cap X)$, et au a) nous avons vu que $\tau(s,x)\cap X,\tau(s,y)\cap X$ sont non vides dès que $\tau(s,x)$ ou $\tau(s,y)$ sont non vides. Donc σ est non vide et c'est bien un simplexe.

En particulier $\tau(s,x)\cap X$ et $\tau(s,y)\cap X$ sont comparables. Supposons les notations telles que $\tau(s,x)\cap X$ est un simplexe et $\tau(s,y)\cap X\subset\tau(s,x)\cap X$. Alors le lemme de recouvrement s'applique en s,a avec $K=V(z,Y)$ pour z sommet de σ (quelconque si $\tau(s,y)=\emptyset$, pris dans $\tau(s,y)$ sinon).

- Supposons $s,x\in X$ et $y\in\partial Y$.

Si $\tau(s,y)=\emptyset$ il n'y a rien à démontrer.

Sinon, d'après a), $\tau(s,y)$ est un simplexe rencontrant X : soit z un sommet de $\tau(s,y)\cap X$. Notons que z est lié à a dans le simplexe σ_y. Alors le lemme de recouvrement s'applique en s,a avec $K=V(z,Y)$.

- Supposons $x,y\in\partial Y$.

Si $\tau(s,x)=\emptyset$ ou $\tau(s,y)=\emptyset$ il n'y a rien à démontrer.

Sinon, d'après a), $\tau(s,x)$ et $\tau(s,y)$ sont deux simplexes rencontrant X. Montrons que $\tau(s,x)\cap\tau(s,y)\cap X$ est non vide.

Soit z un sommet de $\tau(s,x)\cap X$. Si z est lié à y il n'y a rien à démontrer. Sinon soit w un sommet de $\tau(s,y)\cap X$.

Le sommet $z\in X$ n'est pas lié à y : s'il n'était pas lié à w, par le cas précédent, l'intersection $V(z,Y)\cap V(\{w,y\},Y)$ serait un simplexe, dans lequel s et x serait liés, absurde. Donc z est lié à w. Alors par (ICV_0) l'intersection $V(z,y)\cap V(y,Y)$ est un simplexe dans lequel w est lié à x. Ainsi on a w lié à s,y et x, donc dans ce cas aussi $\tau(s,x)\cap\tau(s,y)\cap X$ est non vide.

Soit alors u un sommet quelconque de $\tau(s,x)\cap\tau(s,y)\cap X$. Le lemme de recouvrement s'applique en s,a avec $K=V(u,Y)$.

c) Supposons maintenant que X et les $V(s,X)$ sont (ICV_{-1}). D'après ce qui précède nous savons déjà que Y est (ICV). Montrons que Y est (ICV_{-1}) en a,b pour $a=\{x,y\},b=\{s,t\}$ des arêtes quelconques (tels que $b\cap V(a,Y)=\emptyset$ et $V(a,Y)\cap V(b,Y)\neq\emptyset$). Nous poserons $\tau(s,a)=V(s,Y)\cap V(a,Y)$ et $\tau(t,a)=V(t,Y)\cap V(a,Y)$. Au b) nous avons vu que ces intersections sont le vide ou un simplexe. Par hypothèse $V(a,Y)\cap V(b,Y)=\tau(s,a)\cup\tau(t,a)$ est non vide, donc l'une des deux intersections au moins est non vide.

- Supposons d'abord $a,b\subset X$. Nous avons vu au b) qu'alors $\tau(s,a),\tau(t,a)\subset X$. Donc le lemme de recouvrement s'applique en a,b avec $K=X$.

- Supposons $s\in X$ et $t\in\partial Y$. Nous avons vu au b) que $\tau(t,a)$ est un simplexe rencontrant X : soit u l'un de ses sommets. Alors u est lié à s dans σ_t, donc $u\in\tau(s,a)$.

Comme nous l'avons vu au b), chacun des deux simplexes $\tau(s,a),\tau(t,a)$ est joignable à l'une des extrémités de a. Supposons les notations telles que $\tau(t,a)=V(t,Y)\cap V(x,Y)$.

Si $\tau(s,a)=V(s,Y)\cap V(x,Y)$, alors $V(a,Y)\cap V(b,Y)=V(b,Y)\cap V(x,Y)$, un simplexe par (ICV).

Sinon $\tau(s,a)=V(s,Y)\cap V(y,Y)$, donc u est joignable à y. Alors le lemme de recouvrement s'applique en a,b avec $K=V(u,Y)$.

- Si $\tau(s,a)$ ou $\tau(t,a)$ sont vides il n'y a rien à démontrer. Sinon nous avons vu au a) et au b) que les simplexes $\tau(s,a)$ et $\tau(t,a)$ rencontrent X. Montrons que $\tau(s,a)\cap\tau(t,a)\cap X\neq\emptyset$.

Soit z un sommet de $\tau(s,a)\cap X$. Si z est lié à t, alors $z\in\tau(s,a)\cap\tau(t,a)\cap X$. Sinon supposons les notations telles que x est lié à z. Soit w un sommet de $\tau(t,a)\cap X$.

Nécessairement w est lié à s, donc $\tau(s,a)\cap\tau(t,a)\cap X\neq\emptyset$. Cela vient de (ICV_0) si w est lié à z (t et z sont supposés non liés, on considère le simplexe $V(t,Y)\cap V(z,Y)$), et de (ICV) si w lié à x (t n'est lié ni à z ni à x, on considère le simplexe $V(t,Y)\cap V(z,Y)$). Noter que w doit être lié à z ou x, sinon l'intersection $V(\{z,x\},Y)\cap V(\{w,t\},Y)$ est d'un type déjà étudié (si $x,t\in X$ on est dans le premier cas particulier, sinon on est dans le second). Donc cette intersection est un simplexe, dans lequel s est lié à y, contradiction.

Soit u un sommet de $\tau(s,a)\cap\tau(t,a)\cap X$.

Supposons les notations telles que u et x sont liés. Si y n'est pas lié à u alors c'est à x que les simplexes $\tau(s,a)$ et $\tau(t,a)$ sont joignables. Dans ce cas $\tau(s,a)=V(s,Y)\cap V(x,Y)$

et $\tau(t,a) = V(t,Y) \cap V(x,Y)$: donc $V(b,Y) \cap V(a,Y) = V(b,Y) \cap V(x,Y)$, un simplexe d'après (ICV).

Si y est lié à u, alors le lemme de recouvrement s'applique en a, b avec $K = V(u,Y)$.

$\square$

Remarque. Nous verrons à la section suivante qu'on a la même conclusion sans l'hypothèse de plénitude des voisinages de sommets $V(s,Y)$ pour $s \in X$.

1.12 Définition. *Un complexe a* localement (ICV_0) *(resp.* localement (ICV), *resp.* localement (ICV_{-1})*) si les étoiles de tous les sommets de X ont la propriété* (ICV_0) *(resp.* (ICV), *resp.* (ICV_{-1})*).*

Si X est (ICV_0) (resp. (ICV), resp. (ICV_{-1})), alors il l'est localement. En effet d'après le lemme 1.4 les voisinages de sommet de X sont pleins, et d'après le lemme 1.7 les sous-complexes pleins sont (ICV_0) (resp. (ICV), resp. (ICV_{-1})). Nous montrerons à la section suivante que la réciproque est vraie si on suppose X simplement connexe (cf. théorème 2.7.5).

1.13 Lemme. *Un voisinage de sommet* (V,s) *a* (D) *(resp.* (ICV_0), (ICV), (ICV_{-1})*) si et seulement si* ∂V *a* (D) *(resp.* (ICV_0), (ICV), (ICV_{-1})*).*

Démonstration

Le sens $\Rightarrow$ vient du lemme 1.7 et de ce que ∂V est un sous-complexe plein.

Réciproquement supposons ∂V de drapeaux, alors V est de drapeaux. En effet soit K un sous-graphe complet de V. Si $s \notin S_K$ alors $K \subset \partial V$, donc K engendre un simplexe de ∂V. Sinon il existe un sous-graphe complet L de ∂V tel que $S_K = \{v\} \sqcup S_L$. Soit τ le simplexe de ∂V engendré par L. Comme (V,s) est un voisinage de sommet τ est contenu dans un simplexe σ tel que $s \in \sigma$. D'où K engendre bien un simplexe de V.

D'autre part tout n-cycle de V passant par s admet une corde. Donc si ∂V est sans n-cycle alors V aussi est sans n-cycle. On conclut comme d'habitude avec 1.4 et 1.5 .

$\square$

Ainsi le cône sur un complexe (ICV) est encore (ICV) : à l'aide de complexes de groupes (ICV) ceci permet de construire par récurrence des complexes (ICV) de dimension "homologique" arbitrairement grande, ce que nous ferons dans la deuxième partie de ce travail.

1.14 Exemples, questions.

1) La première subdivision barycentrique d'un complexe simplicial quelconque est toujours de drapeaux. Mais elle n'est presque jamais (ICV_0). En effet, si deux triangles sont adjacents par une arête dans le complexe de départ, alors l'intersection de l'étoile des centres des triangles n'est pas un simplexe dans la première subdivision barycentrique. Le but initial de ce travail était de construire des complexes (ICV_0) de toute dimension. En dimension deux il y a abondance de complexes ayant des intersections de voisinages convexes, comme le montre la suite.

2) Considérons un complexe polygonal dont tous les polygones ont au moins cinq (resp : six) côtés. Nous pouvons alors considérer le complexe triangulaire obtenu en rajoutant un sommet au centre de chaque face polygonale, les triangles ayant pour sommet les centres de faces et les extrémités d'une arête de la même face. Il est immédiat que les links des

anciens sommets subissent une subdivision barycentrique, donc deviennent des graphes de maille ≥ 6, i.e. des complexes de dimension 1 et (ICV). D'autre part les links des centres de faces sont des cercles de longueur $k \geq 5$ (resp. ≥ 6). Donc le complexe triangulaire obtenu est localement (ICV_0) (resp. (ICV)). En imposant au moins sept côtés dans chaque polygone et une maille ≥ 4 au link de chaque sommet, la subdivision triangulaire est même localement (ICV_{-1}). Il y a de nombreuses variations sur ce thème, par exemple concernant certains complexes carrés.

3) Une triangulation d'une sphère de dimension deux ne peut jamais être (ICV). En effet la caractéristique d'Euler d'une surface triangulée dont les sommets sont de degré ≥ 6 est toujours ≤ 0. En revanche on peut fabriquer beaucoup de triangulations de $\mathbb{S}^2$ qui sont (ICV_0) (la plus petite d'entre elle étant l'icosaèdre).

On déduit de ce qui précède qu'une triangulation d'une variété de dimension n, avec $n \geq 3$, n'est jamais (ICV) (considérer le link d'un simplexe de codimension 3).

D'après un argument de Vinberg [V], cité dans [J-S], dans toute sphère de dimension ≥ 4, il existe un simplexe de codimension 2 dont le link est un cycle de longueur 3 ou 4. Donc aucune triangulation d'une telle sphère n'est (ICV_0), et aucune variété de dimension ≥ 5 n'admet de triangulation (ICV_0).

Questions : quelles variétés de dimension 3 ou 4 admettent une triangulation (ICV_0) ? plus généralement quels complexes simpliciaux admettent des triangulations "équivalentes" et (ICV_0) ? comment supprimer les carrés d'un complexe de drapeaux de dimension 2 ?

4) Les exemples (ICV) (resp. (ICV_{-1}) de dimension 2 sont géométrisables : le complexe simplicial Riemannien obtenu en rendant chaque triangle isométrique à un même triangle euclidien équilatéral (resp. hyperbolique régulier d'angle $\frac{2\pi}{7}$) est à courbure ≤ 0 (resp. ≤ -1).

Soit X un complexe simplicial compact, connexe, localement (ICV). Considérons sur (la réalisation géométrique de) X la distance de longueur naturelle, i.e. celle rendant chaque simplexe euclidien, équilatéral et d'arête 1. Pour chaque simplexe σ de X, notons δ_σ le sup des entiers d tels que toute lacet combinatoire de $\mathrm{Lk}(\sigma, X)$ de longueur $\leq d$ est homotope à 0 dans $\mathrm{Lk}(\sigma, X)$. Il est vraissemblable que si $\delta = \inf_\sigma \delta_\sigma$ est assez grand, alors la distance de longueur naturelle est à courbure ≤ 0.

Cependant nous allons voir que tous les complexes simpliciaux (ICV) de dimension > 2 ne sont pas géométrisables.

Considérons le pavage du plan euclidien $\mathbb{E}^2$ par triangles équilatéraux. Fixons un triangle τ de ce pavage. Considérons les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ liant un sommet de τ au milieu du côté opposé ; leur somme est nulle. Soit Λ le sous-groupe d'isométries de $\mathbb{E}^2$ engendré par les translations de vecteurs $6\vec{u}, 6\vec{v}, 6\vec{w}$. Alors Λ conserve le pavage équilatéral. De plus Λ est distingué dans le groupe d'automorphismes de ce pavage. Le tore quotient $T = \mathbb{E}^2/\Lambda$ est alors muni d'une structure simpliciale dont le groupe d'automorphismes est simplement transitif sur les triangles ordonnés.

La distance de translation combinatoire de Λ agissant sur le pavage est 6.

Donc T est (ICV).

Nous montrerons dans la deuxième partie de ce travail qu'il existe un et un seul complexe simplicial X de dimension 3 connexe, simplement connexe, dont le link en tout point est isomorphe à T, et que ce complexe a un groupe d'automorphismes simplement transitif sur les 3-simplexes ordonnés. Le complexe X est localement (ICV) et simplement connexe, donc d'après le théorème 2.7.5 ci-dessous :

X est (ICV).

Pourtant :

X n'admet pas de structure métrique $CAT(0)$ invariante par $Aut(X)$ telle que tout simplexe est à courbure constante.

En effet une telle métrique sur X donnerait des links de sommets isométriques à une copie de T dans laquelle chaque triangle est sphérique régulier d'arête $\frac{\pi}{3}$. Dans un tel triangle sphérique la fonction distance d'un point sur un côté au sommet opposé à ce côté est convexe, en particulier la distance d d'un sommet au milieu du côté opposé est $< \frac{\pi}{3}$ (un calcul élémentaire dans le tétraèdre régulier donne la valeur exacte : $\frac{1}{2}(\pi - \arccos \frac{1}{3})$). Alors l'image dans T d'une droite de $\mathbb{E}^2$ portée par une hauteur d'un triangle du pavage est une géodésique locale de T non homotope à 0 et de longueur $6d < 2\pi$. Donc les links de X ne sont pas $CAT(1)$, contradiction.

Pour construire X, nous utiliserons un simplexe de groupes, dont nous montrerons qu'il est développable - bien que d'après ce qui précède il ne soit pas à courbure négative ou nulle. Nous aurons donc besoin de savoir développer des simplexes de groupes (ICV) indépendamment du théorème de Haefliger [B-H] : c'est le résultat principal de la deuxième partie, dont nous tirerons toutes nos exemples de groupes hyperboliques de dimension cohomologique virtuelle arbitrairement grande.

2. Extensions convexes de complexes à bord.

Sous l'hypothèse qu'un complexe simplicial a (ICV), nous allons montrer qu'on peut décrire simplement une boule du revêtement universel, en fonction de la boule concentrique de rayon un de moins, et des voisinages de sommets du bord. Nous étudions en fait une situation un peu plus générale.

2.1 Définition (complexes à bord, complexes saillants).

Soit X un complexe simplicial.

Un bord *de X est le vide ou un sous-complexe plein de X. Un* complexe à bord *est une paire $(X, D(X))$, où X est un complexe simplicial et $D(X)$ est un bord de X. On note alors Int(X) l'union des simplexes de X ne touchant pas $D(X)$; Int(X) est le vide ou un sous-complexe plein de X appelé* l'intérieur de X.

Nous dirons que le complexe à bord est saillant *si on suppose que pour tout $s \in D(X)$ l'intersection $V(s,X) \cap$Int(X) est un simplexe σ_s, avec $V(s,X) = V(\sigma_s, V(s,X))$ (en particulier Int(X) est non vide).*

2.1.1 Exemples.
1) Pour tout sous-complexe Y de Z, la paire $(V(Y,Z), \partial V(Y,Z))$ est un complexe à bord, d'intérieur le sous-complexe engendré par S_Y.

Les complexes à bord $(V(s,Z), \partial V(s,Z)) = (\mathrm{St}(s,Z), \mathrm{Lk}(s,Z))$ sont toujours saillants (si $\{s,t\}$ est une arête alors $V(s, V(t,X)) = V(t, V(s,X)) = \mathrm{St}(\{s,t\}, X)$).

2) Soit Z un complexe simplicial, X un sous-complexe de Z. Si $X = Z$ posons $D_Z(X) = \emptyset$, sinon soit $D_Z(X)$ le sous-complexe plein de X engendré par les $s \in S_X$ tels que $V(s,Z) \not\subset X$. Dans ce cas Int(X) (noté Int$_Z(X)$ si des confusions sont possibles) est le sous-complexe de X engendré par les sommets de X topologiquement intérieurs.

Attention, $D_Z(X)$ coïncide avec la frontière topologique $\mathrm{Fr}_Z(X)$ de X si et seulement si $\mathrm{Fr}_Z(X)$ est un sous-complexe plein de X (ce qui n'est pas toujours le cas : prendre pour X un simplexe maximal de Z).

3) L'inclusion $D_Z(V(Y,Z)) \subset \partial V(Y,Z)$ est immédiate, mais on n'a pas toujours égalité : par exemple, pour un sommet s, il peut y avoir dans $\mathrm{Lk}(s,Z)$ un sommet intérieur à $V(s,Z)$.

2.1.2 Définition. *Soit Z un complexe simplicial, X un sous-complexe et $D(X)$ un bord sur X. Nous dirons que $(X, D(X))$ est un* sous-complexe à bord *(resp. un* sous-complexe à bord saillant*) lorsque $D_Z(X) \subset D(X)$ (resp. lorsque X est un sous-complexe à bord et $(X, D(X))$ est saillant). Pour abréger, nous dirons que X est un sous-complexe à bord (resp. un sous-complexe saillant) si $(X, D_Z(X))$ l'est.*

Par exemple si Z est un pavage du plan hyperbolique par des triangles d'angles au sommet $\geq \frac{\pi}{7}$, les sous-complexes saillants de Z sont les unions X de triangles telles que tout sommet du bord de X est contenu dans deux ou trois triangles consécutivement adjacents. Par exemple les voisinages de sommets, d'arêtes ou de triangles sont saillants.

2.1.3 Lemme. *Soit Z un complexe simplicial et Y un sous-complexe de Z tel que Z est de drapeaux au voisinage de Y, i.e. tout sous-graphe complet de Z rencontrant Y engendre un simplexe de Z. Supposons que Y est un simplexe, ou plus généralement que S_Y est convexe dans Z. Alors $(V(Y,Z), \partial V(Y,Z))$ est saillant.*

Démonstration

Soit s un sommet de $\partial V(Y,Z)$. Le lecteur vérifiera sans aucune hypothèse sur Y ou Z que l'intersection $V(s,V(Y,Z)) \cap \overline{Y}$ est un sous-complexe Σ tel que $V(s,V(Y,Z)) = V(\Sigma, V(s,V(Y,Z)))$ (en notant $\overline{Y}$ le sous-complexe engendré par S_Y ; attention, $V(Y,Z)$ n'est pas le sous-complexe engendré par l'ensemble des sommets à distance ≤ 1 de S_Y). Alors $(V(Y,Z), \partial V(Y,Z))$ est saillant lorsque Σ est un simplexe quel que soit s.

Supposons donc S_Y convexe et Z de drapeaux au voisinage de Y. Alors pour que Σ soit un simplexe il suffit que deux sommets t,u de $V(s,V(Y,Z)) \cap Y$ soient toujours égaux ou liés dans Z. Or pour deux tels sommets (t,s,u) est un chemin entre deux sommets de Y, dont le sommet intermédiaire s n'est pas dans Y. Par convexité de S_Y ce chemin n'est pas une géodésique, donc $d(t,u) \leq 1$, ce qui conclut.

$\square$

Par exemple pour tout simplexe σ d'un complexe de drapeaux Z, le complexe à bord $(V(\sigma,Z), \partial V(\sigma,Z))$ est saillant (l'hypothèse "Z de drapeaux" est indispensable : prendre pour Z le bord d'un triangle).

2.2 Définition (données d'extension). *Soit $(X,D(X))$ un complexe à bord.*

Soit pour tout sommet s de $D(X)$ un voisinage de sommet (V_s,s) (donc V_s est un complexe contenant s tel que $V_s = V(s,V_s)$) et un plongement simplicial f_s de la paire $(St(s,X),s)$ dans (V_s,s). Dans la suite, nous noterons $V_{s,X}$ le sous-complexe $f_s(St(s,X))$ de V_s.

Soit pour toute arête orientée $\vec{a}$ de $D(X)$ d'origine s et d'extrémité t un isomorphisme $f_{\vec{a}}$ de $St(f_s(a),V_s)$ (noté $V_{s,a}$ dans la suite) sur $St(f_t(a),V_t)$.

D'une part on suppose que $f_{\vec{a}} \circ f_s = f_t$ sur $St(a,X)$.

*D'autre part, on demande que $f_{\vec{a}} \circ f_{\overline{\vec{a}}}$=id, et si τ est un simplexe de dimension 2 de $D(X)$ de sommets s,t,u, et si on note $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ les arêtes orientées $(s,t),(t,u),(u,s)$, alors $f_{\vec{c}} \circ f_{\vec{b}} \circ f_{\vec{a}}$ vaut l'identité sur $St(f_s(\tau),V_s)$ (*condition de cocycle*).*

L'ensemble des voisinages de sommets (V_s,s) et des morphismes $f_s, f_{\vec{a}}$ forment des données d'extension *de $(X,D(X))$. Nous dirons que ces données d'extension sont* saillantes *si $(X,D(X))$ est saillant et que pour tout $s \in D(X)$, on a $V_{s,X} = V(\sigma'_s, V_s)$, où l'on a posé $\sigma'_s = f_s(\sigma_s)$. Nous dirons que les données d'extension ont la propriété (ICV) (resp. (ICV_{-1})) si X et les V_s ont tous la propriété (ICV) (resp. (ICV_{-1})).*

2.2.1 Exemple : données d'extension associées à un sous-complexe.

Soit Z un complexe simplicial, X un sous-complexe de Z. Soit $D(X)$ un bord sur X. Pour tout $s \in D(X)$ on pose $V_s = V(s,Z)$ et on note f_s l'inclusion canonique de $V(s,X)$ dans $V(s,Z)$. Enfin pour toute arête orientée $\vec{a} = (s,t)$ de $D(X)$ on note $f_{\vec{a}}$ l'identité de $\mathrm{St}(a,Z) = \mathrm{St}(a,V_s)$ dans $\mathrm{St}(a,Z) = \mathrm{St}(a,V_t)$.

Les axiomes des données d'extension sont clairement remplis.

On obtient ainsi des données d'extension saillantes lorsque le complexe à bord $(X,D(X))$ est saillant, et $D_Z(X) \subset D(X)$, autrement dit $\mathrm{Int}(X)$ est contenu dans l'intérieur topologique de X. En effet la seconde condition assure que tout simplexe de Z touchant un simplexe σ_s (de $\mathrm{Int}(X)$) est un simplexe de X, ce qui donne la condition $V_{s,X} = V(\sigma'_s, V_s)$.

2.2.2 Remarque (plénitudes).

Supposons les données d'extension (ICV). Alors d'après le lemme 1.4 les sous-complexes $V_{s,X}$ sont pleins dans V_s, puisque V_s est (ICV) et que par hypothèse $V_{s,X}$ est le voisinage d'un simplexe. Si $a = \{s,t\}$ est une arête de $D(X)$, alors nous avons $V_{s,a} = \mathrm{St}(f_s(a),V_s)$

$= V(f_s(t), V_s)$ (car tout simplexe de V_s est joignable à s), donc $V_{s,a}$ est également plein dans V_s. De même, les sous-complexes $\mathrm{St}(s, X)$ sont pleins dans X.

On veut recoller des données d'extension de manière à obtenir un complexe simplicial Y qui contient X et les V_s, et en est la réunion. De plus on voudrait que Y reste (ICV) lorsque X est (ICV). Enfin on aimerait pouvoir recommencer une extension sur la paire $(Y, D(Y))$ telle que $\mathrm{Int}(Y) = X$.

2.3 Le complexe Y associé à des données d'extension saillantes (ICV)

Dans tout le reste de section 2. nous supposons que $(X, D(X))$ est un complexe à bord saillant muni de données d'extension saillantes et (ICV).

2.3.1 Sommets de Y.

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $S = S_X \sqcup (\sqcup_{s\in S_{D(X)}} S_{V_s})$ engendrée par les relations réflexives, symétriques suivantes $\sim_{\mathrm{rad}}$ (rad pour radiale) et $\sim_{\mathrm{tang}}$ (tang pour tangentielle) :

$p \sim_{\mathrm{rad}} q \iff p = q$ ou $(\exists s \in S_{D(X)} / p \in V(s, X), q \in V_s$ et $q = f_s(p))$ ou $(\exists s \in S_{D(X)} / q \in V(s, X), p \in V_s$ et $p = f_s(q))$;

$p \sim_{\mathrm{tang}} q \iff p = q$ ou $\exists$ une arête a de $D(X)$ d'extrémités s, t, telle que $p \in V_{s,a}, q \in V_{t,a}$ et $q = f_{(s,t)}(p)$.

Pour $x \in S$, nous noterons $\mathcal{O}(x)$ l'orbite de x sous $\sim$.

2.3.2 Définition de Y. *Posons $S_Y = S/\sim$; soit $\pi : S \to S_Y$ la surjection canonique. Un ensemble de sommets $T \subset S_Y$ est un simplexe de Y si et seulement si il existe σ un simplexe de X ou de l'un des V_s $(s \in S_{D(X)})$ tel que $T = \pi(S_\sigma)$. Nous noterons encore π le morphisme de l'union disjointe $X \sqcup (\sqcup_{s\in S_{D(X)}} V_s)$ sur Y qui se déduit de $\pi : S \to S_Y$.*

Lorsque $D(X) = \emptyset$ on a $Y = X$, et tout ce qui suit jusqu'à la section 2.5 incluse est trivial.

2.3.3 Lemme.

1) Soit $p \in S_X$. Alors $\mathcal{O}(p) \cap X = \{p\}$; pour $s \in S_{D(X)}$ contenu dans $St(p, X)$, on a $\mathcal{O}(p) \cap V_s = \{f_s(p)\}$, et pour $s \in S_{D(X)}$ non dans $St(p, X)$, on a $\mathcal{O}(p) \cap V_s = \emptyset$.

2) Soit $p \in V_s, p \notin V_{s,X}$. Alors $\mathcal{O}(p) \cap X = \emptyset$, $\mathcal{O}(p) \cap V_s = \{p\}$ et il existe un simplexe $\sigma_p \subset D(X)$ contenant s, tel que :

i) $p \in St(f_s(\sigma_p), V_s)$,

ii) pour tout $t \in S_{\sigma_p}, t \neq s$ on a $\mathcal{O}(p) \cap V_t = \{f_{(s,t)}(p)\}$ et enfin :

iii) pour tout $t \in S_{D(X)} \setminus S_{\sigma_p}$ on a $\mathcal{O}(p) \cap V_t = \emptyset$.

Pour $q \sim p$ il existe un certain $t \in \sigma_p$ tel que $q \in V_t, q \notin V_{t,X}$; de plus $\sigma_q = \sigma_p$.

Démonstration

1) Soit $p' \in S$ tel que $p' \sim p$. Donc il existe une chaîne de p à p', i.e. une suite $(p_0, p_1, \cdots, p_n)$ de S avec $p_0 = p$, $p_n = p'$ et pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $p_{i+1} \sim_{\mathrm{rad}} p_i$ ou $p_{i+1} \sim_{\mathrm{tang}} p_i$; choisissons une telle suite avec n minimal. En particulier les p_i sont deux à deux distincts.

Montrons qu'il n'apparaît aucune équivalence tangentielle. S'il y en a une soit i le plus petit indice tel que $p_{i+1} \sim_{\mathrm{tang}} p_i$; soit alors $s \in D(X)$ tel que $p_i \in V_s$. Comme $p_0 \in S_X$, on doit avoir $i > 0$ et comme $p_i \neq p_{i-1}$ on a $p_i \sim_{\mathrm{rad}} p_{i-1}$, avec $p_{i-1} \in \mathrm{St}(s, X)$ et $p_i = f_s(p_{i-1})$.

On a $p_{i+1} = f_{(s,t)}(p_i)$ et $p_i = f_s(p_{i-1})$, donc $p_{i+1} = f_t(p_{i-1})$. Alors la nouvelle chaîne de p à p' $(p_0, p_1, \cdots, p_i, p_{i+1}, \cdots, p_n)$ est de longueur $n-1$, contradiction.

Nous pouvons maintenant voir que $n = 0$ ou 1. En effet si une chaîne d'équivalences élémentaires radiales est de longueur $n \geq 2$, alors ses trois premiers points p_0, p_1, p_2 ne sont pas distincts.

Nous obtenons donc la description de l'orbite $\mathcal{O}(p)$ annoncée. Le cas $n = 0$ correspond à $p' \in X$ ($p' = p$), le cas $n = 1$ correspond à $p' \in V_s$ pour s un sommet de $D(X)$ lié à p, avec $p' = f_s(p)$.

2) Le fait que $\mathcal{O}(p) \cap X = \emptyset$ découle de 1) et de $p \in V_s \setminus V_{s,X}$. En particulier pour toute suite $(p_0, p_1, \cdots, p_n)$ de S avec $p_0 = p$, telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, p_{i+1} et p_i sont élémentairement équivalents, on a $p_{i+1} \sim_{\text{tang}} p_i$, avec $p_j \in V_{s_j}$ et $p_j \in V_{s_j} \setminus V_{s_j,X}$ pour tout $0 \leq j \leq n$.

Comme V_s est (ICV) et $p \notin V_{s,X} = V(\sigma'_s, V_s)$, l'intersection $V(p, V_s) \cap V_{s,X}$ est un simplexe σ'_p contenant s (cf. lemme 1.8).

Considérons donc le simplexe $\sigma_p = f_s^{-1}(\sigma'_p)$, qui contient s.

Montrons d'abord que σ_p est contenu dans $D(X)$. Puisque $D(X)$ est plein, il suffit de voir que les sommets de σ_p sont dans $D(X)$. Soit $q \in V_{s,X}$ lié à p : alors $q \notin \sigma'_s$, sinon $p \in V(\sigma'_s, V_s) = V_{s,X}$. Or σ'_s est l'image par f_s de $\sigma_s =$Int$(X)\cap$St(s, X). On a donc bien $f_s^{-1}(q) \in D(X)$.

Soit maintenant $q \in V_t$ un sommet tangentiellement équivalent à p (avec $q \neq p$) : donc (s, t) est une arête orientée $\vec{a}$ de $D(X)$, et si on pose $t' = f_s(t), s' = f_t(s)$ on a $p \in V_{s,a} =$St$(\{s, t'\}, V_s)$, $q \in V_{t,a} =$St$(\{s', t\}, V_t)$ et $q = f_{\vec{a}}(p)$. On a aussi $\{s, t'\} \subset \sigma'_p$ et $\{s', t\} \subset \sigma'_q$.

L'application $f_{\vec{a}}$ réalise un isomorphisme de $(V_{s,a}, p)$ sur $(V_{t,a}, q)$ envoyant $V_{s,a} \cap V_{s,X}$ dans $V_{t,a} \cap V_{t,X}$ (par $f_{\vec{a}} \circ f_s = f_t$). Alors $f_{\vec{a}}$ envoie σ'_p sur un simplexe de $V_{t,X}$ lié à q (σ'_p est joignable à p dans $V_{s,a}$) : donc $f_{\vec{a}}(\sigma'_p) \subset \sigma'_q$. On a de même $f_{\overline{\vec{a}}}(\sigma'_q) \subset \sigma'_p$, d'où $f_{\vec{a}}(\sigma'_p) = \sigma'_q$ et donc $\sigma_p = \sigma_q$.

Soit $(p_0, p_1, \cdots, p_n)$ une suite de S avec $p_0 = p$, telle que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, p_{i+1} et p_i sont élémentairement équivalents. D'après ce qui précède tous les simplexes σ_{p_i} sont égaux à σ_p, et les s_i tels que $p_i \in V_{s_i}$ sont des sommets de σ_p.

Supposons $n \geq 2$. Alors p_0 et p_2 sont tangentiellement équivalents. Car si s_0, s_1, s_2 sont deux à deux distincts ils engendrent un 2-simplexe de σ_p, donc de $D(X)$. Alors la relation de cocycle donne $p_0 \sim_t p_2$. Et si (s_0, s_1, s_2) est un aller-retour, la relation $f_{(s_0,s_1)} \circ f_{(s_1,s_0)} =$id donne $p_2 = p_0$.

En considérant une chaîne minimale, on voit donc que pour tout q équivalent à p, $q \neq p$, on a $q \sim_{\text{tang}} p$ et $q = f_{\vec{a}}(p)$ avec $a \subset \sigma_p$, $p \in a$. Ceci achève la description de l'orbite de p.

□

D'après ce qui précède, la restriction de $\pi : S \to S_Y$ à S_X et à S_{V_s} est injective. Elle induit un plongement de X et des V_s. *A partir de maintenant nous identifierons X à son image $\pi(X)$ dans Y, ainsi que V_s à $\pi(V_s)$.*

2.3.4 Lemme.

1) X et les V_s sont des sous-complexes pleins de Y.

2) (combinatoire des morceaux de Y) Pour tout $s \in D(X)$ on a $V_s \cap X =$St$(s, X) = V_{s,X}$. Pour $s, t \in D(X)$ distincts, ou bien s et t ne sont pas liés dans X, alors $V_s \cap V_t \subset X$, ou bien s et t sont les extrémités d'une arête a de X, et alors $a \in D(X)$ et $V_s \cap V_t = V_{s,a} = V_{t,a}$.

Démonstration

0) Nous commençons par établir l'affirmation 2) pour les ensembles de sommets des sous-complexes concernés.
Soit v un sommet de Y dans $V_s \cap X$ pour un certain $s \in D(X)$. D'après le 1) du lemme 2.3.3, nous avons $v = \{p, f_{s_1}(p), \cdots, f_{s_k}(p)\}$, avec $p \in X$ et $s_1, \cdots, s_k$ les sommets de $D(X)$ liés à p. Puisque $\mathcal{O}(p) \cap V_s \neq \emptyset$, le sommet s est l'un des s_i. Donc p est lié à s et $v(= \pi(p)) \in \mathrm{St}(s, X)$.

L'inclusion réciproque $S_{\mathrm{St}(s,X)} \subset V_s \cap X$ étant évidente, nous avons $S_{\mathrm{St}(s,X)} = S_{V_s \cap X}$. D'autre part on a clairement $\pi(\mathrm{St}(s, X)) = \pi(V_{s,X})$.

Soit v un sommet de Y dans $V_s \cap V_t$ pour $s, t \in D(X), s \neq t$.

Supposons d'abord s et t non liés dans X. D'après le lemme 2.3.3, un sommet p de V_s non dans $V_{s,X}$ ne peut être équivalent à aucun sommet de V_t. Donc $p \in V_s \cap X$ et finalement $v \in X$. On a bien dans ce cas $S_{V_s \cap V_t} \subset S_X$.

Supposons maintenant que s et t sont les extrémités d'une arête a de X. Comme $D(X)$ est plein, s et t sont liés dans $D(X)$. Soit v un sommet de $V_s \cap V_t$. Soit p le représentant de v dans S_{V_s}, q son représentant dans S_{V_t}.

Si $v \in X$ il existe d'après le lemme 2.3.3 un sommet u de X lié à s et t tel que $\pi(u) = v$, $f_s(u) = p$ et $f_t(u) = q$. Puisque X est de drapeaux, $u \in \mathrm{St}(a, X)$. Donc $p \in \mathrm{St}(f_s(a), V_s) = V_{s,a}$.

Si $v \notin X$ alors p et q sont tangentiellement équivalents d'après le lemme 2.3.3, donc $p \in \mathrm{St}(f_s(a), V_s) = V_{s,a}$.

L'égalité et l'inclusion suivantes de sous-complexes sont évidentes : $V_{s,a} = V_{t,a} \subset V_s \cap V_t$. On obtient donc l'égalité pour les ensembles de sommets.

1) Comme X et les V_s sont de drapeaux, il suffit de montrer que pour toute arête a de Y d'extrémités dans X (resp. V_s), on a en fait a contenue dans X (resp. V_s).

Supposons d'abord $a = \{v, w\}$ avec v, w dans S_X. Il existe une arête b de X ou de l'un des V_s telle que $\pi(b) = a$. Si b est une arête de X il n'y a rien à montrer.

Sinon b est une arête d'un V_s, dont les extrémités sont équivalentes à des sommets de X, donc dans $\mathrm{St}(s, X) = V_{s,X}$ d'après 0). Le sous-complexe $V_{s,X}$ est plein (cf. Remarque 2.2.2), donc en fait b est une arête de $V_{s,X}$. Alors $\pi(f_s^{-1}(b)) = \pi(b) = a$ et a est une arête de X.

Supposons maintenant que $a = \{v, w\}$ avec v, w dans S_{V_s} pour un certain $s \in D(X)$. Soit b une arête de X ou de l'un des V_t telle que $\pi(b) = a$.

Il n'y a rien à faire si b est dans V_s.

Supposons d'abord que les extrémités de a sont dans X. Alors puisque X est plein dans Y, il existe une arête b' de X telle que $\pi(b') = a$. Les sommets de a sont dans $X \cap V_s$, donc dans $\mathrm{St}(s, X)$. Mais $\mathrm{St}(s, X)$ est plein dans X (cf. Remarque 2.2.2) : donc dans ce cas b' est une arête de $\mathrm{St}(s, X)$. Alors $f_s(b')$ est une arête de V_s d'image par π égale à a.

Supposons alors que b est une arête de V_t, avec $t \in D(X), t \neq s$, et $v \notin X$. Puisque b a une extrémité équivalente à un sommet de V_s non dans $V_{s,X}$, le lemme 2.3.3 assure que $c = \{s, t\}$ est une arête de $D(X)$. Les sommets de $\pi(b)$ sont dans $V_s \cap V_t$, donc dans $V_{s,c} = V_{t,c}$ d'après 0). Comme $V_{t,c}$ est plein dans V_t (cf. Remarque 2.2.2), b est une arête de $V_{t,c}$ et l'arête $b' = f_{(t,s)}(b)$ de V_s vérifie $\pi(b') = a$.

2) Pour achever la preuve de cette affirmation, il suffit compte-tenu de 0) de montrer que tous les membres des égalités ou inclusions sont pleins dans Y.

D'après 1) V_s et X sont pleins : donc $V_s \cap X$ l'est aussi. D'autre part $\mathrm{St}(s, X)$ est plein dans X, qui est plein dans Y : donc $\mathrm{St}(s, X)$ est plein dans Y.

Puisque V_s et V_t sont pleins, l'intersection $V_s \cap V_t$ l'est aussi. Lorsque s et t ne sont pas liés, tous les sommets de $V_s \cap V_t$ sont dans X : mais X est plein, donc tous les simplexes de $V_s \cap V_t$ sont aussi dans X.

Lorsque s et t sont liés par une arête a, on a $V_{s,a}$ plein dans V_s, qui est plein dans Y. Donc $V_{s,a}$ est plein dans Y. Ce qui conclut.

□

A partir de maintenant on note $D(Y)$ le vide ou le sous-complexe plein de Y engendré par les sommets de $S_Y \setminus S_X$. Puisque X est plein dans Y, on a alors $\mathrm{Int}(Y) = X$. Notons qu'on a $D(Y) = \emptyset$ lorsque pour tout $s \in D(X)$ l'inclusion $V_{s,X} \subset V_s$ est une égalité.

2.3.5 Lemme. *Soit v un sommet de Y.*

Si $v \in$Int(X) alors $V(v, Y) = V(v, X)$. Si $v = s \in D(X)$ alors $V(v, Y) = V_s$. Enfin si $v = p \in D(Y)$, alors il existe un simplexe σ_p de $D(X)$ tel que $V(v, Y) \cap X = \sigma_p$ et $V(v, Y) = \bigcup_{s \in S_{\sigma_p}} V(v, V_s)$. Si ρ est un simplexe de $D(Y)$ alors l'ensemble des sommets s joignables à chaque sommet de ρ engendre un simplexe σ_ρ de $D(X)$ joignable à ρ.

Le complexe à bord $(Y, D(Y))$ est saillant.

Démonstration

Supposons d'abord $v \in \mathrm{Int}(X)$. Alors $V(v, Y) \subset X$.

Montrons d'abord l'inclusion des ensembles de sommets. Soit v' un sommet de Y lié à v : vérifions que $v' \in X$. Par définition des arêtes de Y il existe une arête a de X ou de l'un des V_s telle que les extrémités de a sont $\{v, v'\}$. Si a est dans X il n'y a rien à montrer. Sinon a est dans un V_s ($s \in D(X)$) et par définition a touche le simplexe σ'_s. Donc a est dans $V(\sigma'_s, V_s) = V_{s,X} = X \cap V_s$.

Comme X est plein dans Y, on a en fait $V(v, Y) = V(v, X)$.

Soit maintenant $s \in D(X)$. Montrons d'abord $S_{V(s,Y)} \subset S_{V_s}$. Soit a une arête de Y contenant s : montrons que sa deuxième extrémité est dans V_s.

Si a est dans X, alors les extrémités de a sont dans $\mathrm{St}(s, X) = V_{s,X} \subset V_s$. Si a est dans V_s, il n'y a rien à dire. Et si a est dans V_t, avec $t \neq s$, on a donc $s \in V_t$, a est une arête de $V(s, V_t)$; or $V(s, V_t) =$St$(\{s, t\}, V_t)$. Puisque $s \in V_t$, on a s et t liés dans X, donc $V(s, V_t) =$St$(\{s, t\}, V_t) = V_{t,\{s,t\}} = V_t \cap V_s$. Ainsi a est bien une arête de V_s.

Puisque V_s est plein, on a en fait $V(s, Y) \subset V_s$. L'inclusion réciproque étant immédiate, on a en fait l'égalité $V(s, Y) = V_s$.

Soit enfin p un sommet de $D(Y)$. Donc p est dans un V_s, mais pas dans X. Montrons qu'alors on a $V(p, Y) = \bigcup_{t \in \sigma_p} V(p, V_t)$ et $V(p, Y) \cap X = \sigma_p$ (avec σ_p le simplexe de $D(X)$ défini au lemme 2.3.3 comme l'intersection $V(p, V_s) \cap V_{s,X}$).

Soit τ un simplexe de Y contenant p. Comme $p \notin X$, on a τ est contenu dans l'un des V_t, $t \in D(X)$. Montrons que $t \in \sigma_p$. Si $t = s$ il n'y a rien à démontrer. Sinon on a $p \in V_s \cap V_t$, donc $V_s \cap V_t \not\subset X$, d'où s et t sont liés. Alors, d'après le lemme 2.3.3, σ_p contient l'arête $\{s, t\}$, donc le sommet t.

Ce qui précède montre l'inclusion $V(p, Y) \subset \bigcup_{t \in \sigma_p} V(p, V_t)$. Mais l'inclusion inverse est évidente. Au passage on voit que $V(p, Y) = V(\sigma_p, V(p, Y))$ (on vient de montrer $\subset$, l'inclusion inverse est évidente).

Maintenant $V(p, Y) \cap X = \bigcup_{s \in \sigma_p} V(p, V_s) \cap X = \bigcup_{s \in \sigma_p} V(p, V_s) \cap V_{s,X}$. Or pour $p \in V_s, q \in V_t$ avec $p \sim q$ et $p \notin V_{s,X}$ on a d'après le lemme 2.3.3 $\sigma_p = \sigma_q$. Donc toutes les intersections $V(p, V_s) \cap V_{s,X}$ valent σ_p, et $V(p, Y) \cap X = \sigma_p$. Compte-tenu de la relation $V(p, Y) = V(\sigma_p, V(p, Y))$, cela montre que $(Y, D(Y))$ est un complexe à bord saillant.

Enfin soit ρ un simplexe de $D(Y)$. Posons $\sigma_\rho = \bigcap_{p \in S_\rho} \sigma_p$. Alors un sommet s de X est joignable à tous les sommets de ρ si et seulement si c'est un sommet de σ_ρ. Or σ_ρ est une intersection de simplexes, donc est vide ou un simplexe. Mais le premier cas est à exclure, puisque ρ est contenu dans au moins un V_s. Si on fixe un sommet s_0 de σ_ρ, on a $S_\rho \cup S_{\sigma_\rho} \subset V_{s_0}$ et $S_\rho \cup S_{\sigma_\rho}$ engendrent un graphe complet de V_{s_0} par plénitude, donc un simplexe puisque V_{s_0} est de drapeaux.

$\square$

2.4 Théorème. *$(Y, D(Y))$ est un complexe à bord saillant tel que Y a (ICV). Si les données d'extension sont (ICV_{-1}) alors Y a (ICV_{-1}).*

Démonstration

Par hypothèse X est (ICV). Par construction de Y, X est plein dans Y. D'après le lemme 2.3.5 pour tout simplexe ρ de $D(Y)$ l'ensemble des sommets s joignables à chaque sommet de ρ engendre un simplexe σ_ρ de $D(X)$ joignable à ρ. Et par ce même lemme les sous-complexes $V(s, Y)$ pour $s \in X$ sont tous (ICV). Nous pouvons donc appliquer le lemme du voisinage 1.11. On raisonne de même dans le cas (ICV_{-1}).

$\square$

Commentaire. Pour montrer que $(Y, D(Y))$ est saillant et que Y a (ICV_0) nous avons besoin que $(X, D(X))$ soit saillant et que les données d'extension soient (ICV) (et non seulement (ICV_0)). Par exemple soit X l'union des triangles de l'icosaèdre I ne touchant pas un triangle τ_0 fixé et soit $D(X)$ la frontière topologique de X dans I. Alors X est (ICV_0) (sous-complexe plein de I) et $(X, D(X))$ est saillant. Les données d'extension de X associées à l'inclusion $X \subset I$ sont saillantes. Dans ce cas $Y = I \setminus \tau_0$ et $D(Y)$ est le bord de τ_0 : donc $(Y, D(Y))$ n'est pas saillant et Y n'est pas de drapeaux (donc pas (ICV_0)).

2.5 Lemme. *X est un rétract par déformation de Y.*

Démonstration

Commençons par subdiviser Y. Soit Z le complexe simplicial dont l'ensemble des sommets est l'union de l'ensemble des sommets de X et de l'ensemble des simplexes de $D(Y)$, avec $\{v_1, \cdots, v_p, \tau_1, \cdots, \tau_q\}$ engendre un simplexe de Z $\iff$ les sommets $v_1, \cdots, v_p$ engendrent un simplexe σ de X, la famille $\{\tau_1, \cdots, \tau_q\}$ de simplexes de $D(Y)$ est totalement ordonnée par inclusion et, si $q > 0$, son plus grand élément est joignable à un simplexe σ' de $D(X)$ contenant σ. Autrement dit, Z est la plus grossière subdivision de Y induisant sur $D(Y)$ la première subdivision barycentrique.

Pour tout simplexe τ de $D(Y)$, choisissons un sommet $\rho(\tau)$ dans σ_τ (le simplexe défini au lemme 2.3.5).

Soit n la dimension de Y et, pour $-1 \leq i \leq n$, soit Z_i le sous-complexe plein de Z engendré par les sommets de X et les simplexes de $D(Y)$ de dimension $\leq i$. Ainsi nous avons $Z_n = Z$ et $Z_{-1} = X$. Pour $0 \leq i \leq n$, définissons $\rho_i : S_{Z_i} \to S_{Z_{i-1}}$ par $\rho_i =$id sur $S_{Z_{i-1}}$ et $\rho_i(\tau) = \rho(\tau)$ pour τ un simplexe de $D(Y)$ de dimension i. Montrons que ρ_i est simpliciale de Z_i dans Z_{i-1}.

Si σ est un simplexe non dans Z_{i-1} de dimension > 0, c'est le joint d'un simplexe σ^- de Z_{i-1} et d'un simplexe τ de $D(Y)$ de dimension i. Si $\sigma_1 = \sigma^- \cap X$ et $\sigma_2 = \sigma^- \cap D(Y)'$, alors

$\sigma_2 = \{\tau_1 < \cdots < \tau_q\}$, avec $\tau_q \subset \tau$ et τ est joignable à un simplexe σ'_1 de $D(X)$ contenant σ_1. Nous avons $\sigma_\tau \subset \sigma_{\tau_q} \subset \cdots \subset \sigma_{\tau_1}$. Comme d'autre part τ est joignable à σ'_1, a fortiori τ est joignable à σ_1, donc $\sigma_1 \subset \sigma_\tau$. Alors $\rho_i(\sigma) \cap S_X$ est un simplexe contenant σ_1 et contenu dans σ_τ. Tandis que $\rho_i(\sigma) \cap S_{D(Y)'} = \sigma_2$, et τ_q, le simplexe maximal de σ_2, est de dimension $< i$, joignable à σ_τ puisque $\sigma_\tau \subset \sigma_{\tau_q}$. Finalement $\rho_i(\sigma)$ engendre bien un simplexe de Z_{i-1} - ce qui achève de montrer que ρ_i est simpliciale.

Posons $\rho = \rho_0 \circ \cdots \circ \rho_n$. C'est une rétraction simpliciale de Z sur X.

Remarquons enfin que, d'après ce qui précède, pour tout simplexe σ de Z_i, on a $\sigma \cup \rho_i(\sigma)$ contenu dans un simplexe de Z_i (par exemple σ si σ est dans Z_{i-1}, ou le joint du simplexe $\tau_1 < \cdots < \tau_q < \tau$ de $D(Y)'$ avec le simplexe σ_τ de $D(X)$ dans le deuxième cas). Donc pour tout point y de la réalisation géométrique de Y et tout $t \in [0,1]$ le barycentre $\rho_i^t(y) = t\rho_i(y) + (1-t)y$ est bien défini. On obtient ainsi une homotopie entre ρ_i et l'identité de Z_i, stationnaire sur Z_{i-1}. En composant ces homotopies, on voit que ρ et l'identité de X sont homotopes par une homotopie stationnaire sur X.

□

2.6 Extensions et extensions universelles.

Dans cette section nous montrons la naturalité de la construction du complexe à bord $(Y, D(Y))$.

2.6.1 Définition. *Soit $(X, D(X))$ un complexe à bord.*

Une extension de $(X, D(X))$ *est un complexe à bord $(Y, D(Y))$ et un morphisme injectif $e : X \to Y$ tels que $e(X) =$Int(Y) et $Y = V(e(X), Y)$.*

Une extension $e : X \to Y$ est dite universelle *si pour tout s sommet de $D(X)$ on a $V(e(s), Y) \cap e(X) = e(V(s, X))$, et pour deux sommets s, t de $D(X)$ l'intersection $V(e(s), Y)$ $\cap V(e(t), Y)$ est contenue dans $e(X)$ si s et t ne sont pas joints et est St$(\{s,t\}, Y)$ sinon.*

Soit $\mathcal{D} = (V_s, f_s, f_{\vec{a}})$ une donnée d'extension de X. Soit $e : X \to Y$ une extension de X. Nous dirons que cette extension est modelée sur $\mathcal{D}$ *s'il existe pour tous $s \in D(X)$ des isomorphismes $\varphi_s : V(e(s), Y) \to V_s$ tels que $f_s = \varphi_s \circ e$ sur $V(s, X)$ et, pour toute arête orientée $\vec{a} = (s,t)$ de $D(X)$, on a $\varphi_t = f_{\vec{a}} \circ \varphi_s$ sur St$(e(a), Y)$.*

Soit $\mathcal{D} = (V_s, f_s, f_{\vec{a}})$ une donnée d'extension de X. Soit $e : X \to Y, e' : X \to Y'$ deux extensions de X modelées sur $\mathcal{D}$. Alors un morphisme (d'extensions modelées) de $e : X \to Y$ sur $e' : X \to Y'$ *est un morphisme $g : Y \to Y'$ tel que $g \circ e = e'$ sur X et pour tout s sommet de $D(X)$ on a $\varphi'_s \circ g = \varphi_s$ sur $V(e(s), Y)$.*

2.6.2 Remarques.

1) Soit $(X, D(X))$ un complexe à bord saillant et $\mathcal{D}$ des données d'extension saillantes, (ICV) de X. Alors le complexe à bord saillant $(Y, D(Y))$ construit en section 2.3 muni de l'inclusion naturelle $X \to Y$ constitue une extension de X. D'après le lemme 2.3.4 et la propriété (ICV) dans Y, cette extension est universelle. Enfin les applications naturelles des V_s dans Y réalisent un isomorphisme sur $V(s, Y)$, et on vérifie immédiatement que les isomorphismes inverses φ_s modèlent l'extension sur $\mathcal{D}$.

2) Notons qu'un morphisme d'extensions modelées est toujours surjectif et un isomorphisme local à l'intérieur.

2.6.3 Proposition. *Une extension universelle modelée sur des données d'extension admet un morphisme sur toute autre telle extension, d'ailleurs unique. En particulier une extension universelle modelée sur des données d'extension est unique à isomorphisme près.*

Démonstration

Le résultat d'unicité à isomorphisme près est un corollaire classique de la propriété universelle (la composée de deux morphismes est bien un morphisme). Montrons donc la première partie du lemme.

Soit $e : (X, D(X)) \to (Y, D(Y))$ une extension universelle modelée sur $\mathcal{D}$. Soit $e' : (X, D(X)) \to (Y', D(Y'))$ une autre extension modelée sur $\mathcal{D}$. Nous noterons $(\varphi_s), (\varphi'_s)$ les isomorphismes modelant Y, Y' sur $\mathcal{D}$.

Montrons d'abord l'unicité d'un morphisme $g : Y \to Y'$. Par définition d'une extension, Y est la réunion de $e(X)$ et des $V(e(s), Y)$. Pour σ un simplexe de Y, on a donc σ dans $e(X)$ ou σ dans un $V(e(s), Y)$. Dans le premier cas on doit avoir $g(\sigma) = g(e(e^{-1}(\sigma))) = e'(e^{-1}(\sigma))$. Dans le second cas on doit avoir $g(\sigma) = (\varphi'_s)^{-1}(\varphi'_s(g(\sigma))) = (\varphi'_s)^{-1}(\varphi_s(\sigma))$.

Montrons l'existence. Posons $g_X = e' \circ e^{-1}$, isomorphisme de $e(X)$ sur $e'(X)$, et, pour s sommet de $D(X)$, posons $g_s : {\varphi'_s}^{-1} \circ \varphi_s$, isomorphisme de $V(e(s), Y)$ sur $V(e'(s), Y')$. Vérifions que les applications g_X, g_s sont deux à deux compatibles.

Soit σ un simplexe de $e(X) \cap V(e(s), Y)$. Comme l'extension $e : X \to Y$ est universelle, on a $\sigma \in e(V(s, X))$, i.e. $\sigma = e(\tau)$ avec τ simplexe de $V(s, X)$. Alors $g_X(\sigma) = g_X(e(\tau)) = e'(\tau)$, tandis que $g_s(\sigma) = {\varphi'_s}^{-1}(\varphi_s(e(\tau))) = {\varphi'_s}^{-1}(f_s(\tau)) = e'(\tau)$ en utilisant les propriétés des applications φ_s.

Soit σ un simplexe de $V(e(s), Y) \cap V(e(t), Y)$. Si s et t ne sont pas liés alors $V(e(s), Y) \cap V(e(t), Y) = (V(e(s), Y) \cap e(X)) \cap (V(e(t), Y) \cap e(X))$ puisque $e : X \to Y$ est universelle. Alors d'après ce qui précède on a $g_s(\sigma) = g_X(\sigma) = g_t(\sigma)$. Enfin si $\{s, t\}$ est une arête a de $D(X)$ on a $\sigma \in \mathrm{St}(\{e(s), e(t)\}, Y)$ (par universalité). Or $\varphi_s(e(s)) = f_s(s)$ et $\varphi_s(e(t)) = f_s(t)$ Donc $\varphi_s(\sigma)$ est un simplexe de $\mathrm{St}(\{f_s(s), f_s(t)\}, V_s) = V_{s,a}$. Alors $g_s(\sigma) = (\varphi'_s)^{-1}(\varphi_s(\sigma)) = (\varphi'_s)^{-1}(f_{(t,s)}(f_{(s,t)}(\varphi_s(\sigma)))) = (\varphi'_t)^{-1}(\varphi_t(\sigma)) = g_t(\sigma)$.

Les morphismes g_X, g_s sont compatibles, donc définissent un morphisme g de la réunion des domaines de définition vers Y'. Par définition d'une extension, Y est la réunion de $e(X)$ et des $V(e(s), Y)$: donc g est une application simpliciale de Y dans Y'. Il est clair que g vérifie les propriétés d'un morphisme d'extensions modelées sur $\mathcal{D}$.

□

2.6.4 Corollaire.

Soit $(X, D(X))$ un complexe à bord saillant (ICV), et soit $\mathcal{D}$ une donnée d'extension saillante (ICV) de X.

Alors $(X, D(X))$ admet une extension universelle modelée sur $\mathcal{D}$, unique à isomorphisme près, qui domine toute autre telle extension. Cette extension universelle est isomorphe au complexe à bord $(Y, D(Y))$ de la section 2.3, muni de l'inclusion $X \subset Y$.

Démonstration

D'après la remarque 2.6.2, le complexe à bord $(Y, D(Y))$ de la section 2.3, muni de l'inclusion $X \subset Y$, est bien une extension universelle naturellement modelée sur $\mathcal{D}$. D'autre part la partie unicité de l'énoncé découle de la proposition 2.6.3

□

2.7 Revêtement universel d'un complexe localement (ICV) et espaces tangents.

Dans cette section nous identifions le revêtement universel d'un complexe localement (ICV) à l'espace tangent, un complexe (ICV) naturellement défini à partir d'un point base comme limite inductive d'une suite d'extensions universelles. Nous commençons par montrer comment étendre un isomorphisme local en présence de la propriété (ICV).

2.7.1 Définition. *Soit $(X, D(X))$ un complexe à bord et X' un complexe simplicial. Un* isomorphisme local de $(X, D(X))$ dans X' *est un morphisme $f : X \to X'$ qui est un isomorphisme local sur* Int(X) *(i.e. tel que pour tout $v \in$Int(X), la restriction de f à $V(v, X)$ induit un isomorphisme sur $V(f(v), X')$), tel que f est injective sur $V(s, X)$ pour tout $s \in D(X)$.*

2.7.2 Lemme (extensions d'isomorphismes locaux).

Soit $(X, D(X))$ un complexe à bord saillant tel que X a (ICV). Soit X' un complexe localement (ICV) et $f : X \to X'$ un isomorphisme local de $(X, D(X))$ dans X' .

Alors il existe une extension universelle $(Y, D(Y))$ de $(X, D(X))$ et un isomorphisme local g de $(Y, D(Y))$ dans X' avec les propriétés suivantes :

1) Y a (ICV) et g étend f ;

2) pour toute extension $(Y', D(Y'))$ de $(X, D(X))$ munie d'un isomorphisme local g' de $(Y', D(Y'))$ dans X' avec les propriétés du 1), il existe un morphisme $\varphi : Y \to Y'$ tel que $g'\varphi = g$ (qui est un isomorphisme si l'extension $(Y', D(Y'))$ est universelle).

Démonstration

Définissons des données d'extension de $(X, D(X))$ via f. Pour tout $s \in D(X)$, posons $V_s = V(f(s), X')$, voisinage du sommet $f(s)$. Comme X' est localement (ICV), le voisinage V_s est lui-même (ICV). Posons alors $f_s = f_{|V(s,X)}$ et $\sigma'_s = f(\sigma_s)$. Par hypothèse f_s est un plongement.

Vérifions que $V_{s,X} = f_s(V(s, X)) = V(\sigma'_s, V_s)$. Comme $V(s, X) = V(\sigma_s, X)$, l'inclusion $\subset$ est évidente. Soit τ' un simplexe de $V(\sigma'_s, V_s)$: il existe donc un simplexe ρ' de X' contenant τ', $f(s)$ et un sommet t' de σ'_s. Soit $t \in \sigma_s$ tel que $f(t) = t'$. Comme $t \in$Int(X), f réalise un isomorphisme de $V(t, X)$ sur $V(t', X')$. Donc il existe un simplexe ρ de $V(t, X)$ tel que $f(\rho) = \rho'$. Comme $s \in V(t, X)$ et $f(s) \in \rho'$, on a donc $s \in \rho$. Ainsi le simplexe $\tau \subset \rho$ tel que $f(\tau) = \tau'$ est dans $V(s, X)$, donc τ' est dans $V_{s,X}$.

Pour une arête orientée $\vec{a}$ de $s \in D(X)$ à $t \in D(X)$, nous avons $f(\mathrm{St}(a, X)) \subset \mathrm{St}(f(a), X')) = \mathrm{St}(f_s(a), V_s) = \mathrm{St}(f_t(a), V_t)$. Nous poserons alors $f_{\vec{a}} = \mathrm{id}_{f(\mathrm{St}(f(a),X'))}$.

On a tout de suite $f_s \circ f_{\vec{a}} = f_t$, et les conditions de cocycles sont immédiates à vérifier.

Ainsi, les données d'extensions $\mathcal{D}(f)$ précédentes sont saillantes et (ICV), et nous pouvons considérer le complexe à bord $(Y, D(Y))$ construit en section 2.3 : il est saillant, et Y a (ICV) d'après le théorème 2.4. On a $X \subset Y$ et cette extension est universelle, modelée sur $\mathcal{D}(f)$ (voir remarque 2.6.2). D'autre part il y a un morphisme naturel $\bar{g}$ de l'union disjointe $X \sqcup (\sqcup_{s\in D(X)} V_s)$ dans X', défini par $\bar{g}(x) = f(x)$ si $x \in X$ et par $\bar{g}(x) = x$ si $x \in V_s$ pour un certain $s \in D(X)$. Vu les recollements utilisés pour construire Y, le morphisme $\bar{g}$ est compatible avec $\pi : X \sqcup (\sqcup_{s\in D(X)} V_s) \to Y$, donc définit un morphisme $g : Y \to X'$. Il est clair que g étend f. En particulier g est déjà un isomorphisme local au voisinage des sommets $v \in$Int(X). D'autre part, si $s \in D(X)$, on a $V(s, Y) = V_s$ et $\bar{g}_{|V_s}$ est l'identité de $V(f(s), X')$, donc g un isomorphisme local au voisinage de s.

Pour achever de montrer le 1), il suffit de vérifier que g est localement injective au bord de Y. Soit donc $p \in D(Y)$ et q, r deux sommets de $V(p, Y)$ tels que $g(q) = g(r)$.

Faisons tout d'abord la remarque suivante : si q et r sont liés à un même sommet s de $D(X)$ alors $q = r$ par injectivité locale de g à l'intérieur.

Supposons en premier lieu que l'un des sommets q ou r soit dans X (donc dans le simplexe $\sigma_p = X \cap V(p,Y)$). Alors l'autre sommet est un sommet $s \in \sigma_p$ ou du moins lié à un $s \in \sigma_p$ car $(y, D(Y))$ est saillant. On a bien alors q, r dans un même V_s.

En second lieu supposons que q, r sont sur $D(Y)$ et qu'il existe une arète $\{s,t\}$ de σ_p telle que $q \in V_s, r \in V_t$. Notons m le sommet image $g(q) = g(r) \in X'$. Nous voyons alors que les trois arêtes $\{f(s), f(t)\}, \{f(s), m\}, \{f(t), m\}$ sont dans $V(g(p), X')$. Comme X' est localement (ICV), le voisinage $V(g(p), X')$ est de drapeaux. Donc $\{g(p), g(s), g(t), m\}$ est un 3-simplexe τ' de X'. Comme g est un isomorphisme local au voisinage de s, nous pouvons considérer le simplexe τ de V_s tel que $g(\tau) = \tau'$. Par injectivité locale dans V_s ce simplexe contient s, t, p, et son quatrième sommet est q. Mais par injectivité locale dans V_t on a alors $q = r$.

Montrons maintenant la propriété 2). Remarquons d'abord que l'extension $(Y', D(Y'))$ est en fait modelée sur $\mathcal{D}(f)$: il suffit, pour $s \in D(X)$, de considérer $\varphi_s = g'_{\,|V(e'(s),Y')}$. Par la proposition 2.6.3 il existe $\varphi : Y \to Y'$, un morphisme d'extensions modelées sur $\mathcal{D}(f)$. Par définition des modèles respectifs on a alors $g'\varphi = g$ (car on l'a sur X et sur chaque $V_s, s \in D(X)$). Enfin, supposons l'extension $(Y', D(Y'))$ universelle. Alors d'après l'unicité dans 2.6.3 nous voyons que φ est un isomorphisme.

□

2.7.3 Construction-Définition.

Soit $(X, D(X))$ un complexe à bord saillant, X ayant (ICV). Soit X' un complexe localement (ICV) et f un isomorphisme local de $(X, D(X))$ dans X'. D'après le lemme 2.7.2, nous pouvons alors considérer l'unique extension universelle $(X_1, D(X_1))$ de $(X_0, D(X_0)) = (X, D(X))$, telle que X_1 est (ICV), et $f_0 = f$ s'étend en un isomorphisme local f_1 de $(X_1, D(X_1))$ dans X'. En itérant cette construction, on obtient une suite croissante de complexes simpliciaux X_n et de morphismes $f_n : X_n \to X'$. Nous noterons $T(f)$ la limite inductive de la suite de complexes (X_n), et $p : T(f) \to X'$ la limite inductive de la suite de morphismes $(f_n : X_n \to X')$.

Il se peut que la suite de complexes X_n et d'isomorphismes locaux f_n de $(X_n, D(X_n))$ vers X soit stationnaire. Cela se produit lorsque pour n assez grand on a $D(X_n) = \emptyset$. Par exemple si $X' = X$, le cône sur un complexe ayant (ICV) et $D(X)$ la base de ce cône.

Lorsque X' est un complexe simplicial localement (ICV) et s est un sommet de X', soit X le voisinage de s dans X' et $D(X) = \partial V(s, X')$. Alors $(X, D(X))$ est un complexe à bord saillant (cf. Exemple 2.1.1) et X est (ICV). Soit $f : X \to X'$ l'inclusion canonique : c'est un isomorphisme local au voisinage de v, l'unique sommet intérieur à X', et un plongement local partout. Nous noterons dans ce cas $T_v(X')$ le complexe $T(f)$, et nous l'appelerons *espace tangent à* X' *en* v.

Plus généralement si X est un sous-complexe de X' localement (ICV) et si $D(X)$ est un bord pour X tel que $D_{X'}(X) \subset D(X)$, alors l'inclusion canonique de X dans X' définit un isomorphisme local de $(X, D(X))$ dans X'. Nous noterons dans ce cas $T_X(X')$ le complexe $T(f)$.

2.7.4 Lemme.

Soit $(X, D(X))$ un complexe à bord saillant, X ayant (ICV) (resp. (ICV_{-1})). Soit X' un complexe localement (ICV) (resp. (ICV_{-1})) et f un isomorphisme local de $(X, D(X))$ dans X'. Alors $T(f)$ a (ICV) (resp. (ICV_{-1})), X est un rétract par déformation de $T(f)$ et $p : T(f) \to X'$ est un isomorphisme local.

Démonstration

D'après le théorème 2.4, chaque X_n a (ICV) (resp. (ICV_{-1})). Chaque X_n est plein dans X_{n+1}, donc dans $T(f)$, union croissante des X_n. Pour chaque arête a de X_n on a $V(a, T(f)) \subset X_{n+1}$. Finalement $T(f)$ a (ICV) (resp. (ICV_{-1})), d'après le lemme du recouvrement 1.10 appliqué aux X_n.

D'après le lemme 2.5, chaque X_n est un rétract par déformation de X_{n+1}. Donc par composition X est un rétract par déformation de $T(f)$.

Enfin tout sommet de $T(f)$ finit par être intérieur à un X_n : or $p_{|X_n} = f_n$, et f_n est un isomorphisme local au voisinage des sommets intérieurs de X_n.

□

2.7.5 Théorème. *Soit X un complexe simplicial connexe et localement (ICV) (resp. (ICV_{-1})). Alors son revêtement universel est (ICV) (resp. (ICV_{-1})) et contractile.*

Démonstration

Fixons un sommet v_0 de X. D'après le début du lemme 2.7.5 , il suffit de montrer que $p : T_{v_0}(X) \to X$ est un revêtement universel contractile de X.

D'après ce même lemme 2.7.5 le morphisme p est un isomorphisme local, donc un revêtement puisque X est connexe. Et toujours d'après ce lemme $T_{v_0}(X)$ a le même type d'homotopie que $V(v_0, X)$, bien sûr contractile.

□

2.7.6 Corollaire. *Un complexe simplicial est (ICV) (resp. (ICV_{-1})) si et seulement si il est localement (ICV) (resp. (ICV_{-1})) et tout circuit de longueur $n \leq 5$ (resp. $n \leq 6$) est homotope à 0.*

Démonstration

Le sens $\Rightarrow$ est clair. Sous l'hypothèse que X est localement (ICV) (resp. (ICV_{-1})) et que tout cycle de longueur $n \leq 5$ (resp. $n \leq 6$) est homotope à 0, le complexe simplicial X est le quotient de son revêtement universel $\overline{X}$ par le groupe fondamental, avec une distance de translation δ vérifiant $\delta > 5$ (resp. $\delta > 6$). D'après le théorème précédent, $\overline{X}$ est (ICV) (resp. (ICV_{-1})), donc d'après le lemme 1.6 le complexe X est lui-même (ICV) (resp. (ICV_{-1}).

□

Voici une autre application du lemme 2.7.4 :

2.7.7 Proposition. *Soit X' un complexe simplicial connexe, simplement connexe et (ICV). Soit $(X, D(X))$ un complexe à bord saillant, X étant connexe et ayant (ICV). Soit enfin f un isomorphisme local de $(X, D(X))$ dans X'.*

Alors X est contractile, f est un plongement d'image pleine. De plus, pour tout $n \geq 1$ le sous-complexe $V^n(f(X), X')$ est contractile, plein et $(V^n(f(X), X'), \partial V^n(f(X), X'))$ est un complexe à bord saillant dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur topologique de $V^n(f(X), X')$. Enfin $(V^{n+1}(f(X), X'), \partial V^{n+1}(f(X), X'))$ est une extension universelle de $(V^n(f(X), X'), \partial V^n(f(X), X'))$ modelée sur les données d'extensions de $(V^n(f(X), X'), \partial V^n(f(X), X'))$ associées à l'inclusion $V^n(f(X), X') \subset X'$.

Démonstration

D'après le lemme 2.7.4 et l'hypothèse de simple connexité de X', l'isomorphisme local $p : T(f) \to X'$ est un isomorphisme ($T(f)$ est connexe puisque X l'est). Donc déjà f est un plongement.

D'après le théorème 2.7.5 le complexe X' est contractile, donc $T(f)$ l'est aussi, ainsi que chaque X_n (tous ont le même type d'homotopie via X, cf. lemme 2.7.4).

On a $X = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset T(f)$ et chaque X_n est plein dans X_{n+1} (cf. lemme 2.3.4), donc dans $T(f)$.

Par construction on a $X_{n+1} = V(X_n, T(f))$, $D(X_{n+1}) = \partial V(X_n, T(f))$ et $(X_{n+1}, D(X_{n+1}))$ est l'extension universelle de $(X_n, D(X_n))$ modelée sur les données d'extension associée à l'isomorphisme local f_n de $(X_n, D(X_n))$ dans X' (un plongement puisque p est un isomorphisme). On en déduit par récurrence sur $n \geq 1$ que $X_n = V^n(X, T(f))$ (resp. $D(X_n) = \partial V^n(X, T(f))$).

On sait que $(X_n, D(X_n))$ est saillant, on a vu que X_n est plein, donc on conclut en appliquant l'isomorphisme p.

$\square$

2.7.8 Remarque.
La proposition précédente s'applique en particulier lorsque X est un sous-complexe connexe et (ICV) de X', f est l'inclusion canonique et $D(X)$ est un bord sur X tel que $D_{X'}(X) \subset D(X)$ et $(X, D(X))$ est saillant. Car alors f est bien un isomorphisme local de $(X, D(X))$ dans X'.

3. Etude de la métrique combinatoire.

Dans toute la section X est un complexe simplicial connexe, simplement connexe qui vérifie (ICV).

Nous allons montrer que (S_X, d_X) a un comportement analogue à celui d'un espace $CAT(0)$. Si de plus X est (ICV_{-1}) alors (S_X, d_X) est hyperbolique au sens de Gromov.

3.1 Lemme.

Pour tout sommet s de X et tout entier $n \geq 1$, on a $V^n(s,X) = B_X(s,n)$, i.e. les $V^n(s,X)$ sont pleins. Les boules sont contractiles. Le complexe à bord $(B_X(s,n), S_X(s,n))$ est saillant. Pour tout simplexe $\sigma \in S_X(s,n+1)$ il existe un simplexe ρ de $S_X(s,n)$ tel que $s \in \rho \iff s$ est lié à chaque sommet de σ ; de plus σ et ρ sont joignables dans X.

Démonstration

On applique la remarque 2.7.7 au complexe $V(s,X)$ muni de son bord usuel $\partial V(s,X)$ (on a déjà vérifié les hypothèses en 2.7.3). On obtient dèjà que $V^n(s,X)$ est plein et contractile. On a donc à la fois l'inclusion $V^n(s,X) \subset B_X(s,n)$, égalité de l'ensemble des sommets, et plénitude de $V^n(s,X)$. Donc $V^n(s,X) = B_X(s,n)$ et $B_X(s,n)$ est contractile.

La sphère $S_X(s,n+1)$ est le sous-complexe de $B_X(s,n+1)$ engendré par les sommets non dans $B_X(s,n)$. De même $\partial V^{n+1}(s,X)$ est le sous-complexe de $V^{n+1}(s,X)$ engendré par les sommets non dans $V^n(s,X)$. Comme $V^n(s,X) = B_X(s,n)$ pour tout $n \geq 1$, on a donc $S_X(s,n+1) = \partial V^{n+1}(s,X)$. L'égalité $S_X(s,1) = \partial V^1(s,X)$ est évidente. Finalement les complexes à bord $(V^n(s,X), \partial V^n(s,X))$ et $(B_X(s,n), S_X(s,n))$ sont identiques, et toutes les propriétés du premier (venant de 2.7.7) passent au second.

En particulier $(B_X(s,n), S_X(s,n))$ est saillant. Et $(B_X(s,n+1), S_X(s,n+1))$ est l'extension universelle de $(B_X(s,n), S_X(s,n))$ modelée sur les données d'extension associées à l'inclusion $B_X(s,n) \subset X$. La boule $(B_X(s,n)$ est pleine, donc (ICV).

On a vu que $(B_X(s,n), S_X(s,n))$ est saillant et donc les données d'extension le sont aussi puisque $D_X(B_X(s,n)) \subset S_X(s,n)$ (cf. 2.2.1). Enfin X étant (ICV) les données d'extension sont (ICV). Donc toute extension universelle de $(B_X(s,n), S_X(s,n))$ modelée sur ces données est isomorphe à celle construite en section 2.3 (cf. corollaire 2.6.4). Le lemme 2.3.5 s'applique donc.

□

3.2 Définition. *Soit $c = (s_0, s_1, \cdots, s_{n+1})$ un chemin de longueur $n+1$. Un* raccourcissement élémentaire *de c est un chemin $(s'_0, s'_1, \cdots, s'_n)$ de mêmes extrémités que c, de longueur n tel que, pour tout entier $0 < i < n$ le sommet s'_i est l'un des sommets s_i, s_{i+1}, ou alors est lié dans X aux deux sommets s_i, s_{i+1} (autrement dit $s'_i \in St(\{s_i, s_{i+1}\}, X)$, puisque X est de drapeaux).*

Remarques.

Soit c' un raccourcissement élémentaire d'un chemin c.

1) Le chemin opposé $\overline{c'}$ est un raccourcissement élémentaire de $\overline{c}$.

2) Il y a une homotopie simpliciale de c à c' utilisant au plus $2n-1$ mouvements élémentaires.

3.3 Proposition. *Soit X un complexe simplicial (ICV) simplement connexe. Alors un chemin c sans aller-retours est une géodésique si et seulement si c n'admet pas de sous-chemin qu'on peut raccourcir élémentairement.*

Démonstration

Il suffit de montrer par récurrence sur la longueur n de $c = (s_0, s_1, \cdots, s_n)$ que si c n'est pas géodésique, alors c contient un sous-chemin qui admet un raccourcissement élémentaire.

C'est évident pour $n \leq 2$.

Supposons $c = (s_0, \cdots, s_{n+1})$ de longueur $n+1, n \geq 2$ et non géodésique. Si un sous-chemin strict est non géodésique alors par récurrence on trouve un sous-chemin de c qui admet un raccourcissement élémentaire. A partir de maintenant nous supposons donc que tous les sous-chemins stricts sont géodésiques (en particulier c est sans aller-retour).

Avec notre hypothèse nous avons $d(s_0, s_n) = n$. Or $d(s_0, s_{n+1}) < n+1$. Donc $d(s_0, s_{n+1}) = n-1$ ou n.

Dans le premier cas, nous avons $\{s_{n-1}, s_{n+1}\} \subset \sigma_{s_n}$, le simplexe de $S_X(s_0, n-1)$ engendré par les sommets liés à s_n (cf. lemme 3.1). Donc $s_{n-1} = s_{n+1}$ ou $\{s_{n-1}, s_{n+1}\}$ est une arête de X. Le premier cas est impossible puisque c est sans aller-retours. Le deuxième correspond à un raccourcissement élémentaire du sous-chemin (s_{n-1}, s_n, s_{n+1}).

Supposons donc $d(s_0, s_{n+1}) = n$. Alors $\sigma_{s_n} \cap \sigma_{s_{n+1}}$ est un simplexe σ_{a_n} (cf. lemme 3.1). Soit s'_{n-1} un sommet de σ_{a_n}. Si $s'_{n-1} = s_{n-1}$ on obtient encore une fois un raccourcissement élémentaire du sous-chemin (s_{n-1}, s_n, s_{n+1}). Sinon s'_{n-1} est lié aux trois derniers sommets de c. En particulier $s'_{n-1} \in \mathrm{St}(\{s_{n-1}, s_n\}, X)$.

Le chemin $c' = (s_0, \cdots, s_{n-1}, s'_{n-1})$ est de longueur n, mais n'est pas géodésique. Donc par récurrence c' admet un raccourcissement élémentaire de l'un de ses sous-chemins c''. Si c'' ne contient pas s'_{n-1}, alors c'' est un sous-chemins de c, ce qui conclut.

Sinon il existe un entier $0 \leq r \leq n-2$ et un chemin $(s'_r, \cdots, s'_{n-1})$ de mêmes extrémités que $c'' = (s_r, \cdots, s_{n-1}, s'_{n-1})$, tel que $s'_k \in \mathrm{St}(\{s_k, s_{k+1}\}, X)$ pour tout $r < k < n-1$. Alors $(s'_r, \cdots, s'_{n-1}, s_{n+1})$ est un raccourcissement élémentaire du sous-chemin $(s_r, \cdots, s_{n+1})$.

□

Remarque. On déduit de la proposition ci-dessus et de la remarque qui la précède que la fonction de Dehn du complexe simplicial X est au plus quadratique.

3.4 Lemme. *Soit $(X, D(X))$ un complexe à bord saillant, avec X (ICV), et soit $\mathcal{D}$ des données d'extension saillantes et (ICV_{-1}). Soit $(Y, D(Y))$ une extension universelle de $(X, D(X))$ modelée sur $\mathcal{D}$. Alors pour p, q liés sur $D(Y)$, les intersections $\sigma_p = V(p, Y) \cap X$ et $\sigma_q = V(q, Y) \cap X$ sont des simplexes comparables pour l'inclusion.*

Démonstration

D'après le lemme 2.6.4 nous pouvons supposer que $(Y, D(Y))$ est l'extension construite en 2.3, et nous allons utiliser les notations de cette section. Par 2.3.5 nous savons déjà que σ_p et σ_q sont des simplexes.

Les sommets p et q sont liés par une arête a d'un certain V_s. Donc en fait $\sigma_p \subset V(p, V_s) \cap X \subset V(p, Y) \cap X = \sigma_p$. On a $\sigma_p = V(p, V_s) \cap X$ et de même $\sigma_q = V(q, V_s) \cap X$. Donc $V(a, V_s) \cap X = \sigma_p \cup \sigma_q$.

Or $V(a, V_s) \cap X = V(a, V_s) \cap V(\sigma_s, V_s)$. En effet $V(a, V_s) \cap X = V(a, V_s) \cap (X \cap V_s)$, et $X \cap V_s = V_{s,X}$ (cf. lemme 2.3.4) et $V_{s,X} = V(\sigma_s, X)$ par construction de Y.

Pour finir $\sigma_p \cup \sigma_q = V(a, V_s) \cap V(\sigma_s, V_s)$. Nous pouvons alors appliquer le lemme 1.8 dans V_s, puisque celui-ci par hypothèse est (ICV_{-1}). Nous obtenons que $\sigma_p \cup \sigma_q$ est un simplexe, ce qui conclut.

□

3.5 Théorème. *Soit X un complexe simplcicial connexe, simplement connexe et (ICV_{-1}). Alors (S_X, d_X) est hyperbolique au sens de Gromov.*

Démonstration
Considérons les complexes à bord $(B_X(s, n+1), S_X(s, n+1))$ comme des extensions universelles des $(B_X(s,n), S_X(s,n))$ (cf. le lemme 3.1 et sa preuve). Puisque X est (ICV_{-1}) les boules le sont aussi (elles sont pleines). Donc les données d'extension associée à l'inclusion $B_X(s,n) \subset X$ sont (ICV_{-1}). Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.4 : pour deux sommets p, q à distance $n+1$ d'un sommet s et liés dans X, on a $V(p,X) \cap B_X(s,n) = \sigma_p$ et $V(q,X) \cap B_X(s,n) = \sigma_q$, avec σ_p, σ_q deux simplexes de $S_X(s,n)$ comparables pour l'inclusion.

Ceci entraîne immédiatement par récurrence que si deux géodésiques c_1, c_2 de X d'origine s, de longueur n ont des extrémités p, q qui sont égales ou à distance 1, alors $d(c_1(i), c_2(i)) \leq 1$ (en notant $c(j)$ le j-ième sommet d'un chemin c). Autrement dit "les bigones (combinatoires) sont 1-fins", de sorte que les bigones du graphe métrique correspondant au 1-squelette de X sont 2-fins. D'après [P] (theorem 1.4) l'espace métrique (S_X, d_X) est donc Gromov-hyperbolique.

□

3.6 Lemme. *1) Soit $(C, D(C))$ un complexe à bord saillant avec C ayant (ICV). Soit $\mathcal{D}$ des données d'extension saillantes et (ICV) de $(C, D(C))$. Soit $(Y, D(Y))$ l'extension universelle de $(C, D(C))$ modelée sur $\mathcal{D}$ (cf. 2.6.4). Alors S_C est convexe dans (S_Y, d_Y).*

2) Soit C un sous-complexe connexe de X ayant (ICV). Soit $D(C)$ un bord sur C tel que $D_X(C) \subset D(C)$ et $(C, D(C))$ est saillant. Alors S_C est convexe dans (S_X, d_X). En particulier les boules sont convexes : S_B est convexe dans (S_X, d_X) pour toute boule B de X.

Démonstration

1) Montrons qu'un chemin $c = (s_0, \cdots, s_n)$ de Y avec $n \geq 2$, s_0, s_n dans $D(X)$ mais $s_1, \cdots, s_{n-1}$ dans $D(Y)$ ne peut être géodésique.

Raisonnons par récurrence sur n. Pour $n = 2$ on a $s_0, s_2 \in X \cap V(s_1, Y)$, donc s_0 et s_2 sont liés dans le simplexe σ_{s_1}, et c n'est pas géodésique.

Si $n > 2$ soit s un sommet du simplexe $\sigma_{\{s_1, s_2\}}$. Alors $c' = (s_0, s, s_2, \cdots, s_n)$ est de longueur n. Par récurrence $(s, s_2, \cdots, s_n)$ n'est pas géodésique, donc c' et finalement c ne le sont pas non plus.

2) Soit $C_0 = C, D(C_0) = D(C)$, puis $C_{n+1} = V(C_n, X), D(C_{n+1}) = \partial V(C_n, X)$. D'après la proposition 2.7.7 et la remarque 2.7.8, nous savons que $(C_{n+1}, D(C_{n+1}))$ est l'extension universelle du complexe à bord saillant $(C_n, D(C_n))$ modelée sur les données d'extension saillantes et (ICV) associées à l'inclusion $C_n \subset X$. Nous pouvons donc appliquer le 1) : nous avons alors S_{C_n} convexe dans $S_{C_{n+1}}$. Comme $X = \bigcup C_n$, nous voyons que S_{C_n} est convexe dans (S_X, d_X) pour tout n, en particulier pour $n = 0$.

Enfin nous avons vu au lemme 3.1 que le complexe à bord $(B_X(s,n), S_X(s,n))$ satisfait bien les hypothèses du 2).

□

Ce qui précède (et le lemme 2.1.3) montre que lorsque X est (ICV), les notions de convexe et de saillant sont quasi-équivalentes.

Le résultat suivant, joint au précédent, montre une propriété remarquable des espaces métriques (S_X, d) hyperboliques en question : les notions de totalement géodésique, convexe et saillant y sont quasi-équivalentes.

3.7 Proposition. *Soit X un complexe simplicial connexe, simplement connexe et (ICV_{-1}). Soit K une partie de X totalement géodésique. Alors $V(K, X)$ est convexe dans X (en particulier l'enveloppe convexe de S_K reste à distance de Hausdorff finie de S_K). Et $(V^2(K, X), \partial V^2(K, X))$ est saillant.*

Démonstration

La dernière affirmation découle de $V(K, X)$ convexe et du lemme 2.1.3.

Pour montrer que $V(K, X)$ est convexe raisonnons par l'absurde. Considérons donc une géodésique $\gamma = (p_0 = p, p_1, \cdots, p_n = q)$ entre deux points p, q de $V(K, X)$ avec $\gamma \not\subset V(K, X)$, et de longueur minimale pour cette propriété. Donc $n > 1$ et $p_1, \cdots, p_{n-1}$ ne sont pas dans $V(K, X)$. En particulier ni p ni q ne sont dans K.

Considérons alors deux sommets x, y de K tels que $d(x, p) = d(y, q) = 1$ et $d(x, y)$ est minimale pour cette propriété. Comme K est géodésique dans X il existe une géodésique $\gamma' = (x_0 = x, x_1, \cdots, x_m = y)$ dont tous les sommets x_i sont dans K. Par inégalité triangulaire on a $m - 2 \leq n \leq m + 2$. Considérons aussi la distance $d = d(x, q)$ qui vérifie $m - 1 \leq d \leq m + 1$ par inégalité triangulaire.

Supposons $n = m + 2$. Alors $(p, x).\gamma'.(y, q)$ est une géodésique de mêmes extrémités que γ. Nous avons vu au théorème 3.5 que les bigones combinatoires sont 1-fins : deux géodésiques de même origine et d'extrémités égales (ou à distance 1) se suivent à distance ≤ 1. En particulier $d(p_1, x) \leq 1$, contradiction.

Supposons $n = m + 1$; donc $d = m$ ou $d = m + 1$. Si $d = m + 1$ alors γ et $\gamma'.(y, q)$ sont deux géodésiques de même extrémité et d'origines à distance 1. Par 1-finesse des bigones, nous avons $d(p_{n-1}, y) \leq 1$, contradiction. Si $d = m$ soit γ'' une géodésique de q à x : alors γ et $(p, x).\gamma''$ sont deux géodésiques de mêmes extrémités : par 1-finesse des bigones, nous avons $d(p_1, x) \leq 1$, contradiction.

Donc $n \leq m$.

Si $d = m + 1$ alors on doit avoir $n \geq m$ toujours par inégalité triangulaire et finalement $n = m$. Alors $(x, p).\gamma$ et $\gamma'.(y, q)$ sont deux géodésiques de mêmes extrémités. Par 1-finesse des bigones, nous avons $d(p_{n-1}, y) \leq 1$, contradiction.

Si $d = m - 1$ alors $m > 0$. Pour γ'' une géodésique de x à q, nous avons $\gamma''.(q, y)$ et γ' deux géodésiques de même extrémités, donc $d(q, x_{m-1}) \leq 1$, contradiction avec le choix minimisant de $d(x, y)$. Notons que pour la même raison on doit avoir $d(p, y) \geq m$.

Si $d = m$, alors $n \geq m - 1$. Si $n = m - 1$ alors $m > 0$: nous avons $(x, p).\gamma$ et γ' deux géodésiques de même origine et d'extrémités à distance 1, d'où $d(p, x_1) \leq 1$, contradiction avec le choix minimisant de $d(x, y)$.

Supposons pour finir que $n = m = d$ (> 1 comme n). Alors les chemins $\gamma_k = (q, x_m, x_{m-1}, \cdots, x_{m-k})$ ne peuvent être géodésiques pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, m\}$: soit donc ℓ le plus petit entier $k, 0 \leq k \leq m$ tel que γ_k n'est pas géodésique. On a évidemment $\ell \geq 1$; et même $\ell > 1$ sinon q serait lié à x_{m-1}, contradiction avec le choix minimisant de $d(x, y)$.

Soit c'' une géodésique de q à $x_{m-\ell}$ et $\gamma'' = c''.(x_{m-\ell}, \cdots, x_0)$: nécessairement c'' est de longueur ℓ, car de longueur $\leq \ell$ puisque γ_ℓ n'est plus géodésique, mais l'inégalité stricte est exclue sinon γ'' est de longueur $< m$, donc $d < m$.

Supposons d'abord $\ell < m$. Alors nous avons γ'' et γ deux géodésiques d'origine q et d'extrémités reliées, d'avant-derniers sommets p_1, x_1, d'où $d(p_1, x_1) \leq 1$, absurde.

Supposons maintenant $\ell = m$ et $m > 2$. Soit p'' l'avant-dernier sommet de γ'' (lié à x). Par 1-finesse des bigones, nous avons $d(p_1, p'') \leq 1$. En fait $d(p_1, p'') = 1$ sinon $p_1 = p'' \in V(K, X)$. Puisque X est sans carré et que x n'est pas lié à p_1, nous avons p lié à p''. Par finesse des bigones appliquée à γ'' et γ_ℓ on voit de même que $d(p'', x_2) \leq 1$. On ne peut avoir $p'' = x_2$, sinon $x = x_0$ lié à x_2 et γ' n'est pas géodésique.

Le chemin $(p, p'', x_2).(x_2, \cdots, x_m)$ est de longueur m, donc est géodésique. Comme on suppose $m > 2$ la 1-finesse des bigones donne $d(p_{n-1}, x_{m-1}) \leq 1$, contradiction.

Enfin lorsque $n = m = d = 2$ les sommets p et x sont à distance > 1 des sommets q et y, donc par (ICV_{-1}) les sommets p_1 et x_1 sont liés, contradiction.

$\square$

Question. Soit K un sous-complexe quasi-convexe d'un complexe X comme ci-dessus. L'enveloppe convexe de K reste t-elle à distance de Hausdorff finie de K ?

Bibliographie.

[G] M. Gromov, *Asymptotic Invariants of Infinite Groups*, Geometric Group Theory II, G. Niblo and M. Roller eds., LMS Lect. Notes 182, CUP, 1993.

[HW] P.J. Hilton et S. Wylie, Homology Theory. An introduction to algebraic topology, Cambridge University Press (1965)

[JS], T. Januszkiewicz et J. Swiatkowski, *Hyperbolic Coxeter groups of large dimension*, Commentarii Math. Helvetici 78(2003) pp.555-583.

[P] P. Papasoglu, *Strongly geodesically automatic groups are hyperbolic*, Invent. Math. 121, No.2, 323-334 (1995).