

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

2,5

n° 167

Sur les théorèmes de Schwarz-Pick  
et Nevanlinna dans  $\mathbb{C}^n$

Denise et Eric Amar

Analyse Harmonique d'Orsay  
1975

25164

2,5

n° 167

Sur les théorèmes de Schwarz-Pick  
et Nevanlinna dans  $C^n$

Denise et Eric Amar

Analyse Harmonique d'Orsay  
1975

25164



Sur les théorèmes de Schwarz-Pick et Nevanlinna dans  $\mathbb{C}^n$

par Denise et Eric Amar

Soit  $D$  le disque unité dans  $\mathbb{C}$  et soit  $H^\infty(D)$  l'algèbre des fonctions analytiques bornées dans  $D$ . Si  $\{z_1 \dots z_n\} \subset D$  et si  $f \in H^\infty(D)$ ,  $\|f\|_\infty \leq 1$ , on pose  $w_i = f(z_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . On a alors [1] :

THEOREME 1 (Schwarz-Pick). La forme quadratique sur  $\mathbb{C}^n$  définie par :

$$\forall t = (t_1 \dots t_n) \in \mathbb{C}^n \quad Q_n(t) = \sum_{i,j} \frac{1 - \bar{w}_i w_j}{1 - z_i \bar{z}_j} t_i \bar{t}_j$$

est positive

Ce théorème admet la réciproque :

THEOREME 2. Soient  $\{z_1 \dots z_n\} \subset D$  et  $\{w_1 \dots w_n\} \subset D$  tels que la forme quadratique  $Q_n$  sur  $\mathbb{C}^n$  soit positive. Alors il existe  $f \in H^\infty(D)$  telle que  $\|f\|_\infty \leq 1$  et  $f(z_i) = w_i$ ,  $i = 1 \dots n$ .

Depuis Pick [2] et Nevanlinna [3] ces théorèmes ont été démontrés par un grand nombre d'auteurs [4] [5] [6] [7] [8].

Peut-on généraliser ces théorèmes dans la boule unité ou le polydisque de  $\mathbb{C}^n$  ?

On utilise les méthodes définies en [6].

2. Cas de la boule.

$B_n$  désigne la boule unité de  $\mathbb{C}^n$ . Soient  $\sigma = \{z_1 \dots z_k\} \subset B_n$  et  $f \in H^\infty(B_n)$  telle que  $\|f\|_\infty \leq 1$ . Pour déterminer l'analogue de la forme  $Q_w$  dans ce cas, on considère la mesure de Lebesgue sur  $\partial B_n$  et la représentation  $\pi$  associée [6] i. e.

$$\forall g \in H^2(B_n), \quad \pi(f)g = P_{H^2} \bar{f}g$$

où  $P_{H^2}$  est la projection orthogonale sur  $H^2(B)$ .

Comme dans [6], on définit  $E_\sigma$  le sous-espace engendré par  $\{k_{z_i}, i = 1..k\}$

où  $k_{z_i}$  est le noyau de Cauchy-Szegö associé à  $z_i$ . Alors  $E_\sigma$  est invariant par

$\pi(f)$  et si  $\pi_\sigma(f)$  est la restriction de  $\pi(f)$  à  $E_\sigma$  :

$$\|\pi_\sigma(f)\| \leq \|f\|_{H^\infty/I_\sigma} \leq \|f\|_\infty$$

où  $I_\sigma$  est l'idéal des fonctions de  $H^\infty$  qui s'annulent sur  $\sigma$ , d'où :

$$\|\pi_\sigma(f)\| \leq 1.$$

C'est-à-dire, que si  $h = \sum_{i=1}^k h_i k_{z_i}$ ,  $h_i \in \mathbb{C}$ ,

$$\|h\|^2 - \|\pi_\sigma(f)h\|^2 \geq 0$$

$$0 \leq \sum_{i,j} h_i \bar{h}_j \langle k_{z_i}, k_{z_j} \rangle - \sum_{i,j} h_i \bar{h}_j f(\bar{z}_i) \langle k_{z_i}, k_{z_j} \rangle$$

$$0 \leq \sum_{i,j} h_i \bar{h}_j \frac{1 - \bar{w}_i w_j}{(1 - \langle z_i, z_j \rangle)^2}$$

si l'on pose  $w_i = f(z_i)$ ,  $i = 1 \dots k$ .

La forme quadratique  $Q_{w,\sigma}$  est définie par :

$$Q_{w,\sigma}(t) = \sum_{i,j=1}^k t_i \bar{t}_j \frac{1 - \bar{w}_i w_j}{(1 - \langle z_i, z_j \rangle)^2}.$$

On obtient donc l'analogue du théorème de Schwarz-Pick :

THEOREME 1'. Si  $f \in H^\infty(B)$ ,  $\|f\|_\infty \leq 1$ , alors la forme quadratique  
 $Q_{w,\sigma}$  est positive.

Remarque. On peut remplacer la mesure de Lebesgue sur  $\delta B_n$  par n'importe  
 quelle mesure de probabilité sur  $\bar{B}$ .

Que peut-on dire de la réciproque ?

Elle est fautive à cause du contre exemple suivant.

THEOREME 3. Si  $D$  est le disque unité de  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda$  la mesure de Lebesgue  
et  $H^2(\lambda)$  l'adhérence dans  $L^2(\lambda)$  de  $A(D)$ . Alors il existe une suite  
d'interpolation pour  $H^2(\lambda)$  qui n'est pas d'interpolation pour  $H^\infty(D)$ .

Ce théorème admet en effet le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. Il existe une suite  $\sigma \subset B_2$  qui est d'interpolation pour  
 $H^2(B_2)$  et qui n'est pas d'interpolation pour  $H^\infty(B_2)$ .

Soit alors  $\sigma = \{z_i, i \in \mathbb{N}\} \subset B_2$  une telle suite. Il existe une suite  
 $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  telle que, pour toute suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^\infty(B_2)$  vérifiant  
 $f_n(z_i) = \omega_i, 1 \leq i \leq n$ , on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty = \infty.$$

Si  $\sigma$  est d'interpolation dans  $H^2(B_2)$  de constante  $C$ , on a ([6] Proposition  
 p. 26), en notant  $\sigma_n = \{z_i, 1 \leq i \leq n\}$   $\omega^{(n)} = \{\omega_i, 1 \leq i \leq n\}$ ,

$$\|\pi_{\sigma_n}(f_n)\| \leq C^2 \|\omega\|_\infty.$$

Si de plus  $\|\omega\|_\infty \leq \frac{1}{C^2}$ , ce que l'on peut supposer,  $\|\pi_{\sigma_n}(f_n)\| \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

D'où, pour tout  $n$ ,  $Q_{w^{(n)}, \sigma_n}$  est une forme quadratique positive sur  $\mathbb{C}^n$ .

### 3. Cas du polydisque.

$\Delta_n$  désigne le polydisque unité de  $\mathbb{C}^n$ . On considère la mesure de Lebesgue sur le bord distingué  $T^n$  de  $\Delta_n$  et la représentation  $\Gamma$  associée. On démontre, comme dans le cas de la boule  $B_n$ , que si  $f \in H^\infty(\Delta_n)$ ,  $\|f\|_\infty \leq 1$ ,

si  $\sigma = \{z_1 \dots z_k\} \subset \Delta_n$  où  $z_i = (z_i^1 \dots z_i^n)$ , si  $f(z_i) = w_i$ ,

$Q_{w_\sigma}$  définie sur  $\mathbb{C}^k$  par

$$Q_{w_\sigma}(t) = \sum_{ij=1}^k t_i \bar{t}_j \frac{1 - \bar{w}_i w_j}{(1 - z_i^1 \bar{z}_j^1)(1 - \bar{z}_i^2 z_j^2) \dots (1 - z_i^n \bar{z}_j^n)}$$



est une forme quadratique positive.

La réciproque est dans ce cas aussi fautive. Le théorème 3 admet en effet le second corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.** Il existe une suite  $\sigma \subset \Delta_2$  qui est d'interpolation pour  $H^2(\Delta_2)$  et qui n'est pas d'interpolation pour  $H^\infty(\Delta_2)$  dans  $L^2(T^2)$ .

Comme dans le cas de la boule on déduit l'existence pour tout  $n \in \mathbb{N}$  d'une forme quadratique  $Q_{w^{(n)}, \sigma_n}$  positive sur  $\mathbb{C}^n$  telle que si  $f_n \in H^\infty(\Delta_2)$

$f_n(z_i) = w_i$ ,  $z_i \in \sigma_n$ ,  $w_i \in \omega^{(n)}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$ . Toutefois, on obtient une réciproque

du théorème de Schwarz-Pick si on considère toutes les mesures de probabilité portées respectivement par  $\partial B_n$  et  $T^n$ , cf [6], chap. I, § 4.



4. Démonstration du théorème 3 et de ses corollaires.

a)  $\lambda$  est la mesure plane sur  $D$ ,  $H^2(\lambda)$  est la fermeture de  $A(D)$  dans  $L^2(\lambda)$ . Pour  $z \in D$ ,  $K_z(\zeta)$  est le noyau reproduisant au point  $z$  dans  $H^2(\lambda)$ . On note  $E_z$  le vecteur unitaire de  $H^2(\lambda)$

$$E_z(\zeta) = \frac{K_z(\zeta)}{\|K_z\|} = \frac{1 - |z|^2}{(1 - \bar{z}\zeta)^2}.$$

Dans [6], on montre que la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $(z_n) \subset D$  est l'interpolation  $I(C)$  pour  $H^2(\lambda)$  si et seulement si l'opérateur  $S$  de  $\ell^2(\mathbb{N})$  défini par la matrice  $(\langle E_{z_n}, E_{z_k} \rangle)_{n,k}$  est bicontinu et vérifie :  $\|S\| \leq C^2$ ,  $\|S^{-1}\| \leq C^2$ . Une suite d'interpolation de  $H^\infty(D)$  est une suite d'interpolation pour  $H^2(\lambda)$  [6].

b) Construction d'une suite d'interpolation de  $H^2(\lambda)$  qui n'est pas d'interpolation pour  $H^\infty(D)$ .

Cette suite  $(\sigma)$  sera réunion de suites finies  $G_n$  de points situés sur un même cercle et équiréparties sur ce cercle

$$G_n = \left\{ z_k \mid |z_k| = 1 - 2^{-g(n)} \quad \text{Arg } z_k = \frac{2k\pi}{2^{g(n)}} \quad 0 \leq k < 2^{g(n)} \right\}$$

où  $g$  est une fonction strictement croissante.  $G_n$  est la  $n^{\text{ième}}$  génération de la suite  $\sigma$  au sens de Garnett [9].  $\sigma = \bigcup_n G_n$  n'est pas une suite d'interpolation de  $H^\infty(D)$ . En effet  $\sum_{z_k \in G_n} (1 - |z_k|) = 1$  d'où la suite  $\sum_{z_i \in \sigma} (1 - |z_i|)$  est divergente.

Par construction, chaque génération est un ensemble d'interpolation de  $H^2(\lambda)$  pour une même constante  $C$ . On montre qu'on peut choisir une fonction  $g$  pour que  $\sigma$  soit d'interpolation pour  $H^2(\lambda)$ .

Démonstration. Soit  $S_p$  la matrice  $(\langle E_{z_i}, E_{z_j} \rangle)_{ij}$ ,  $z_i \in G_p$ ,  $z_j \in G_p$ .

$S_p$  est bicontinue et  $\|S_p\| \leq C^2$   
 $\|S_p^{-1}\| \leq C^2$ .

On note  $T_n$  la matrice  $(\langle E_{z_i}, E_{z_j} \rangle)_{ij}$ ,  $z_i \in \bigcup_1^n G_p$ ,  $z_j \in \bigcup_1^n G_p$ . On démontre par récurrence que  $T_n$  est une matrice inversible. Supposons  $\|T_n\| \leq K_n^2$  où  $C^2 \leq K_n^2$   
 $\|T_n^{-1}\| \leq K_n^2$ .

$T_{n+1}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} T_n & G \\ G^\infty & S_{n+1} \end{pmatrix}$

où  $G$  est la matrice  $(\langle E_{z_k}, E_{z_p} \rangle)$ ,  $z_k \in \bigcup_1^n G_j$ ,  $z_p \in G_{n+1}$ . Si  $z_k \in G_j$ ,

$z_p \in G_{n+1}$

$$\begin{aligned} |\langle E_{z_k}, E_{z_p} \rangle| &= \frac{(1-|z_k|^2)(1-|z_p|^2)}{|1-\bar{z}_k z_p|^2} \\ &\leq \frac{4 \cdot 2^{-g(j)-g(n+1)}}{[1-(1-2^{-g(j)})(1-2^{-g(n+1)})]^2} \\ &\leq 4 \cdot 2^{g(j)-g(n+1)} \end{aligned}$$

$$|\langle E_{z_k}, E_{z_p} \rangle|^2 \leq 16 \cdot 2^{2g(j) - 2g(n+1)}$$

$$\sum_{z_k \in G_j, z_p \in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p} \rangle|^2 \leq 16 \cdot 2^{3g(j) - g(n+1)}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{z_k \in \bigcup_1^n G_j, z_p \in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p} \rangle|^2 &\leq 16 \cdot 2^{-g(n+1)} \left( \sum_1^n 2^{3g(j)} \right) \\ &= \varepsilon^2(n). \end{aligned}$$

La fonction  $g$  sera choisie telle que :

$$\sum_n \varepsilon(n) < \frac{1}{2C^2}.$$

La norme de Hilbert-Schmidt de la matrice  $G$  est inférieure à  $\varepsilon(n)$ .



Si  $\lambda \in \ell^2(2^{g(1)} + 2^{g(2)} + \dots + 2^{g(n)} + 2^{g(n+1)})$  alors  $\lambda = \mu + \nu$  où :

$$\mu \in \ell^2(2^{g(1)} + \dots + 2^{g(n)}), \quad \nu \in \ell^2(2^{g(n+1)})$$

$$\|\lambda\|^2 = \|\mu\|^2 + \|\nu\|^2$$

$$\|T_{n+1} \lambda\|^2 = \|T_n \mu + G \nu\|^2 + \|G^\infty \mu + S_{n+1} \nu\|^2$$

$$\|T_{n+1} \lambda\|^2 \leq (K_n^2 \|\mu\| + \varepsilon(n) \|\nu\|)^2 + (C^2 \|\nu\| + \varepsilon(n) \|\mu\|)^2$$

$$\leq [K_n^2 + \varepsilon(n)]^2 \|\lambda\|^2$$

de même

$$\|T_{n+1}(\lambda)\|^2 \geq \left[\frac{1}{K_n^2} - \varepsilon(n)\right]^2 \|\lambda\|^2.$$

La matrice  $T_{n+1}$  de  $\bigcup_1^{n+1} G_p$  vérifie donc

$$\|T_{n+1}\| \leq K_n^2 + \varepsilon(n)$$

$$\|T_{n+1}^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{K_n^2} - \varepsilon(n)}.$$

La matrice  $T$  de  $\bigcup_n G_n$  vérifiera donc

$$\|S\| \leq C^2 + \sum_n \varepsilon(n) \leq 2C^2$$

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{C^2} - \sum_n \varepsilon(n)} \leq 2C^2$$

d'où  $\bigcup_n G_n$  est une suite d'interpolation pour  $H^2(\lambda)$ .

c) Démonstration du corollaire 1.

Si  $\sigma = \{z_i, i \in \mathbb{N}\} \subset D$  est d'interpolation pour  $H^2(\lambda)$  et n'est pas

d'interpolation pour  $H^\infty(D)$ , on définit

$$\tilde{\sigma} = \{(z_i, 0), i \in \mathbb{N}\} \subset B_2$$

$\tilde{\sigma}$  n'est pas d'interpolation pour  $H^\infty(B_2)$  car si  $g(z, \omega) \in H^\infty(B_2)$  interpole  $\omega \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  sur  $\tilde{\sigma}$ , la fonction  $f$  définie par  $f(z) = g(z, 0)$  interpole  $\omega \in \ell^\infty(\mathbb{N})$  sur  $\sigma$ .

$\tilde{\sigma}$  est l'interpolation pour  $H^2(B_2)$ . En effet les vecteurs  $e_{(z_i, 0)}$  unitaires dans  $H^2(B_2)$ , homothétiques des noyaux de Cauchy-Szegö vérifient  $\langle e_{(z_i, 0)}, e_{(z_j, 0)} \rangle = \langle E_{z_i}, E_{z_j} \rangle$ . D'où les vecteurs  $(E_{z_i})$  et  $(e_{(z_i, 0)})$  définissent la même matrice.

d) Démonstration du corollaire 2.

$\sigma$  étant comme précédemment, on définit  $\tilde{\sigma} = \{(z_i, z_i), i \in \mathbb{N}\} \subset \Delta_2$ .

La démonstration est l'analogie de la démonstration du corollaire 1.

### Bibliographie

- [1] AHLFORS, L. V. Complex Analysis. Mc Graw Hill International Student Edition, 1973.
- [2] PICK, G. Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden. Math. Ann. 77 (1916), 7-23.
- [3] NEVANLINNA, R. Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen. Ann. Acad. Sci. Fenn. serie A 13 (1919), n° 1.
- [4] SZ-NAGY, B. et KORANYI, A. Relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 7 (1956).
- [5] SARASON, D. Generalized interpolation in  $H^\infty$ . Trans. Amer. Math. Soc. 127, n° 2 (1967).
- [6] AMAR, E. Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach. Analyse Harmonique d'Orsay 152 (1975).

- [7] ADAMYAN, V. M., AROV, D. Z., KREIN, M. G. Infinite Hankel matrices and generalisations of the Caratheodory-Riesz problem and the F. Riesz problem. Funktsional'Analiz. i Ego Prilozhen 2, n° 1 (1968).
- [8] MARSCHALL, D. E. An elementary proof of the Pick-Nevanlinna interpolation theorem. Michigan Math. J. 21, n° 3 (1975).
- [9] GARNETT, J. Interpolating sequences for bounded harmonic functions. Indiana Univ. Math. J. 21, no 3 (1971).



