

Actions propres sur les espaces homogènes réductifs.

Yves BENOIST

Résumé.

Soient G un groupe de Lie réel semisimple linéaire et H un sous-groupe réductif dans G . Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un sous-groupe discret libre non abélien Γ de G agissant proprement sur G/H . Par exemple un tel groupe Γ existe pour $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(2n-1, \mathbb{R})$ mais pas pour $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})$ avec $n \geq 1$.

Proper actions on reductive homogeneous spaces.

Abstract.

Let G be a linear semisimple real Lie group and H be a reductive subgroup of G . We give a necessary and sufficient condition for the existence of a non abelian free discrete subgroup Γ of G acting properly on G/H . For instance, such a group Γ does exist for $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(2n-1, \mathbb{R})$ but does not for $\mathrm{SL}(2n+1, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})$ with $n \geq 1$.

1. Introduction.

Dans cette introduction, nous énonçons nos résultats sur le corps de base $k = \mathbb{R}$. Dans la suite du texte nous démontrerons des résultats analogues sur tout corps local k .

1.1 Actions propres de groupes libres.

Soient G un groupe de Lie réel semisimple linéaire connexe, H un sous-groupe fermé connexe réductif dans G (c'est-à-dire tel que l'action adjointe de H dans l'algèbre de Lie de G est semisimple). On sait que G contient un sous-groupe discret infini Γ qui agit proprement sur G/H si et seulement si $\text{rang}_{\mathbb{R}}(G) \neq \text{rang}_{\mathbb{R}}(H)$: c'est le phénomène de Calabi-Marcus ([Kob1]).

Le but principal de cet article est de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un sous-groupe discret libre non abélien Γ de G qui agisse proprement sur G/H .

Pour énoncer cette condition, nous avons besoin de quelques notations. Soient A_H un sous-espace de Cartan de H , A un sous-espace de Cartan de G contenant A_H , $\Sigma := \Sigma(A, G)$ le système de racines restreintes de A dans G , W le groupe de Weyl de Σ , Σ^+ un choix de racines positives, $A^+ := \{a \in A / \forall \chi \in \Sigma^+, \chi(a) \geq 1\}$ la chambre de Weyl fermée associée, ι l'involution d'opposition de A^+ (pour a dans A^+ , $\iota(a)$ est l'unique élément de A^+ conjugué à a^{-1}) et $B^+ := \{a \in A^+ / a = \iota(a)\}$.

Remarquons que B^+ diffère de A^+ si et seulement si l'une des composantes connexes du diagramme de Dynkin de Σ est de type A_n avec $n \geq 2$, D_{2n+1} avec $n \geq 1$ ou E_6 .

Un groupe Γ est dit virtuellement abélien s'il contient un sous-groupe abélien d'indice fini.

Théorème. *Avec ces notations, G contient un sous-groupe discret Γ non virtuellement abélien qui agit proprement sur G/H si et seulement si, pour tout w dans W , wA_H ne contient pas B^+ .*

Dans ce cas, on peut choisir Γ libre et Zariski dense dans G .

Exemple 1: Voici donc des espaces homogènes pour lesquels un tel sous-groupe Γ n'existe pas:

- $\text{SL}(n, \mathbb{R})/(\text{SL}(p, \mathbb{R}) \times \text{SL}(n-p, \mathbb{R}))$ où $1 \leq p < n$ et $p(n-p)$ est pair,
- $\text{SL}(2p, \mathbb{R})/\text{Sp}(p, \mathbb{R})$, $\text{SL}(2p, \mathbb{R})/\text{SO}(p, p)$ et $\text{SL}(2p+1, \mathbb{R})/\text{SO}(p, p+1)$ où $p \geq 1$,
- $\text{SO}(p+1, q)/\text{SO}(p, q)$ lorsque $p \geq q$ ou lorsque $p = q-1$ est pair,
- $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ où $G_{\mathbb{C}}$ est un groupe de Lie simple complexe et $H_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des points fixes d'une involution complexe de $G_{\mathbb{C}}$, à l'exception de $\text{SO}(4n, \mathbb{C})/(\text{SO}(p, \mathbb{C}) \times \text{SO}(4n-p, \mathbb{C}))$ pour $n \geq 2$ et p impair.

Exemple 2: Voici maintenant des espaces homogènes pour lesquels un tel sous-groupe Γ existe:

- $\text{SL}(n, \mathbb{R})/(\text{SL}(p, \mathbb{R}) \times \text{SL}(n-p, \mathbb{R}))$ où $1 \leq p < n$ et $p(n-p)$ est impair,
- $\text{SL}(n, \mathbb{R})/\text{SO}(p, n-p)$ où $1 \leq p < E(n/2)$,
- $\text{SO}(p+1, q)/\text{SO}(p, q)$ lorsque $0 \leq p \leq q-2$ ou lorsque $p = q-1$ est impair,

- $\mathrm{SO}(4n, \mathbb{C}) / (\mathrm{SO}(p, \mathbb{C}) \times \mathrm{SO}(4n - p, \mathbb{C}))$ pour $n \geq 2$ et p impair.

1.2 Quotients compacts.

On dit que l'espace homogène G/H admet un quotient compact s'il existe un sous-groupe discret Γ de G agissant proprement sur G/H et tel que le quotient $\Gamma \backslash G/H$ est compact.

Déterminer si un espace homogène donné admet un quotient compact est une question dont on ne connaît que des réponses partielles (voir [Ku], [Ko1], [K-O], [Ko2], [B-L1] et [Zi]).

Corollaire 1: *On garde les mêmes notations et on suppose que G/H est non compact et que, pour un bon choix de Σ^+ , A_H contient B^+ .*

Alors G/H n'a pas de quotient compact.

En particulier, aucun des espaces homogènes de l'exemple 1 n'a de quotient compact.

Parmi ces exemples, l'espace homogène le plus simple pour lequel la réponse n'était pas déjà connue est $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) / \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ (voir par exemple la question 3 de l'introduction de [Zi]). Très récemment et indépendamment, G. Margulis a aussi démontré que l'exemple $\mathrm{SL}(2n + 1, \mathbb{R}) / \mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})$ n'avait pas de quotient compact (communication personnelle).

Corollaire 2: *Soient $G_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie simple complexe, σ une involution complexe de $G_{\mathbb{C}}$ et $H_{\mathbb{C}} := \{g \in G_{\mathbb{C}} / \sigma(g) = g\}$. Alors l'espace symétrique $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ n'a pas de quotient compact sauf éventuellement lorsque $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} = \mathrm{SO}(4n, \mathbb{C}) / \mathrm{SO}(4n - 1, \mathbb{C})$ pour $n \geq 2$.*

Pour des résultats antérieurs dans cette direction, voir ([Kob2] 1.9).

Voici une façon plus géométrique d'énoncer le corollaire 1 pour l'espace homogène $S^{p,q} := \mathrm{SO}(p + 1, q) / \mathrm{SO}(p, q)$.

Corollaire 3: *Il n'existe pas de variété pseudoriemannienne V compacte complète, de signature (p,q) , à courbure sectionnelle constante $+1$ lorsque $p = 2n$ et $q = 2n + 1$, avec $n \geq 1$.*

En effet, une telle variété V serait un quotient compact de $S^{p,q}$.

On sait par ailleurs ([C-M],[Wo],[Ku]) qu'il n'existe pas de telles variétés V lorsque $p \geq q$ (phénomène de Calabi-Marcus) ou lorsque pq est impair (à cause de la formule de Gauss-Bonnet).

Lorsque $p = 1$ et $q = 2n$ (resp. lorsque $p = 3$ et $q = 4n$), avec $n \geq 1$ il existe de nombreuses telles variétés V car le groupe $U(1, n)$ (resp. $\mathrm{Sp}(1, n)$) agit proprement et transitivement sur $S^{p,q}$.

Décrivons maintenant les quatre étapes principales de la démonstration du théorème et de ses corollaires.

1.3 La projection de Cartan de Γ (cf. chapitre 3).

Soient K un sous-groupe compact maximal de G pour lequel on a la décomposition de Cartan: $G = K A^+ K$ et $\mu : G \rightarrow A^+$ la projection de Cartan: pour g dans G , $\mu(g)$ est l'unique élément de $K g K \cap A^+$ (voir [He] ch.9). Par exemple, si $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, on peut prendre $K = \mathrm{SO}(n)$ et $A^+ = \{\mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in G / \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > 0\}$; on a alors $\mu(g) = \mathrm{diag}(\sigma_1(g), \dots, \sigma_n(g))$ où $\sigma_i(g)^2$ est la $i^{\mathrm{ème}}$ valeur propre de ${}^t g g$.

La première étape consiste à étudier l'ensemble $\mu(\Gamma)$.

Proposition. *Soit Γ un sous-groupe discret de G non virtuellement abélien. Alors il existe un compact M de A tel que $\mu(\Gamma) \cap B^+ M$ est infini. En particulier, pour tout sous-groupe fermé H' de G contenant B^+ , Γ n'agit pas proprement sur G/H' .*

On construit explicitement une infinité d'éléments dans $\mu(\Gamma) \cap B^+ M$: on choisit convenablement f et g dans Γ et on prend les éléments $\mu(g^p f g^{-p})$, pour $p \geq 1$. Pour vérifier qu'ils conviennent, on estime les normes de leurs images dans suffisamment de représentations de G .

L'implication directe du théorème 1.1 est bien sûr une conséquence de cette proposition.

1.4 Actions de groupes nilpotents (cf. chapitre 4).

Le corollaire 1 se déduit de cette proposition et de la proposition suivante qui prouve que les groupes virtuellement abéliens Γ ne peuvent pas non plus fournir des quotients compacts.

Proposition. *Soit N un sous-groupe nilpotent de G . Alors le quotient $N \backslash G/H$ n'est pas quasicomact.*

La démonstration de cette proposition est basée sur une réduction au cas de rang réel un.

1.5 Critère de Propreté (cf. chapitre 5).

Soient H_1, H_2 deux sous-groupes fermés de G . On démontre ensuite un critère pour que H_1 agisse proprement sur G/H_2 . Ce critère ne dépend que des parties $\mu(H_1)$ et $\mu(H_2)$ et du groupe commutatif A . Il généralise deux critères connus, l'un dû à Kobayashi ([Kob1]) lorsque H_1 et H_2 sont des sous-groupes de Lie réductifs et l'autre, dû à Friedland ([Fr]) lorsque $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ et $H_2 = \mathrm{SL}(p, \mathbb{R}) \times I_{n-p}$. Le voici:

Proposition. *H_1 agit proprement sur G/H_2 si et seulement si, pour tout compact M de A , l'ensemble $\mu(H_1) \cap \mu(H_2) M$ est compact.*

Exemple: Un sous groupe discret Γ de $\mathrm{SL}(2p, \mathbb{R})$ agit proprement sur $\mathrm{SL}(2p, \mathbb{R})/\mathrm{Sp}(p, \mathbb{R})$ si et seulement si, pour tout $R > 0$, l'ensemble $\Gamma_R := \{g \in \Gamma / \frac{1}{R} \leq \sigma_i(g) \sigma_{2p+1-i}(g) \leq R, \forall i = 1, \dots, p\}$ est fini.

L'idée principale de la démonstration consiste à estimer, comme en 1.3, la projection de Cartan $\mu(g)$ d'un élément g de G à l'aide des normes des images de g dans suffisamment de représentations de G .

1.6 Construction de groupes libres (cf. chapitre 7).

Dans la dernière étape, on construit des sous-groupes libres Zariski denses de G en utilisant des idées de [Ti2], [Mar1], [G-M] et [B-L2].

Notons \log l'application logarithme qui identifie A à son algèbre de Lie \mathfrak{a} . On dira qu'une partie Ω de A^+ est un cône convexe si $\log(\Omega)$ est un cône convexe de \mathfrak{a} . Par exemple A^+ et B^+ sont des cônes convexes de A .

Proposition. *Soit Ω un cône ouvert convexe non vide de A^+ stable par l'involution d'opposition. Alors il existe un sous-groupe discret Γ libre à deux générateurs et Zariski dense dans G tel que $\mu(\Gamma)$ est inclus dans $\Omega \cup \{e\}$.*

G. Margulis m'a signalé qu'il connaissait aussi cette proposition (communication personnelle).

Le groupe Γ que nous construisons est "ε-Schottky" ce qui signifie que son image dans suffisamment de représentations V de G est "ε-Schottky sur $\mathbb{P}(V)$ ". Le chapitre 6 est consacré à la définition et aux propriétés des groupes linéaires "ε-Schottky sur $\mathbb{P}(V)$ ".

L'implication réciproque du théorème 1.1 est une conséquence des propositions 1.5 et 1.6.

1.7 La démonstration du théorème 1.1 et des propositions 1.3, 1.5 et 1.6 est valable sans modification importante sur un corps local k (cf. respectivement les théorèmes 7.5, 3.3, 5.2 et 7.4).

La démonstration de la proposition 1.4 et donc aussi celle du corollaire 1 est valable sans modification sur un corps local de caractéristique nulle (cf. respectivement les corollaires 4.1 et 7.6). Son adaptation à un corps local de caractéristique non nulle est possible, nous n'en parlons pas ici.

Ces résultats ont été annoncés dans [Be].

2. Préliminaires.

2.1 Corps locaux.

Soit k un corps local, i.e. $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ou une extension finie de \mathbb{Q}_p ou de $\mathbb{F}_p[[T^{-1}, T]]$ pour un entier premier p . On note $|\cdot|$ une valeur absolue continue sur k .

Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on pose $k^o =]0, \infty[$, $k^+ = [1, \infty[$ et $k^{++} =]1, \infty[$.

Lorsque k est non archimédien, on note \mathcal{O} l'anneau des entiers de k , \mathcal{M} l'idéal maximal de \mathcal{O} et on choisit une uniformisante, c'est à dire un élément π de \mathcal{M}^{-1} qui n'est pas dans \mathcal{O} . On pose alors $k^o = \{\pi^n/n \in \mathbb{Z}\}$, $k^+ = \{\pi^n/n \geq 0\}$ et $k^{++} = \{\pi^n/n \geq 1\}$.

Soit V un k -espace vectoriel de dimension finie. A toute base v_1, \dots, v_n de V on

associe les normes sur V et $\text{End}(V)$ définies par, si $v = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i v_i$ est dans V et g est dans $\text{End}(V)$

$$\|v\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{et} \quad \|g\| = \sup_{v \in V, \|v\|=1} \|g \cdot v\| .$$

Deux bases différentes de V fournissent bien sûr des normes équivalentes.

2.2 Décomposition de Cartan.

Pour tout k -groupe \mathbf{G} , on note G ou \mathbf{G}_k l'ensemble de ses k -points et \mathfrak{g} son algèbre de Lie.

Soit \mathbf{G} un k -groupe semisimple. Par exemple $\mathbf{G} = \mathbf{SL}(n, k)$, $\mathbf{Sp}(n, k)$ ou le groupe \mathbf{Spin} d'une forme quadratique non dégénérée (si $\text{car } k \neq 2$).

Soit \mathbf{A} un tore k -déployé maximal de \mathbf{G} et, conformément à nos conventions $A = \mathbf{A}_k$. La dimension r de \mathbf{A} est par définition le k -rang de \mathbf{G} : $r = \text{rang}_k(\mathbf{G})$. On note $X^*(\mathbf{A})$ l'ensemble des caractères de \mathbf{A} (c'est un \mathbb{Z} -module libre de rang r) et $E = X^*(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On note $\Sigma = \Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{G})$ l'ensemble des racines de \mathbf{A} dans \mathbf{G} ; ces racines sont aussi appelées k -racines ou racines restreintes, ce sont les poids non triviaux de \mathbf{A} dans la représentation adjointe du groupe \mathbf{G} . Σ est un système de racines de E ([B-T1] §5). On choisit un système de racines positives Σ^+ et on pose

$$\begin{aligned} A^o &= \{a \in A / \forall \chi \in X^*(\mathbf{A}), \chi(a) \in k^o\} \\ A^+ &= \{a \in A^o / \forall \chi \in \Sigma^+, \chi(a) \in k^+\} \\ A^{++} &= \{a \in A^o / \forall \chi \in \Sigma^+, \chi(a) \in k^{++}\} . \end{aligned}$$

Soient N le normalisateur de A dans G , L le centralisateur de A dans G et $W := N/L$ le petit groupe de Weyl de G : il s'identifie au groupe de Weyl du système de racines Σ . La partie A^+ s'appelle la chambre de Weyl positive. On a l'égalité $A^o = \cup_{w \in W} wA^+$.

On suppose maintenant \mathbf{G} simplement connexe; cette hypothèse est anodine: on se ramène à ce cas par des méthodes standards (voir [Mar2] I.1.5.5 et I.2.3.1). Il existe un sous-groupe compact maximal K de G tel que $N = (N \cap K).A$. On a alors l'égalité $G = KA^+K$ appelée *décomposition de Cartan* de G . Donc, pour tout g dans G il existe un élément $\mu(g)$ dans A^+ tel que g est dans $K\mu(g)K$. Cet élément $\mu(g)$ est unique. Nous appellerons *projection de Cartan* cette application $\mu : G \rightarrow A^+$. C'est une application continue et propre. Pour tout cela, on renvoie à ([He] 9.1.1) dans le cas archimédien et à ([Mac] 2.6.11) dans le cas non archimédien.

Soit w_o l'élément "le plus long" du groupe de Weyl relativement à A^+ : c'est l'unique élément de W tel que, pour tout a dans A^+ , $w_o(a^{-1})$ est dans A^+ . L'application $\iota : A^+ \rightarrow A^+$ définie par

$$\iota(a) = w_o(a^{-1})$$

s'appelle l'*involution d'opposition*. On a donc la formule, pour tout g dans G

$$\mu(g^{-1}) = \iota(\mu(g)) .$$

Notons enfin $B^+ := \{a \in A^+ / \iota(a) = a\}$ l'ensemble des points fixes de ι .

Exemple: - Si $G = SL(n, k)$ et $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on peut prendre $K = \{g \in G / {}^t\bar{g}g = 1\}$ et

$$A^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} \in G / \forall i, \sigma_i \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \right\}$$

- Si $G = SL(n, k)$ et k est non archimédien, on peut prendre $K = SL(n, \mathcal{O})$ et

$$A^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \pi^{q_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{q_n} \end{pmatrix} \in G / \forall i, q_i \in \mathbb{Z} \text{ et } q_1 \geq \dots \geq q_n \right\} .$$

- Dans ces deux cas, pour g dans G , on note $\sigma_i(g)$ les coefficients diagonaux de $\mu(g)$: ce sont les *valeurs singulières* de g . Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , ce sont les valeurs propres de $({}^t\bar{g}g)^{1/2}$.

2.3 Représentations de \mathbf{G} .

Bien que les rappels de ce paragraphe soient valables sur n'importe quel corps infini k , on garde les notations de 2.2. Soit ρ une représentation de G dans un k -espace vectoriel de dimension finie V . Plus précisément, ρ est un k -morphisme de k -groupes $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}(V)$. Pour $\chi \in X^*(\mathbf{A})$, on note $V_\chi := \{v \in V / \forall a \in A, \rho(a)v = \chi(a)v\}$ l'espace propre correspondant. On note $\Sigma(\rho) := \{\chi \in X^*(\mathbf{A}) / V_\chi \neq 0\}$ l'ensemble des k -poids de V . Cet ensemble est invariant sous l'action du groupe de Weyl W et on a

$$V = \bigoplus_{\chi \in \Sigma(\rho)} V_\chi .$$

On munit $X^*(\mathbf{A})$ de l'ordre défini par:

$$\chi_1 \leq \chi_2 \iff \chi_2 - \chi_1 \in \sum_{\chi \in \Sigma^+} \mathbb{N} \chi .$$

On suppose ρ irréductible. L'ensemble $\Sigma(\rho)$ a alors un unique élément λ maximal pour cet ordre appelé le plus haut k -poids de V . Lorsque \mathbf{G} est k -déployé, on a $\dim V_\lambda = 1$.

Nous aurons besoin du lemme bien connu suivant.

Lemme. *Il existe r représentations irréductibles ρ_i de G dans des k -espaces vectoriels V_i dont les plus hauts k -poids $(\omega_i)_{1 \leq i \leq r}$ forment une base du \mathbb{R} -espace vectoriel E et telles que $\dim(V_i)_{\omega_i} = 1$.*

Pour des résultats complets sur la classification des représentations de G , on renvoie à [B-T 1 et 2] ainsi qu'à [Ti1].

Démonstration: On choisit des représentations irréductibles σ_i de G dans des k -espaces vectoriels W_i dont les plus hauts k -poids $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ forment une base du \mathbb{R} -espace vectoriel E ([Ti1] 7.2). On pose $d_i = \dim(W_i)_{\lambda_i}$, $\omega_i = d_i \lambda_i$ et on prend pour V_i le sous-quotient simple de $\Lambda^{d_i}(W_i)$ admettant ω_i comme k -poids.

Exemple: Lorsque $G = SL(n, k)$, on a $r = n - 1$ et $V_i = \Lambda^i(k^n)$, pour $1 \leq i \leq n - 1$.

2.4 Projection de Cartan et représentations de G .

Le lemme suivant est facile et fondamental. A la lumière du lemme 2.3, il affirme que, à une constante multiplicative bornée près, le calcul de $\mu(g)$ équivaut au calcul des normes $\|\rho_i(g)\|$ pour $i = 1, \dots, r$.

Lemme. *Pour toute représentation irréductible (V, ρ) de G de plus haut k -poids χ et toute norme sur V , il existe une constante $C_\chi > 0$ telle que, pour tout g dans G , on a*

$$C_\chi^{-1} \leq \frac{|\chi(\mu(g))|}{\|\rho(g)\|} \leq C_\chi .$$

Démonstration: On peut supposer que la norme choisie est associée à une base formée de vecteurs propres pour l'action de A (cf. 2.1) de sorte que, pour a dans A^+ , on a

$$|\chi(a)| = \|\rho(a)\| .$$

Notons $a = \mu(g)$ de sorte que $g = k_1 a k_2$ avec k_1, k_2 dans K . On a alors

$$\frac{|\chi(\mu(g))|}{\|\rho(g)\|} = \frac{\|\rho(a)\|}{\|\rho(k_1 a k_2)\|} \in [C_\chi^{-1}, C_\chi]$$

où $C_\chi = \sup_{k \in K} \|\rho(k)\|^2$. C'est ce que l'on voulait.

3. La projection de Cartan de Γ .

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 3.3 qui généralise la proposition 1.3.

3.1 Paires H -propres.

Commençons par quelques banalités dont nous mesurerons plus tard l'efficacité.

Définition. *Soient H un groupe localement compact et H_1, H_2 deux parties fermées de H . Nous dirons que (H_1, H_2) est H -propre si, pour tout compact L de H , $H_1 \cap L H_2 L$ est compact.*

Remarques. 1) Si (H_1, H_2) est H -propre, alors (H_2, H_1) est H -propre et, pour tous h_1, h_2 dans H , $(h_1 H_1 h_1^{-1}, h_2 H_2 h_2^{-1})$ est H -propre.

2) Cette définition peut être généralisée de la façon suivante: soient E et X des espaces topologiques localement compacts et $a : E \times X \rightarrow X$ une application continue, c'est à dire que a est une famille continue $e \rightarrow a_e$ de transformations continues de X . Nous dirons que cette famille est propre si, pour tout compact L de X , l'ensemble $E_L := \{e \in E / eL \cap L \neq \emptyset\}$ est compact. Lorsque E est un semi-groupe et que a est une action, on retrouve la définition habituelle d'une action propre.

Dire que (H_1, H_2) est H -propre équivaut à dire que la famille de transformations de H

$$\begin{aligned} (H_1 \times H_2) \times H &\rightarrow H \\ ((h_1, h_2), h) &\rightarrow a_{h_1, h_2}(h) = h_1 h h_2^{-1} \end{aligned}$$

est propre.

Le lemme suivant est une application directe des définitions. Sa vérification est laissée au lecteur.

Lemme 3.1.1 *Soient H un groupe localement compact, H_1 un sous-semigroupe fermé de H et H_2 un sous-groupe fermé de H . On a l'équivalence:*

$$(H_1, H_2) \text{ est } H\text{-propre} \iff H_1 \text{ agit proprement sur } G/H_2.$$

Définition. *Soient H un groupe localement compact et H_1, H'_1 deux parties fermées de H . Nous dirons que H'_1 est inclus dans H_1 modulo les compacts de H , si il existe un compact L de H tel que $H'_1 \subset LH_1L$.*

Lemme 3.1.2 *Soient H un groupe localement compact, H_1, H'_1, H_2, H'_2 quatre parties fermées de H telles que (H_1, H_2) est H -propre et H'_j est inclus dans H_j modulo les compacts de H pour $j = 1, 2$. Alors la paire (H'_1, H'_2) est H -propre.*

Ce lemme est encore une conséquence immédiate des définitions. C'est le rapprochement de ce lemme et de la décomposition de Cartan qui explique le phénomène de Calabi-Markus.

3.2 Croissance de $g_1^p f g_2^p$.

Reprenons les notations de 2.2. Soient \mathbf{G} un k -groupe semisimple simplement connexe, $G := \mathbf{G}_k$ et $\mu : G \rightarrow A^+$ une projection de Cartan.

Proposition *Soient g_1, g_2 deux éléments de G et F une partie non vide de G . Alors il existe une partie non vide F' de F , Zariski-ouverte dans F telle que, pour tous f, f' dans F' , il existe un compact $M_{f, f'}$ de A tel que, pour tout $p \geq 1$, on a*

$$\mu(g_1^p f g_2^p) \cdot \mu(g_1^p f' g_2^p)^{-1} \in M_{f, f'}.$$

Remarque. Dans cet énoncé, l'expression "Zariski-ouvert dans F " signifie ouvert pour la topologie induite sur F par la topologie de Zariski de G . Autrement dit, F' est une partie non vide de F dont le complémentaire est défini par des équations polynomiales.

Démonstration. On peut supposer que F est Zariski-connexe de sorte que l'intersection de deux ouverts de Zariski non vides de F est encore un ouvert de Zariski non vide de F .

La proposition est alors une conséquence du lemme 2.4 et du lemme élémentaire suivant appliqué aux parties $\rho_i(F)$ où les ρ_i sont les représentations de G introduites dans le lemme 2.3.

Soit V un k -espace vectoriel de dimension d . Prenons les notations de 2.1.

Lemme *Soient g_1, g_2 dans $GL(V)$ et F une partie non vide de $\text{End}(V) - 0$. Alors il existe une partie non vide F' de F , Zariski-ouverte dans F telle que, pour tous f, f' dans F' , il existe une constante $C_{f,f'} > 1$ telle que, pour tout $p \geq 1$, on a*

$$C_{f,f'}^{-1} \leq \|g_1^p f g_2^p\| \cdot \|g_1^p f' g_2^p\|^{-1} \leq C_{f,f'} .$$

Nous conseillons au lecteur de prouver ce lemme dans le cas particulier où g_1 et g_2 sont des matrices diagonales avant d'en lire la démonstration.

Démonstration. On note φ l'endomorphisme de $\text{End}(V)$ donné par $\varphi(f) = g_1 f g_2$. Quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer que les valeurs propres de φ sont dans k .

On munit $]0, \infty[\times \mathbb{N}$ de l'ordre lexicographique:

$$(\lambda, r) \leq (\lambda', r') \iff \lambda < \lambda' \text{ ou } (\lambda = \lambda' \text{ et } r \leq r')$$

On note, pour λ dans $]0, \infty[$ et r dans \mathbb{N} , $W^{\lambda,r}$ le sous-espace vectoriel de $\text{End}(V)$:

$$W^{\lambda,r} := \sum_{\substack{(z,s) \in k \times \mathbb{N} \\ (|z|, s) < (\lambda, r)}} \text{Ker}((\varphi - z)^s) .$$

Soit (λ, r) le plus grand élément de $]0, \infty[\times \mathbb{N}$ tel que $F \not\subset W^{\lambda,r}$ et $F' = F - (F \cap W^{\lambda,r})$. Il est clair que, pour tout f dans F' , il existe une constante $A_f > 0$ telle que la suite $p \rightarrow \|\varphi^p(f)\| = \|g_1^p f g_2^p\|$ est équivalente à $A_f p^r \lambda^p$. D'où le résultat.

3.3 Les points fixes de l'involution d'opposition.

Théorème. *Soient k un corps local, \mathbf{G} un k -groupe semisimple, \mathbf{A} un tore k -déployé maximal de \mathbf{G} , A^+ une chambre de Weyl positive, ι l'involution d'opposition, $B^+ := \{a \in A^+ / \iota(a) = a\}$ et Γ un sous-groupe discret de $G := \mathbf{G}_k$. On suppose que $\text{car} k = 0$ (resp. $\text{car} k \neq 0$).*

Si la paire (Γ, B^+) est G -propre alors Γ est virtuellement abélien (resp. nilpotent).

En particulier, si H est un sous-groupe de G contenant B^+ et si Γ agit proprement sur G/H alors Γ est virtuellement abélien (resp. nilpotent).

Démonstration. On peut supposer que \mathbf{G} est simplement connexe et que Γ est Zariski-connexe. On note $\mu : G \rightarrow A^+$ une projection de Cartan. Soit g un élément de Γ . D'après

la proposition précédente, il existe une partie non vide Γ' de Γ , Zariski-ouverte dans Γ telle que, pour tout f dans Γ' , il existe un compact M_f de A tel que, pour tout $p \geq 1$,

$$\mu(g^p f g^{-p}) \cdot \mu(g^p f^{-1} g^{-p})^{-1} \in M_f .$$

Donc, d'après le lemme ci-dessous, il existe un compact M'_f de A tel que, pour tout $p \geq 1$,

$$\mu(g^p f g^{-p}) \in M'_f B^+ .$$

Par hypothèse, l'ensemble $\mu(\Gamma) \cap B^+ M$ est compact. Comme Γ est discret et μ propre, l'ensemble $\{g^p f g^{-p} / p \geq 0\}$ est fini. Soient Z_f le centralisateur de f dans Γ et Z_Γ le centre de Γ . Il existe donc $p_0 \geq 1$ tel que g^{p_0} est dans Z_f .

Par noethérianité, il existe une partie finie Γ_0 de Γ telle que

$$Z_\Gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} Z_\gamma .$$

Comme Γ' engendre Γ , on peut supposer que Γ_0 est inclus dans Γ' . Il existe donc $p \geq 1$ tel que g^p est dans Z_Γ .

Le groupe Γ/Z_Γ est un groupe de torsion linéaire. L'affirmation ci-dessous prouve que Γ/Z_Γ contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini. Comme Γ est Zariski connexe, Γ est nilpotent.

Si maintenant k est de caractéristique nulle, comme Γ est nilpotent et discret, Γ est de type fini. Mais alors Γ/Z_Γ est un groupe fini. C'est ce que l'on voulait.

Dans cette démonstration, on a utilisé le lemme et l'affirmation ci-dessous.

Lemme. *Soit M une partie compacte de A . Alors il existe une partie compacte M' de A telle que, pour tout a dans A^+ , on a l'implication*

$$a \cdot \iota(a)^{-1} \in M \Rightarrow a \in B^+ M' .$$

Démonstration. Lorsque $k = \mathbb{R}$, la composante connexe A_e de A s'identifie par l'application logarithme à un \mathbb{R} -espace vectoriel, l'involution ι à une symétrie linéaire et A^+ à un cône convexe invariant par ι . On peut prendre $M' = \{m \in A / m^2 \in M\}$.

Le cas général n'est pas plus compliqué. Il existe une partie finie L de A^+ telle que, pour tout a dans A^+ , il existe l dans L et c dans A^+ tels que $a = c^2 l$. On peut alors écrire $a = b m$ où $b = c \cdot \iota(c)$ est dans B^+ et $m = l \cdot c \cdot \iota(c)^{-1}$ est dans le compact $M' := \{m \in A / m^2 \in M L \iota(L)^{-1}\}$.

Affirmation. *Soit k un corps, V un k -espace vectoriel de dimension finie et Γ un sous-groupe de torsion de $GL(V)$.*

a) (Schur, voir [C-R] p.258) *Si $\text{car}(k) = 0$, Γ contient un sous-groupe abélien d'indice fini dont tous les éléments sont semisimples.*

b) ([Ti2] 2.8) *Si $\text{car}(k) \neq 0$, on note k_a la clôture algébrique dans k du corps premier de k . Alors chaque sous-quotient simple V' de V admet une base dans laquelle les coefficients*

des éléments de Γ sont dans k_a . En particulier, si k_a est fini (c'est le cas lorsque k est local), Γ admet un sous-groupe nilpotent d'indice fini dont tous les éléments sont unipotents.

c) (Burnside) Dans tous les cas, si Γ est de type fini, Γ est fini.

4. Action de groupes nilpotents.

Dans cette partie k est un corps local de caractéristique nulle. Le but de cette partie est de démontrer le théorème 4.1 et son corollaire qui généralise la proposition 1.4.

4.1 Non quasicompacité de $N \backslash G/H$.

Théorème. Soient k un corps local de caractéristique nulle, \mathbf{G} un k -groupe réductif, \mathbf{H} un k -sous-groupe de \mathbf{G} , $G := \mathbf{G}_k$, $H := \mathbf{H}_k$ et N un sous-groupe nilpotent de G .

Si $N \backslash G/H$ est quasicompact alors \mathbf{H} contient un k -sous-groupe unipotent maximal de \mathbf{G} .

La démonstration de cette proposition est basée sur une réduction au k -rang un. Elle est menée dans les sections 4.2 à 4.5. Enonçons tout d'abord un corollaire de ce théorème.

Corollaire. Mêmes notations. On suppose que G/H n'est pas compact.

a) Si \mathbf{H} est réductif alors $N \backslash G/H$ n'est pas quasicompact.

b) ($k = \mathbb{R}$) Si N agit proprement sur G/H alors $N \backslash G/H$ n'est pas compact.

Démonstration. a) On peut supposer \mathbf{G} simplement connexe. On décompose \mathbf{G} en un produit $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{an} \times \mathbf{G}_{is}$ où \mathbf{G}_{an} est le plus grand k -sous-groupe de \mathbf{G} distingué connexe et anisotrope et où \mathbf{G}_{is} est le plus grand k -sous-groupe de \mathbf{G} distingué connexe et sans facteur anisotrope.

Si \mathbf{H} contient un k -sous-groupe unipotent maximal de \mathbf{G} . Comme \mathbf{H} est réductif, \mathbf{H} contient \mathbf{G}_{is} donc G/H est un quotient du groupe des k -points G_{an} qui est compact ([B-T1] 9.4). Contradiction.

b) Si \mathbf{H} contient un k -sous-groupe unipotent maximal \mathbf{U} de \mathbf{G} . Il existe un sous-groupe compact maximal K de G tel que $G = KUK$ ([Kos] 5.1). On a donc $G = KHK$ et G est inclus dans H modulo les compacts de G . Le lemme 3.1.1 prouve que la paire (N, G) est G propre. Donc N est un groupe compact. Contradiction.

4.2 k -sous-groupes paraboliques.

Introduisons quelques notations classiques (voir [Bor] §21) qui ne nous seront utiles que dans cette partie.

Soient \mathbf{A} un tore k -déployé maximal de \mathbf{G} , $\Sigma = \Sigma_{\mathbf{G}}$ le système des k -racines de \mathbf{A} dans \mathbf{G} , Σ^+ un choix de racines positives, Π les k -racines simples de Σ^+ , \mathbf{L} le centralisateur de \mathbf{A} dans \mathbf{G} et \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de \mathbf{G} . Comme d'habitude, on note par la lettre romaine correspondante A , L , etc... le groupe des k -points.

Pour α dans Σ , on note $\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} / \forall a \in A, \text{Ada}(X) = \alpha(a)X\}$ l'espace radiciel associé, $\mathfrak{g}_{(\alpha)} := \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ et $\mathbf{U}_{(\alpha)}$ l'unique k -sous-groupe unipotent (normalisé par \mathbf{L}) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(\alpha)}$. Une partie Θ de Σ est dite close si $\alpha, \beta \in \Theta, \alpha + \beta \in \Sigma \Rightarrow \alpha + \beta \in \Theta$. On note $\langle \Theta \rangle$ la plus petite partie close de Σ contenant Θ . Pour toute partie close Θ de Σ^+ , on note \mathbf{U}_Θ l'unique k -sous-groupe unipotent (normalisé par \mathbf{L}) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\Theta := \bigoplus_{\alpha \in \Theta} \mathfrak{g}_\alpha$. On note $\mathbf{U} := \mathbf{U}_{\Sigma^+}$, c'est un k -sous-groupe unipotent maximal de \mathbf{G} . Le k -groupe $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ est un k -sous-groupe parabolique minimal de \mathbf{G} . Pour toute partie Θ de Π , on note \mathbf{A}^Θ la composante Zariski connexe de $\bigcap_{\alpha \in \Theta} \mathbf{Ker}(\alpha)$, \mathbf{L}_Θ le centralisateur de \mathbf{A}^Θ , $\mathbf{U}^\Theta := \mathbf{U}_{\Sigma^+ - \langle \Theta \rangle}$ et $\mathbf{P}_\Theta := \mathbf{L}_\Theta \mathbf{U}^\Theta$ le k -sous-groupe parabolique standard associé à Θ . On a aussi l'égalité pour les k -points $P_\Theta = L_\Theta U^\Theta$ ([B-T1] 3.14).

Dans le lemme bien connu suivant, on n'a pas besoin de supposer que k est un corps local.

Lemme 4.2.1 ($\text{car}(k) = 0$) a) Soit \mathbf{U}' un k -sous-groupe de \mathbf{U} et $[\mathbf{U}, \mathbf{U}]$ le sousgroupe dérivé de \mathbf{U} . Si $\mathbf{U} = \mathbf{U}' \cdot [\mathbf{U}, \mathbf{U}]$ alors $\mathbf{U}' = \mathbf{U}$.

b) On a $[\mathbf{U}, \mathbf{U}] = \mathbf{U}_{\Sigma^+ - \Pi}$.

Démonstration. a) Cela est valable pour n'importe quel groupe unipotent: si $\mathbf{U}' \neq \mathbf{U}$, par le théorème d'Engel, on peut supposer \mathbf{U}' de codimension 1; \mathbf{U}' est alors distingué dans \mathbf{U} et \mathbf{U}/\mathbf{U}' est abélien. Donc $\mathbf{U} \neq \mathbf{U}' \cdot [\mathbf{U}, \mathbf{U}]$. Contradiction.

b) Cela résulte de l'égalité $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ pour tout α, β dans Σ^+ .

Le lemme suivant permettra de supposer que \mathbf{H} est résoluble k -déployé.

Lemme 4.2.2 Soit \mathbf{G} un k -groupe réductif, \mathbf{H} un k -sous-groupe. Alors il existe un tore k -déployé maximal \mathbf{A} de \mathbf{G} et un k -sous-groupe unipotent maximal \mathbf{U} normalisé par \mathbf{A} tel que $H/(H \cap \mathbf{A}\mathbf{U})$ est compact.

Autrement dit, H rencontre le k -sous-groupe résoluble k -déployé maximal $\mathbf{A}\mathbf{U}$ de façon cocompacte.

Démonstration. Soient \mathbf{A} un sous-tore k -déployé maximal de \mathbf{G} et \mathbf{U} un k -sous-groupe unipotent maximal normalisé par \mathbf{A} . D'après la décomposition d'Iwasawa ([He] IX.1.3) pour le cas archimédien et [Mac] pour le cas non archimédien), l'espace homogène $G/\mathbf{A}\mathbf{U}$ est compact.

D'après ([B-T2] 3.18), les orbites de H dans $G/\mathbf{A}\mathbf{U}$ sont localement fermées. Donc H a une orbite fermée dans $G/\mathbf{A}\mathbf{U}$. On peut supposer que c'est l'orbite du point base. Le quotient $H/(H \cap \mathbf{A}\mathbf{U})$ est alors homéomorphe à cette orbite (loc. cit.) et donc $H/(H \cap \mathbf{A}\mathbf{U})$ est compact.

4.3 Réduction au cas de k -rang un.

Montrons que le théorème 4.1 est vrai si il est vrai pour les k -groupes \mathbf{G} de k -rang égal à un.

D'après 4.2.2, on peut supposer $\mathbf{H} \subset \mathbf{A}\mathbf{U}$. D'après ([Bor] 10.6 et 19.2), on peut supposer que $\mathbf{H} = \mathbf{A}'\mathbf{U}'$ où \mathbf{A}' est un sous-tore de \mathbf{A} et \mathbf{U}' un k -sous-groupe unipotent de \mathbf{U} . On a alors l'égalité pour les k -points: $H = A'U'$ ([Bor] 15.8).

De la même façon, on peut supposer que N est le groupe des k -points de son adhérence de Zariski \mathbf{N} , que \mathbf{N} est un k -sous-groupe nilpotent Zariski-connexe maximal de $\mathbf{A}\mathbf{U}$ et que $\mathbf{N} = \mathbf{A}''\mathbf{U}''$ où \mathbf{A}'' est un sous-tore de \mathbf{A} et \mathbf{U}'' un k -sous-groupe unipotent de \mathbf{U} . Il existe donc une partie Θ de Π telle que $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}^\Theta$ et $\mathbf{U}'' = \mathbf{U}_{\langle \Theta \rangle}$. On a encore l'égalité pour les k -points: $N = A''U''$.

On veut montrer que $\mathbf{U}' = \mathbf{U}$. Si ce n'est pas le cas, on peut supposer, grâce à 4.2.1 que \mathbf{U}' contient $[\mathbf{U}, \mathbf{U}]$ et que \mathbf{U}' est de codimension 1 dans \mathbf{U} . Notons $\mathbf{U}'_{(\alpha)} := \mathbf{U}' \cap \mathbf{U}_{(\alpha)}$ et $\Xi := \{\alpha \in \Pi / \mathbf{U}'_{(\alpha)} \neq \mathbf{U}_{(\alpha)}\}$. L'ensemble Ξ est non vide.

Comme \mathbf{U}' est de codimension 1 dans \mathbf{U} et est normalisé par \mathbf{A}' , on a $\mathbf{A}' \subset \mathbf{Ker}(\alpha - \alpha')$, pour tout $\alpha, \alpha' \in \Xi$. On peut supposer que \mathbf{A}' est la composante connexe de $\bigcap_{\alpha, \alpha' \in \Xi} \mathbf{Ker}(\alpha - \alpha')$.

Le sous-groupe AU est fermé dans G et contient N et H . Donc $N \backslash AU / A'U'$ est quasicompact et $A'' \backslash A / A'$ aussi. On en déduit que $A''A'$ est d'indice fini dans A ([Bor] 8.5). Donc $\text{card}(\Xi \cap \Theta) \leq 1$. Pour plus de clarté, distinguons deux cas:

1^{er} cas : $\Xi \cap \Theta = \emptyset$. On fixe un élément α dans Ξ . Notons \mathbf{P}_α le k -sous-groupe parabolique standard associé à $\{\alpha\}$ et $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha \mathbf{U}^\alpha$ sa décomposition de Levi. Le groupe des k -points P_α est fermé dans G et contient N et H , donc $N \backslash P_\alpha / H$ est quasicompact.

On a l'égalité $U = U_{(\alpha)}.U'$ car U/U' s'identifie à un k -espace vectoriel de dimension un et l'image de $U_{(\alpha)}$ y est un k sous-espace vectoriel non trivial. On a donc l'égalité $P_\alpha = L_\alpha U = L_\alpha U'$ et l'identification

$$P_\alpha / H \simeq L_\alpha / A'U'_{(\alpha)}.$$

Etudions l'action de N dans ce quotient. D'une part, le groupe U^Ξ est normalisé par P_α et est inclus dans U' , il agit donc trivialement sur ce quotient. Son sous-groupe U'' aussi. D'autre part, le groupe A'' est inclus dans L_α . Donc

$$N \backslash P_\alpha / H \simeq A'' \backslash L_\alpha / A'U'_{(\alpha)}$$

n'est pas quasicompact car le k -rang semisimple de L_α est égal à 1. Contradiction.

2^{ème} cas : $\Xi \cap \Theta = \{\alpha\}$. Le quotient $N \backslash P_\alpha / H$ est encore quasicompact et on a l'égalité $P_\alpha = L_\alpha U'$ et donc la même identification

$$P_\alpha / H \simeq L_\alpha / A'U'_{(\alpha)}.$$

Cette fois on a l'égalité $N = A''U'' = (A''U_{(\alpha)}).U''^\alpha$ où $U''^\alpha = U'' \cap U^\alpha$. De nouveau U''^α est inclus dans U^Ξ car $\langle \Theta \rangle \cap \langle \Xi \rangle = \langle \alpha \rangle$ et U''^α agit trivialement sur ce quotient. D'autre part, A'' est encore inclus dans L_α , il est même cette fois inclus dans le centre de L_α . Donc

$$N \backslash P_\alpha / H \simeq A''U_{(\alpha)} \backslash L_\alpha / A'U'_{(\alpha)}$$

n'est pas quasicompact pour la même raison. Contradiction.

4.4 Le cas de k -rang un.

Pour terminer la démonstration du théorème 4.1, on peut donc supposer que le k -rang semisimple de \mathbf{G} est égal à 1. Soit \mathbf{Z} le centre de \mathbf{G} , le quotient $N \backslash G / (\mathbf{ZH})_k$ est encore quasicompact. On peut donc supposer que \mathbf{G} est semisimple et adjoint.

Notons α l'unique élément de Π et $\mathbf{V} = \mathbf{U}_{(-\alpha)}$. Le lemme suivant est crucial pour notre démonstration.

Lemme. (car(k) = 0 , rang $_k(\mathbf{G})$ = 1)

a) Soient v_n, u_n et a_n des suites dans V, U et A respectivement telles que la suite $g_n := v_n u_n a_n$ converge dans G . Alors la suite u_n est bornée dans U .

b) Il existe un élément v_o de V tel que si b_n, u_n et a_n sont des suites dans A, U et A respectivement et si la suite $h_n := b_n v_o u_n a_n$ converge dans G , alors la suite u_n est bornée dans U .

Remarques. - La condition " u_n bornée dans U " signifie que la suite u_n reste dans un compact de U . Il est probable que dans les deux cas la suite u_n converge. Nous n'en aurons pas besoin.

- Ce lemme n'est pas vrai pour $\mathbf{G} = \mathbf{SL}(3, k)$, ce qui justifie la réduction précédente à une situation de k -rang égal à un . Prendre , avec $t = t_n \rightarrow 0$

$$g_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t^{-1} & -t^{-2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Montrons tout d'abord pourquoi ce lemme implique le théorème 4.1. Pour les mêmes raisons qu'en 4.3, on peut supposer que $\mathbf{H} = \mathbf{AU}' = \mathbf{U}'\mathbf{A}$ où \mathbf{U}' est un k -sous-groupe unipotent de codimension 1 de \mathbf{U} qui contient $[\mathbf{U}, \mathbf{U}]$ et que N est le groupe des k -points d'un k -sous-groupe nilpotent connexe maximal \mathbf{N} de \mathbf{G} . A conjugaison près par un élément de G , il n'y a que deux possibilités pour \mathbf{N} : $\mathbf{N} = \mathbf{V}$ ou $\mathbf{N} = \mathbf{A}$ (rappelons que \mathbf{V} et \mathbf{U} sont conjugués sur k). Le quotient U/U' est homéomorphe à k , on peut donc choisir une suite u_n dans U telle que l'image de cette suite dans U/U' tende vers l'infini.

1^{er} cas : $\mathbf{N} = \mathbf{V}$. Supposons par l'absurde que $V \backslash G / U' A$ est quasicompact. Quitte à extraire une sous-suite, l'image de la suite u_n dans ce quotient converge (vers une limite pas forcément unique!). On peut alors trouver des suites v_n dans V , u'_n dans U' et a_n dans A telles que la suite $g_n := v_n u_n u'_n a_n$ converge dans G . Le lemme précédent prouve que la suite $u_n u'_n$ est bornée dans U . Contradiction.

2^{ème} cas : $\mathbf{N} = \mathbf{A}$. On procède de la même façon. Supposons par l'absurde que $A \backslash G / U' A$ est quasicompact. Quitte à extraire une sous-suite, l'image de la suite $v_o u_n$

dans ce quotient converge. On peut alors trouver des suites b_n dans A , u'_n dans U' et a_n dans A telles que la suite $h_n := b_n v_o u_n u'_n a_n$ converge dans G . Le lemme précédent prouve que la suite $u_n u'_n$ est bornée dans U . Contradiction.

4.5 La suite u_n .

Il nous reste à démontrer le lemme 4.4. L'algèbre de Lie \mathfrak{g} admet la décomposition définie sur k

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} .$$

On note \mathfrak{g}_k l'algèbre de Lie de G . On dit que Σ est réduit lorsque $\mathfrak{g}_{\pm 2\alpha} = 0$. Pour β dans $\Sigma \cup \{0\}$, on note p_β la projection sur \mathfrak{g}_β parallèlement aux autres $\mathfrak{g}_{\beta'}$ et $(\mathfrak{g}_\beta)_k$ l'intersection de \mathfrak{g}_β avec \mathfrak{g}_k . On note H_o l'élément de $\mathfrak{a} := \text{Lie}(\mathbf{A})$ tel que $d\alpha(H_o) = 2$. Pour p dans \mathbb{Z} , $\mathfrak{g}_{p\alpha}$ est aussi l'espace propre de $\text{ad}H_o$ pour la valeur propre $2p$.

Le lemme suivant est une variante du théorème de Jacobson-Morozov. Il est valable pour n'importe quelle algèbre de Lie semisimple graduée sur un corps de caractéristique nulle.

Lemme. (car(k) = 0) Soit X un élément non nul de $(\mathfrak{g}_{q\alpha})_k$ avec $q \neq 0$. Alors il existe un $\text{SL}(2)$ -triplet (Y, H, X) avec Y dans $(\mathfrak{g}_{-q\alpha})_k$ et H dans $(\mathfrak{g}_0)_k$.

Démonstration. On reprend la démonstration du théorème de Jacobson-Morozov (voir par exemple [Bou] VIII.11.2). Comme X est nilpotent, on peut trouver H dans $\text{ad}X(\mathfrak{g}_k)$ tel que $[H, X] = 2X$. Quitte à remplacer H par $p_0(H)$, on peut supposer que H est dans $(\mathfrak{g}_0)_k$. On peut alors compléter (H, X) en un $\text{SL}(2)$ -triplet (Y, H, X) (loc.cit.). Quitte à remplacer Y par $p_{-q\alpha}(Y)$, on peut supposer que Y est dans $(\mathfrak{g}_{-q\alpha})_k$.

Remarque. Dans notre situation \mathbf{G} est de k -rang égal à 1. Donc comme H engendre l'algèbre de Lie d'un tore k -déployé, H est dans \mathfrak{a} et $d\alpha(H) = 2/q$. Donc $H = q^{-1}H_o$. Lorsque $q > 0$, la théorie des $\text{SL}(2)$ -modules ([Bou] VIII.1.3) prouve que la restriction de $\text{ad}X$ à $\mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ est injective et que $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ est inclus dans l'image de $\text{ad}X$; de même lorsque $q < 0$, en échangeant α et $-\alpha$.

Démonstration du lemme 4.4 lorsque Σ est réduit. On choisit v_o de la forme e^Y avec Y non nul dans $(\mathfrak{g}_{-\alpha})_k$. Remarquons que l'exponentielle est bien définie car Y est nilpotent. La discussion précédente prouve que la restriction de $\text{ad}Y$ à \mathfrak{g}_α est injective. On écrit $u_n = e^{X_n}$ avec X_n dans $(\mathfrak{g}_\alpha)_k$.

a) On a l'égalité

$$p_\alpha(\text{Ad}g_n(H_o)) = p_\alpha(\text{Ad}(v_n u_n a_n)(H_o)) = \text{ad}X_n(H_o) = -2X_n .$$

Donc la suite X_n converge et u_n aussi.

b) On a l'égalité

$$p_0(\text{Ad}h_n(H_o)) = p_0(\text{Ad}(b_n v_o u_n a_n)(H_o)) = H_o + \text{ad}Y(\text{ad}X_n(H_o)) = H_o - 2 \text{ad}Y(X_n) .$$

Donc la suite $\text{ad}Y(X_n)$ converge, X_n et u_n aussi.

Démonstration du lemme 4.4 lorsque Σ n'est pas réduit. On choisit v_o de la forme e^Y avec Y non nul dans $(\mathfrak{g}_{-2\alpha})_k$. Comme précédemment, la restriction de $\text{ad}Y$ à $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ est injective. On écrit $u_n = e^{X_n + Z_n}$ avec X_n dans $(\mathfrak{g}_\alpha)_k$ et Z_n dans $(\mathfrak{g}_{2\alpha})_k$. On pose $\psi(X_n) = (\text{ad}X_n)^2 \circ p_0$.

a) On a l'égalité

$$p_{2\alpha}(\text{Ad}g_n(H_o)) = p_{2\alpha}(\text{Ad}(v_n u_n a_n)(H_o)) = \frac{1}{2}(\text{ad}X_n)^2(H_o) + \text{ad}Z_n(H_o) = -4Z_n.$$

Donc la suite Z_n converge. Plus généralement, on a l'égalité

$$p_{2\alpha} \circ \text{Ad}g_n \circ p_0 = \frac{1}{2}\psi(X_n) + \text{ad}Z_n \circ p_0.$$

Donc la suite $\psi(X_n)$ converge. Le lemme ci-dessous prouve que la suite X_n est bornée, et donc u_n aussi.

b) On a l'égalité

$$p_0(\text{Ad}h_n(H_o)) = p_0(\text{Ad}(b_n v_o u_n a_n)(H_o)) = H_o + \text{ad}Y(\text{ad}Z_n(H_o)) = H_o - 4\text{ad}Y(Z_n).$$

Donc la suite Z_n converge. Plus généralement, on a l'égalité

$$p_0 \circ \text{Ad}h_n \circ p_0 = \frac{1}{2}\text{ad}Y \circ \psi(X_n) + \text{ad}Y \circ \text{ad}Z_n \circ p_0.$$

Donc la suite $\psi(X_n)$ converge, X_n est bornée, et donc u_n aussi.

On a utilisé le lemme suivant.

Lemme. ($\text{car}(k) = 0$, $\text{rang}_k(\mathbf{G}) = 1$ et Σ non réduit) L'application

$$\begin{aligned} \psi : (\mathfrak{g}_\alpha)_k &\longrightarrow \text{Hom}_k(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{2\alpha}) \\ X &\longrightarrow \psi(X) = (\text{ad}X)^2 \circ p_0 \end{aligned}$$

est propre.

Démonstration. Le lemme précédent et sa remarque prouvent que si X est non nul dans $(\mathfrak{g}_\alpha)_k$, l'espace $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ est inclus dans l'image de $(\text{ad}X)^2$ et donc $\psi(X)$ est non nul. Notre lemme résulte alors de l'affirmation élémentaire suivante dont nous omettons la démonstration.

Affirmation. Soient E, F deux k -espaces vectoriels de dimension finie et $\psi : E \rightarrow F$ une application continue homogène de degré 2 (i.e. $\psi(\lambda x) = \lambda^2 \psi(x)$, pour tous λ dans k et x dans E) telle que $\psi^{-1}(0) = 0$. Alors ψ est propre.

5. Critère de propreté.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 5.2 qui généralise la proposition 1.5. On reprend les notations de 2.2.

5.1 Inclusion modulo les compacts.

Proposition. *Soient \mathbf{G} un k -groupe semisimple simplement connexe, $G := \mathbf{G}_k$ et $\mu : G \rightarrow A^+$ une projection de Cartan. Alors, pour tout compact L de G , il existe un compact M de A tel que, pour tout g dans G , $\mu(LgL) \subset \mu(g)M$.*

Démonstration. Fixons un compact L de G tel que $L = L^{-1}$. Soit (V, ρ) une représentation irréductible de G de plus haut k -poids χ . D'après le lemme 2.3, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 1$ telle que, pour tous g dans G et l_1, l_2 dans L ,

$$C^{-1} \leq |\chi(\mu(l_1gl_2))| \cdot |\chi(\mu(g))|^{-1} \leq C.$$

D'après le lemme 2.4, il suffit de trouver une constante $C' > 1$ telle que, pour tous g dans G et l_1, l_2 dans L ,

$$C'^{-1} \leq \|\rho(l_1gl_2)\| \cdot \|\rho(g)\|^{-1} \leq C'.$$

On peut prendre $C' = \sup_{l \in L} \|\rho(l)\|^2$.

5.2 Critère de propreté.

Théorème. *Soient k un corps local, \mathbf{G} un k -groupe semisimple simplement connexe, $G := \mathbf{G}_k$ et $\mu : G \rightarrow A^+$ une projection de Cartan.*

Soient H_1, H_2 deux parties fermées de G . La paire (H_1, H_2) est G -propre si et seulement si la paire $(\mu(H_1), \mu(H_2))$ est A -propre.

Le corollaire suivant est une reformulation de ce théorème pour des sous-groupes à l'aide du lemme 3.1.1.

Corollaire. *On garde les notations du théorème. Soient H_1, H_2 deux sous-groupes fermés de G . Le groupe H_1 agit proprement sur G/H_2 si et seulement si, pour tout compact M de A , l'ensemble $\mu(H_1) \cap \mu(H_2)M$ est compact.*

Remarques. Donnons une interprétation géométrique de ce critère lorsque $k = \mathbb{R}$. Munissons A d'une métrique riemannienne A -invariante et notons d la distance associée. Le critère est que (H_1, H_2) est G -propre si et seulement si, pour tout $R > 0$, l'ensemble des points (a_1, a_2) de $\mu(H_1) \times \mu(H_2)$ tels que $d(a_1, a_2) \leq R$ est compact. Autrement dit, $\mu(H_1)$ et $\mu(H_2)$ s'éloignent infiniment l'un de l'autre quand on s'approche de l'infini.

Démonstration. Supposons tout d'abord que (H_1, H_2) est G -propre. Par définition, pour $j = 1, 2$, $\mu(H_j)$ est inclus dans H_j modulo les compacts de G (cf. 3.1); on a aussi

l'inclusion inverse ... mais cela ne nous sera pas utile. Le lemme 3.1.2 prouve que la paire $(\mu(H_1), \mu(H_2))$ est G -propre, elle est donc A -propre.

Réciproquement supposons que $(\mu(H_1), \mu(H_2))$ est A -propre. Soit L un compact de G tel que $L = K L K$ et M un compact de A donné par la proposition 5.1. On a l'inclusion

$$\mu(H_1 \cap L H_2 L) \subset \mu(H_1) \cap \mu(H_2) M .$$

Comme μ est propre, $H_1 \cap L H_2 L$ est compact et (H_1, H_2) est G -propre.

5.3 Exemples.

Voici quelques cas particuliers de ce théorème.

Le premier est dû à Kobayashi ([Kob1] 4.1) lorsque $k = \mathbb{R}$.

Corollaire 5.3.1 *Avec les notations de 2.2. Soient \mathbf{G} un k -groupe semisimple, \mathbf{A} un tore k -déployé maximal de \mathbf{G} , \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 deux k -sous-groupes réductifs de \mathbf{G} . Pour $j = 1, 2$, on note \mathbf{A}_j un tore k -déployé maximal de \mathbf{H}_j . On suppose que les \mathbf{A}_j sont inclus dans \mathbf{A} (on se ramène facilement à ce cas, quitte à conjuguer les \mathbf{H}_j par un élément de G).*

On a alors l'équivalence:

$$H_1 \text{ agit proprement sur } G/H_2 \iff \forall w \in W \quad A_1 \cap w A_2 \text{ est fini} .$$

Démonstration. On peut supposer \mathbf{G} simplement connexe. D'après la décomposition de Cartan pour H_j , le groupe H_j est inclus dans A_j modulo les compacts de G . On a donc les équivalences:

$$\begin{aligned} & H_1 \text{ agit proprement sur } G/H_2 \\ \Leftrightarrow & A_1 \text{ agit proprement sur } G/A_2 && \text{(d'après le lemme 3.1.2)} \\ \Leftrightarrow & (\mu(A_1), \mu(A_2)) \text{ est } A\text{-propre} && \text{(d'après le théorème)} \\ \Leftrightarrow & \forall w \in W \quad A^0 \cap (A_1 \cap w A_2) \text{ est compact} && \text{(car } \mu(A_j) = \cup_{w \in W} (w A_j \cap A^+) \text{)} \\ \Leftrightarrow & \forall w \in W \quad A_1 \cap w A_2 \text{ est fini} \end{aligned}$$

Remarque. Lorsque $k = \mathbb{R}$, le corollaire et sa démonstration sont encore valables sous l'hypothèse plus faible que H_i est réductif dans G (i.e. H_i est un sous-groupe fermé connexe de G tel que l'action adjointe de H dans l'algèbre de Lie de G est semisimple). C'est sous cette forme qu'il est énoncé dans [Kob1].

Le deuxième corollaire est dû à Friedland ([Fr]) lorsque $k = \mathbb{R}$.

Corollaire 5.3.2 *Soient $G = SL(n, k)$, $H = SL(m, k) \times I_{n-m}$. Un sous-groupe fermé Γ de G agit proprement sur G/H si et seulement si, pour tout compact C de k , l'ensemble*

$$\Gamma_C^H := \{g \in \Gamma / g \text{ a } m \text{ valeurs singulières dans } C \}$$

est compact.

Démonstration. Reprenons les notations de l'exemple 2.2 et notons, pour $a \in A^+$

$$a = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}.$$

Ce corollaire est une conséquence du corollaire 5.2 parce que le groupe de Weyl est le groupe de permutation des coordonnées et que,

$$\mu(H) = \{a \in A^+ / \exists i \in \{1, \dots, n - m + 1\} / \sigma_i = \sigma_{i+1} = \dots = \sigma_{i+m-1} = 1\}.$$

Donnons encore trois autres exemples... mais on pourrait aisément prolonger la liste.

Corollaire 5.3.3 *L'énoncé du corollaire 5.3.2 est valable avec $G = SL(n, k)$ et*

a) $H = SL(m, k) \times SL(n - m, k)$, si on prend

$$\Gamma_C^H := \{g \in \Gamma / \text{il existe } m \text{ valeurs singulières de } g \text{ dont le produit est dans } C\}$$

b) $n = 2m$ et $H = Sp(m, k)$, si on prend

$$\Gamma_C^H := \{g \in \Gamma / \forall i = 1, \dots, m \quad \sigma_i(g)\sigma_{2m+1-i}(g) \in C\}$$

c) $\text{car } k \neq 2$ et $H = SO(b)$ est le stabilisateur d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée b d'indice d , si on prend

$$\Gamma_C^H := \{g \in \Gamma / \forall i = 1, \dots, d \quad \sigma_i(g)\sigma_{n+1-i}(g) \in C \text{ et } \forall j = d+1, \dots, n-d \quad \sigma_j(g) \in C\}.$$

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire 5.3.2 car on a respectivement dans chacun de ces trois cas,

$$\begin{aligned} \mu(H) &= \{a \in A^+ / \exists i_1 < \dots < i_m / \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m} = 1\} \\ \mu(H) &= \{a \in A^+ / \forall i = 1, \dots, m \quad \sigma_i \sigma_{2m+1-i} = 1\} \\ \mu(H) &= \{a \in A^+ / \forall i = 1, \dots, d \quad \sigma_i \sigma_{n+1-i} = 1 \text{ et } \forall j = d+1, \dots, n-d \quad \sigma_j = 1\}. \end{aligned}$$

6. Proximalité.

Ce chapitre est essentiellement formé de préliminaires sur les applications proximales qui joueront un rôle central dans la définition et les propriétés des groupes " ε -Schottky" au chapitre suivant.

6.1 Notations.

Soient k un corps local, V un k -espace vectoriel de dimension finie, $X = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif de V : c'est l'ensemble des droites de V . On munit V d'une norme $\|\cdot\|$ et on définit une distance d sur X par

$$d(x_1, x_2) = \inf\{\|v_1 - v_2\| / v_i \in x_i \text{ et } \|v_i\| = 1 \quad \forall i = 1, 2\}.$$

Si X_1 et X_2 sont deux fermés de X , on note

$$\delta(X_1, X_2) = \inf\{d(x_1, x_2) / x_1 \in X_1 \ x_2 \in X_2\} \text{ et}$$

$$d(X_1, X_2) = \sup\{\delta(x_i, X_{3-i}) / x_i \in X_i \text{ et } i = 1, 2\}$$

la distance de Hausdorff entre X_1 et X_2 .

Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $r_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout hyperplan V' de V et tout couple de points v_1, v_2 de V de norme 1 vérifiant $\delta(kv_i, \mathbb{P}(V')) \geq \varepsilon$ pour $i = 1, 2$, le nombre $\alpha \in k$ défini par $v_1 - \alpha v_2 \in V'$ vérifie $r_\varepsilon^{-1} \leq |\alpha| \leq r_\varepsilon$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la compacité de l'ensemble de tels triplets (V', v_1, v_2) et de la continuité de l'application $(V', v_1, v_2) \rightarrow |\alpha|$.

6.2 ε -proximalité.

Pour g dans $\text{End}(V) - 0$, on note $\lambda_1(g) = \sup\{|\alpha| / \alpha \text{ valeur propre de } g\}$. Bien sûr une valeur propre de g est dans une extension finie k' de k . On a muni implicitement cette extension de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de k . Remarquons que $\lambda_1(g) \leq \|g\|$.

Définition. *L'élément g est dit proximal s'il a une seule valeur propre α telle que $|\alpha| = \lambda_1(g)$ et si cette valeur propre a multiplicité un. Cette valeur propre α est alors dans k et on note $x_g^+ \in X$ la droite propre correspondante. On note v_g^+ un vecteur de x_g^+ de norme 1, $V_g^<$ l'hyperplan g -invariant supplémentaire à x_g^+ et $X_g^< := \mathbb{P}(V_g^<)$.*

L'ensemble des applications proximales est un ouvert de $\text{End}(V)$, pour la topologie de la norme. Sur cet ouvert, les applications $g \rightarrow x_g^+$ et $g \rightarrow X_g^<$ sont continues.

Dans la définition qui suit, on impose un contrôle uniforme sur la proximalité. Cette définition est très proche de celle de [A-M-S]. On fixe $\varepsilon > 0$ et on note

$$b_g^\varepsilon := \{x \in X / d(x, x_g^+) \leq \varepsilon\}$$

$$B_g^\varepsilon := \{x \in X / \delta(x, X_g^<) \geq \varepsilon\}.$$

Remarquons que b_g^ε est inclus dans B_g^ε dès que $\delta(x_g^+, X_g^<) \geq 2\varepsilon$.

Définition. *Un élément proximal g est dit ε -proximal si $\delta(x_g^+, X_g^<) \geq 2\varepsilon$, $g(B_g^\varepsilon) \subset b_g^\varepsilon$ et $g|_{B_g^\varepsilon}$ est ε -Lipschitzienne.*

Remarques. - La condition " ε -Lipschitzienne" signifie que pour tout x, y dans B_g^ε , $d(gx, gy) \leq \varepsilon d(x, y)$.

- Si g est ε -proximal alors g^n est ε -proximal, pour tout $n \geq 1$.

- Pour tout élément proximal g et tout $\varepsilon > 0$ tel que $2\varepsilon \leq \delta(x_g^+, X_g^<)$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, g^n est ε -proximal.

- Par contre, il existe des éléments proximaux qui ne sont ε -proximaux pour aucune valeur de ε .

Voici une condition suffisante de proximalité.

Lemme. Soient g dans $\text{End}(V) - 0$, x^+ dans $\mathbb{P}(V)$, W un hyperplan de V et $\varepsilon > 0$. On note $Y = \mathbb{P}(W)$, $b^\varepsilon := \{x \in X / d(x, x^+) \leq \varepsilon\}$ et $B^\varepsilon := \{x \in X / \delta(x, Y) \geq \varepsilon\}$. On suppose que $\delta(x^+, Y) \geq 6\varepsilon$, $g(B^\varepsilon) \subset b^\varepsilon$ et $g|_{B^\varepsilon}$ est ε -Lipschitzienne.

Alors g est 2ε -proximal, $d(x_g^+, x^+) \leq \varepsilon$ et $d(X_g^<, Y) \leq \varepsilon$.

Démonstration. La restriction de g à B^ε est une contraction ε -Lipschitzienne. Elle a donc un point fixe attracteur x_g^+ . Donc g est proximal. Comme $g(B^\varepsilon) \subset b^\varepsilon$, on a $d(x_g^+, x^+) \leq \varepsilon$. Comme B^ε est inclus dans le bassin d'attraction de x_g^+ , on a $X_g^< \cap B^\varepsilon = \emptyset$, c'est à dire $d(X_g^<, Y) \geq \varepsilon$.

On en déduit alors que $\delta(x_g^+, X_g^<) \geq 4\varepsilon$, puis que $g(B_g^{2\varepsilon}) \subset g(B^\varepsilon) \subset b^\varepsilon \subset b_g^{2\varepsilon}$ et enfin que $g|_{B_g^{2\varepsilon}}$ est ε -Lipschitzienne. Donc g est 2ε -proximal.

6.3 Norme et plus grande valeur propre.

Lemme. Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble des éléments ε -proximaux de $\text{End}(V)$ est un fermé de $\text{End}(V) - 0$.

Démonstration. Soit (g_n) une suite de transformations ε -proximales qui converge vers un élément g non nul. Montrons tout d'abord que g est proximal. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{g_n}^+ = x^+$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{g_n}^< = Y$ où cette limite est prise pour la distance de Hausdorff. On note $b^\varepsilon := \{x \in X / d(x, x^+) \leq \varepsilon\}$ et $B^\varepsilon := \{x \in X / \delta(x, Y) \geq \varepsilon\}$. On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{g_n}^\varepsilon = b^\varepsilon$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{g_n}^\varepsilon = B^\varepsilon$. On a donc $\delta(x^+, Y) \geq 2\varepsilon$, $g(B^\varepsilon) \subset b^\varepsilon$ et $g|_{B^\varepsilon}$ est une contraction ε -Lipschitzienne. Donc g a un point fixe attracteur x_g^+ dans b^ε . Ce qui prouve que g est proximal.

La continuité des applications $g \rightarrow x_g^+$ et $g \rightarrow X_g^<$ assurent que $x = x_g^+$ et $Y = X_g^<$ et donc g est ε -proximal.

Le corollaire suivant dit que, pour un élément ε -proximal, $\lambda_1(g)$ est une bonne approximation de la norme de g .

Corollaire. Soient V un k -espace vectoriel de dimension finie et $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $c_\varepsilon \in]0, 1[$ telle que, pour toute transformation linéaire g de V ε -proximale, on a

$$c_\varepsilon \|g\| \leq \lambda_1(g) \leq \|g\|.$$

Démonstration. Cela résulte de la compacité de l'ensemble des transformations linéaires de V ε -proximales de norme 1 et de la continuité de l'application $g \rightarrow \lambda_1(g)$.

6.4 Produit d'éléments ε -proximaux.

La proposition suivante donne une approximation de $\|g\|$ lorsque g est un mot dont les lettres sont des éléments ε -proximaux.

Proposition. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que, si g_1, \dots, g_l sont des transformations linéaires ε -proximales de V vérifiant (en notant $g_0 = g_l$)*

$$\delta(x_{g_{j-1}}^+, X_{g_j}^<) \geq 6\varepsilon \text{ pour } j = 1, \dots, l .$$

Alors, pour tout $n_1, \dots, n_l \geq 1$, le produit $g = g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1}$ est 2ε -proximal et on a

$$C_\varepsilon^{-l} \leq \lambda_1(g). \prod_{1 \leq j \leq l} \lambda_1(g_j)^{-n_j} \leq C_\varepsilon^l \text{ et}$$

$$C_\varepsilon^{-l-1} \leq \|g\|. \prod_{1 \leq j \leq l} \lambda_1(g_j)^{-n_j} \leq C_\varepsilon^{l+1} .$$

Démonstration. Notons $x_j^+, v_j^+, X_j^<, V_j^<, B_j^\varepsilon, b_j^\varepsilon$ pour $x_{g_j}^+, v_{g_j}^+$, etc... Comme g_j^n est ε -proximal, que $x_{g_j^n}^+ = x_j^+$ et que $X_{g_j^n}^< = X_j^<$, on peut supposer $n_j = 1$, pour tout $j = 1, \dots, l$.

On a l'inclusion $g_1(B_1^\varepsilon) \subset b_1^\varepsilon \subset B_2^\varepsilon$ car $\delta(x_1^+, X_2^<) \geq 2\varepsilon$. De même, $g_2 g_1(B_1^\varepsilon) \subset b_2^\varepsilon$ et, après itération, $g(B_1^\varepsilon) \subset b_l^\varepsilon$ et $g|_{B_1^\varepsilon}$ est ε -Lipschitzienne. On peut appliquer le lemme 6.2 car $\delta(x_l^+, X_1^<) \geq 6\varepsilon$. On obtient que g est 2ε -proximal et que $x_g^+ \in b_l^\varepsilon$.

Soient $w_0 = v_g^+$, $y_0 = x_g^+$ et, pour $j = 1, \dots, l$,

$$w_j = g_j w_{j-1} \text{ et } y_j = g_j y_{j-1} .$$

Par construction, on a

$$y_j \in b_j^\varepsilon \text{ pour } j = 0, \dots, l \text{ et}$$

$$w_l = \lambda_1(g) w_0 .$$

Soit $\alpha_j \in k$ le nombre défini par l'égalité, pour $j = 1, \dots, l$,

$$w_{j-1} = \alpha_j v_j^+ \text{ modulo } V_j^< .$$

Comme $\delta(y_{j-1}, X_j^<) > 5\varepsilon$ et $\delta(x_j^+, X_j^<) \geq 2\varepsilon$, le lemme 6.1 prouve que

$$r_\varepsilon^{-1} \leq \frac{|\alpha_j|}{\|w_{j-1}\|} \leq r_\varepsilon .$$

On a aussi

$$w_j = \alpha_j \lambda_1(g_j) v_j^+ \text{ modulo } V_j^< .$$

Comme $\delta(y_j, X_j^<) \geq \varepsilon$, le même lemme 6.1 prouve que

$$r_\varepsilon^{-1} \leq \frac{|\alpha_j| \lambda_1(g_j)}{\|w_j\|} \leq r_\varepsilon .$$

Ces deux inégalités donnent

$$r_\varepsilon^{-2} \leq \frac{\|w_j\|}{\|w_{j-1}\|} \lambda_1(g_j)^{-1} \leq r_\varepsilon^2 .$$

En faisant le produit de ces l inégalités et en remarquant que $\frac{\|w_l\|}{\|w_0\|} = \lambda_1(g)$, on obtient

$$r_\varepsilon^{-2l} \leq \lambda_1(g) \cdot \prod_{1 \leq j \leq l} \lambda_1(g_j)^{-1} \leq r_\varepsilon^{2l} .$$

puis à l'aide du corollaire 6.3

$$r_\varepsilon^{-2l} \leq \|g\| \cdot \prod_{1 \leq j \leq l} \lambda_1(g_j)^{-1} \leq r_\varepsilon^{2l} c_\varepsilon^{-1} .$$

Ce qui prouve notre proposition avec $C_\varepsilon = \sup(r_\varepsilon^2, c_\varepsilon^{-1})$.

6.5 Sous-groupe ε -Schottky sur $\mathbb{P}(V)$.

La définition suivante est motivée par la proposition 6.4.

Définition. Soient $\varepsilon > 0$ et $t \geq 2$. On dit qu'un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) Γ de $GL(V)$ de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ est ε -Schottky sur $\mathbb{P}(V)$ si il vérifie les propriétés suivantes. On note $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t\}$ (resp. $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_t^{-1}\}$).

i) Pour tout h dans E , h est ε -proximal.

ii) Pour tout h, h' dans E (resp. h, h' dans E avec $h' \neq h^{-1}$), $\delta(x_h^+, X_{h'}^<) \geq 6\varepsilon$.

Remarques. - Bien sûr, cette définition dépend du choix des générateurs γ_j et de la norme sur V .

- Si le semigroupe (resp. groupe) Γ de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ est ε -Schottky sur $\mathbb{P}(V)$, il en est de même du semigroupe (resp. groupe) Γ_m de générateurs $\gamma_1^m, \dots, \gamma_t^m$ pour tout $m \geq 1$.

- Un sous-groupe Γ de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ qui est ε -Schottky sur $\mathbb{P}(V)$ est discret dans $GL(V)$ et est un groupe libre en ces générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$. Cela résulte du lemme du tennis de table (voir [Ti] 1.1).

7. Groupes de Schottky.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 7.4 qui généralise la proposition 1.5. On en déduira le théorème 7.5 qui généralise le théorème 1.1. On finira cette partie par la démonstration des corollaires de l'introduction.

7.1 Décomposition de Jordan.

Soient \mathbf{G} un k -groupe semisimple de k -rang $r \geq 1$ (autrement dit \mathbf{G} est isotrope) et $G = \mathbf{G}_k$. Pour des commodités de langage, nous allons injecter le semigroupe A^+ dans un cône convexe saillant d'intérieur non vide A^* d'un \mathbb{R} -espace vectoriel A^\bullet de dimension r .

Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on pose $A^\bullet = A^o$ et $A^* = A^+$ (voir 2.2). L'identification de A^\bullet avec son algèbre de Lie en fait un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Lorsque k est non archimédien, A^o est un \mathbb{Z} -module libre de rang r . On prend $A^\bullet = A^o \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et A^* l'enveloppe convexe de A^+ dans A^\bullet .

Le but de cette section est de définir une application $\lambda : G \rightarrow A^*$ que nous appellerons *projection de Lyapounov*. Bien que cela ne soit pas indispensable, il est plus clair de distinguer le cas archimédien du cas non archimédien.

Supposons donc tout d'abord $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . C'est le cas le plus simple. Tout élément g de G admet une décomposition unique $g = g_e g_h g_u$ en produit de trois éléments de G qui commutent, avec g_e elliptique, g_h hyperbolique et g_u unipotent (voir par exemple [Kos 2.1]). On note $\lambda(g)$ l'unique élément de A^+ conjugué à g_h .

Supposons maintenant que k est non archimédien. Une telle décomposition de g n'existe pas toujours. Exemple: $g = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} \in G = \mathrm{SL}(4, \mathbb{Q}_p)$ où $h = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - p$. Cependant, on a le lemme suivant qui est probablement bien connu.

Lemme. *Il existe $n \geq 1$ tel que pour tout élément g de G , l'élément $g' := g^n$ admet une décomposition unique $g' = g'_e g'_h g'_u$ en produit de trois éléments de G qui commutent, avec g'_e elliptique (i.e $\mathrm{Ad}(g'_e)$ est semisimple à valeurs propre de module 1), g'_u unipotent et g'_h conjugué à un élément a' de A^+ . Cet élément a' est unique.*

Définition. On pose $\lambda(g) = \frac{1}{n} a' \in A^*$.

Il est clair que $\lambda(g)$ ne dépend pas du choix de n .

Démonstration. Réalisons \mathbf{G} comme un k -sous-groupe de $\mathbf{SL}(V)$ où V est un k -espace vectoriel de dimension d dont les k -poids engendrent $X^*(\mathbf{A})$.

Soit g un élément de G . Il admet une décomposition unique dite de Jordan $g = g_s g_u$ en produit de deux éléments de \mathbf{G} qui commutent, avec g_s semisimple et g_u unipotent. On peut supposer que g_s et g_u sont dans G : c'est toujours le cas si $\mathrm{car}(k) = 0$; si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, il suffit de remplacer g par g^{p^d} car $g_u^{p^d} = 1$.

Soit $n = d!$. Les modules des valeurs propres de $g' := g^n$ sont dans $|\pi|^{\mathbb{Z}}$. Notons $g' = g'_s g'_u$ la décomposition de Jordan de g' . Il existe alors une unique décomposition de g'_s en produit de deux éléments semisimples de $\mathrm{SL}(V)$ qui commutent $g'_s = g'_e g'_h$ où g'_e (resp. g'_h) a ses valeurs propres de module 1 (resp. dans k^o). Par construction, chaque sous-espace vectoriel de l'algèbre $k[V]$ des polynômes sur V qui est invariant par g'_s est aussi invariant par g'_e et g'_h . On en déduit que g'_e et g'_h sont dans G et commutent à

g'_u . L'élément g'_h est dans un tore k -déployé de dimension un. Il est donc conjugué à un élément a' de A . Comme les valeurs propres de a' sont dans k^o , a' est dans A^o . Quitte à remplacer a' par un élément $w.a'$ où w est dans le groupe de Weyl, l'élément a' est dans A^+ .

L'unicité de a' est claire car, avec les notations de 2.3, pour tout $i = 1, \dots, r$, $|\omega_i(a')|$ est le plus grand des modules des valeurs propres de $\rho_i(g')$.

L'involution d'opposition $\iota : A^+ \rightarrow A^+$ se prolonge en une unique application \mathbb{R} -linéaire encore notée ι de A^\bullet dans lui-même préservant A^* . On a l'égalité, pour tout g dans G

$$\lambda(g^{-1}) = \iota(\lambda(g)) .$$

Définition. On dit qu'une partie Ω de A^+ est un cône ouvert convexe si Ω est l'intersection de A^+ avec un cône ouvert convexe Ω^\bullet du \mathbb{R} -espace vectoriel A^\bullet .

Pour g dans G tel que $\lambda(g) \neq 1$, on note Λ_g la demidroite de A^\bullet contenant $\lambda(g)$.

7.2 Groupes ε -Schottky.

On choisit r représentations irréductibles (V_i, ρ_i) de G dont les plus haut k -poids ω_i ont multiplicité un et sont r caractères indépendants de \mathbf{A} (lemme 2.3). On fixe des normes sur chacun des k -espaces vectoriels V_i .

Définition. Soient $\varepsilon > 0$ et $t \geq 2$. On dit qu'un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) Γ de G de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ est ε -Schottky si, pour $i = 1, \dots, r$, le sous-semigroupe (resp. sous-groupe) $\rho_i(\Gamma)$ de $\text{GL}(V_i)$ de générateurs $\rho_i(\gamma_1), \dots, \rho_i(\gamma_t)$ est ε -Schottky sur $\mathbb{P}(V_i)$.

On note alors

$$E_\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t\} \text{ (resp. } E_\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_t^{-1}\} \text{)}$$

Remarques. -Bien sûr cette définition dépend du choix des représentations ρ_i , des normes sur V_i et des générateurs γ_j .

Les remarques faites en 6.5 pour les groupes ε -Schottky sur $\mathbb{P}(V)$ sont valables pour les groupes ε -Schottky.

Définition. Un mot $w = g_l \cdots g_1$ avec g_j dans E_Γ est dit réduit si $g_{j-1} \neq g_j^{-1}$ pour $j = 2, \dots, l$ et très réduit si en outre $g_1 \neq g_l^{-1}$.

Lorsque Γ est un sous-semigroupe de Schottky tous les mots sont très réduits car, pour tout h, h' dans E_Γ , on a $h' \neq h^{-1}$.

Le lemme suivant permet de construire des semigroupes (resp. groupes) ε -Schottky.

Lemme. (\mathbf{G} est un k -groupe semisimple isotrope) Soient a_1, \dots, a_j, \dots des éléments de A^{++} .

- a) On peut choisir des éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ de G tels que en notant $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t\}$ (resp. $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_t, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_t^{-1}\}$) on a :
- i) $\lambda(\gamma_j) = a_j$ pour tout $j = 1, \dots, t$. En particulier, pour tout h dans E et $i = 1, \dots, r$, $\rho_i(h)$ est proximal.
 - ii) $x_{\rho_i(h)}^+ \notin X_{\rho_i(h')}^<$ pour tous h, h' dans E (resp. pour tous h, h' dans E avec $h' \neq h^{-1}$) et $i = 1, \dots, r$.
 - iii) Le semigroupe engendré par γ_j est Zariski connexe, pour tout $j = 1, \dots, t$.
 - iv) Le semigroupe Γ engendré par E est Zariski dense dans G .
- b) Pour un tel choix, il existe $m_o \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $m \geq m_o$ le sous-semigroupe (resp. sous-groupe) Γ_m de générateurs $\gamma_1^m, \dots, \gamma_t^m$ est ε -Schottky et Zariski dense.

Démonstration. a) Pour tout élément a de A^{++} et $i = 1, \dots, r$, les éléments $\rho_i(a)$ et $\rho_i(a^{-1})$ sont proximaux. Les points $x_i^+ := x_{\rho_i(a)}^+$, $x_i^- := x_{\rho_i(a^{-1})}^+$ et les ensembles $X_i^< := X_{\rho_i(a)}^<$ et $X_i^> := X_{\rho_i(a^{-1})}^<$ ne dépendent pas du choix de a dans A^{++} . En outre le semi-groupe engendré par a est Zariski-connexe.

On peut supposer \mathbf{G} simplement connexe. On décompose alors \mathbf{G} en un produit d'un k -groupe anisotrope \mathbf{G}_{an} et d'un k -groupe sans facteur anisotrope \mathbf{G}_{is} . Le groupe A est inclus dans G_{is} et on a $\rho_i(G_{an}) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, r$.

On va construire par récurrence sur j des éléments γ_j , vérifiant i), ii) et iii). Soit b un élément de G_{an} qui engendre un sous-semigroupe Zariski connexe et qui n'est inclus dans aucun k -sous-groupe distingué propre de \mathbf{G}_{an} . Il suffit de prendre $\gamma_j = h_j b a_j h_j^{-1}$ où h_j est dans l'ouvert de Zariski

$$U_j = \{h \in G / \rho_i(h).x_i^\alpha \notin \rho_i(h_{j'}) (X_i^< \cup X_i^>) \text{ et } \rho_i(h_{j'}) . x_i^\alpha \notin \rho_i(h) (X_i^< \cup X_i^>) \\ \forall \alpha = \pm, \quad i = 1, \dots, r, \quad j' = 1, \dots, j-1 \}.$$

Cet ouvert de Zariski est non vide car G est Zariski connexe et que ρ_i est une représentation irréductible.

Il reste à vérifier iv). Notons G_j l'adhérence de Zariski dans G du semigroupe engendré par $\gamma_1, \dots, \gamma_j$. Si $G_{j-1} \neq G$, on peut choisir h_j dans l'ouvert de Zariski $U_j \cap V_j$ où $V_j = \{h \in G / h b a h^{-1} \notin G_{j-1}\}$. Cet ouvert de Zariski est non vide car $b a$ n'est inclus dans aucun k -sous-groupe distingué propre de \mathbf{G} . La suite croissante de sous-groupes Zariski connexes et Zariski fermés G_j est forcément stationnaire. On a donc $G_j = G$ pour j suffisamment grand.

b) Il suffit de prendre ε tel que, pour tous h, h' dans E (resp. h, h' dans E avec $h' \neq h^{-1}$) et $i = 1, \dots, r$, on a

$$6\varepsilon \leq \delta(x_{\rho_i(h)}^+, X_{\rho_i(h')}^<).$$

On utilise alors la remarque 6.2 pour en déduire que Γ_m est ε -Schottky de générateurs $\gamma_1^m, \dots, \gamma_t^m$. L'adhérence de Zariski de Γ_m contient les γ_j d'après iii) et est donc égal à G d'après iv).

7.3 Projection de Cartan d'un groupe ε -Schottky.

Maintenant que nous savons construire des groupes ε -Schottky, il nous faut calculer leur projection de Cartan. On suppose donc \mathbf{G} simplement connexe et on note $\mu : G \rightarrow A^+$ une projection de Cartan.

Proposition. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact M_ε de A^\bullet vérifiant la propriété suivante:*

Pour tout sous-semigroupe (resp. sous-groupe) Γ de G ε -Schottky de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ et tout mot très réduit $w = g_l^{n_l} \cdots g_1^{n_1}$ avec g_j dans E_Γ et $n_j \geq 1$, on a

$$\lambda(w) - \sum_{1 \leq j \leq l} n_j \lambda(g_j) \in l.M_\varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(w) - \sum_{1 \leq j \leq l} n_j \lambda(g_j) \in (l+1).M_\varepsilon .$$

Remarque. On a noté additivement l'addition dans A^\bullet qui prolonge la multiplication dans A° que nous notions multiplicativement!

Démonstration. Les morphismes $a \rightarrow |\omega_i(a)|$ de A^+ dans $]0, \infty[$ se prolongent de façon unique en des morphismes continus du groupe A^\bullet dans le groupe multiplicatif $]0, \infty[$ que l'on note θ_i .

On a pour tout g dans G ,

$$\theta_i(\lambda(g)) = \lambda_1(\rho_i(g)) .$$

Notons C_{ω_i} les constantes introduites en 2.4 et $C := \sup_{1 \leq i \leq r} C_{\omega_i}$. On a donc pour tout g dans G et $i = 1, \dots, r$

$$C^{-1} \|\rho_i(g)\| \leq \theta_i(\mu(g)) \leq C \|\rho_i(g)\| .$$

Notons C_ε la constante introduite en 6.4 pour un k -espace vectoriel de dimension supérieure à celle des V_i , $C'_\varepsilon := C C_\varepsilon$ et introduisons le compact de A^\bullet :

$$M_\varepsilon = \{ a \in A^\bullet / C'_\varepsilon^{-1} \leq \theta_i(a) \leq C'_\varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, r \} .$$

Notre affirmation résulte alors des majorations suivantes données par le lemme 2.4 et la proposition 6.4:

$$\theta_i(\lambda(w) - \sum_{1 \leq j \leq l} n_j \lambda(g_j)) = \frac{\lambda_1(\rho_i(w))}{\prod_{1 \leq j \leq l} \lambda_1(\rho_i(g_j))^{n_j}} \in [C_\varepsilon^{-l}, C_\varepsilon^l] \quad \text{et}$$

$$\theta_i(\mu(w) - \sum_{1 \leq j \leq l} n_j \lambda(g_j)) = \frac{\theta_i(\mu(w))}{\|\rho_i(w)\|} \frac{\|\rho_i(w)\|}{\prod_{1 \leq j \leq l} \lambda_1(\rho_i(g_j))^{n_j}} \in [C^{-1} C_\varepsilon^{-l-1}, C C_\varepsilon^{l+1}] .$$

Corollaire. *Soient Γ un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) de G ε -Schottky de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ et Ω^\bullet un cône ouvert convexe de A^\bullet contenant les demi-droites engendrées par $\lambda(\gamma_1), \dots, \lambda(\gamma_t)$ (resp. $\lambda(\gamma_1), \dots, \lambda(\gamma_t), \lambda(\gamma_1^{-1}), \dots, \lambda(\gamma_t^{-1})$).*

Alors il existe $m_o \geq 1$ tel que, pour tout $m \geq m_o$, le sous-semigroupe (resp. sous-groupe) Γ_m de G ε -Schottky de générateurs $\gamma_1^m, \dots, \gamma_t^m$ vérifie $\mu(\Gamma_m) \subset \Omega \cup \{1\}$.

Démonstration. Supposons que Γ est un groupe (le cas d'un semigroupe est plus facile). Introduisons tout d'abord grâce à la proposition 5.1 un compact M de A^\bullet tel que, pour tout w dans G

$$\mu(\{w, w\gamma_1^{-1}, w\gamma_2^{-1}\}) \subset \mu(w) + M .$$

Soit g un élément de Γ_m . On l'écrit sous forme d'un mot réduit $g = g_l^m \cdots g_1^m$. L'un des trois mots $w = g, g\gamma_1$ ou $g\gamma_2$ est très réduit. On peut donc lui appliquer la proposition précédente. On note $M' := \{0, \lambda(\gamma_1), \lambda(\gamma_2)\}$. On a donc

$$\begin{aligned} \mu(g) \in \mu(w) + M &\subset (\sum_{1 \leq j \leq l} m\lambda(g_j)) + M + M' + (l+2)M_\varepsilon \\ &\subset \sum_{1 \leq j \leq l} (m\lambda(g_j) + M'') \end{aligned}$$

où M'' est un compact convexe de A^\bullet contenant 0 et $M + M' + 3M_\varepsilon$. Il suffit donc de prendre m suffisamment grand pour que $\lambda(g_j) + \frac{1}{m}M''$ soit inclus dans Ω^\bullet .

Remarque. Notons M_Γ et Λ_Γ les plus petits cône convexe fermé de A^\bullet contenant $\mu(\Gamma)$ et $\lambda(\Gamma)$ respectivement. Ce calcul prouve aussi que la limite, au sens de la distance de Hausdorff dans l'espace projectif de A^\bullet , de M_{Γ_m} et de Λ_{Γ_m} lorsque m tend vers l'infini est l'enveloppe convexe des demidroites $\Lambda_{\gamma_1}, \dots, \Lambda_{\gamma_t}$ (resp. $\Lambda_{\gamma_1}, \dots, \Lambda_{\gamma_t}, \iota(\Lambda_{\gamma_1}), \dots, \iota(\Lambda_{\gamma_t})$).

7.4 Construction du groupe Γ .

Théorème. Soient k un corps local, \mathbf{G} un k -groupe semisimple isotrope simplement connexe, $G = \mathbf{G}_k$, $\mu : G \rightarrow A^+$ une projection de Cartan et $\iota : A^+ \rightarrow A^+$ l'involution d'opposition.

a) Soit Ω un cône ouvert convexe non vide de A^+ (voir 7.1). Alors il existe un sous-semigroupe discret Γ Zariski dense dans \mathbf{G} tel que $\mu(\Gamma) \subset \Omega \cup \{1\}$.

b) Si en outre $\iota(\Omega) = \Omega$, alors il existe un sous-groupe discret Γ libre et Zariski dense dans G tel que $\mu(\Gamma) \subset \Omega \cup \{1\}$.

Démonstration. Choisissons des points a_j dans $\Omega \cap A^{++}$. On construit tout d'abord des éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ de G comme dans le lemme 7.2. On a alors $\lambda(\gamma_j) = a_j \in \Omega$ et, lorsque $\iota(\Omega) = \Omega$, on a $\lambda(\gamma_j^{-1}) = \iota(a_j) \in \Omega$. Donc le lemme 7.2 et le corollaire 7.3 prouvent qu'il existe $m \geq 1$ tel que le semigroupe (resp.groupe) Γ_m de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ est ε -Schottky et donc discret et libre, qu'il est Zariski dense et que $\mu(\Gamma) \subset \Omega \cup \{1\}$.

7.5 Critère d'existence d'un sous-groupe libre agissant proprement sur \mathbf{G}/\mathbf{H} .

Théorème. Soient k un corps local, \mathbf{G} un k -groupe semisimple, \mathbf{H} un k -sous-groupe réductif de \mathbf{G} , $\mathbf{A}_\mathbf{H}$ un tore k -déployé maximal de H , \mathbf{A} un tore k -déployé maximal de G contenant $\mathbf{A}_\mathbf{H}$, G, H, A_H, A les k -points, W le groupe de Weyl de G dans A, A^+ une cham-

bre de Weyl positive et B^+ le sous-ensemble de A^+ formé des points fixes de l'involution d'opposition (voir 2.2).

Il existe un sous-groupe discret Γ non virtuellement nilpotent qui agit proprement sur G/H si et seulement si, pour tout w dans W , wA_H ne contient pas B^+ .

Dans ce cas, on peut choisir Γ libre et Zariski dense dans G .

Remarque. Lorsque $\text{car}(k) = 0$, on peut remplacer dans cet énoncé "virtuellement nilpotent" par "virtuellement abélien".

Démonstration. D'après ([Mar2] I.1.5.5 et I.2.3.1) on peut supposer \mathbf{G} simplement connexe. On a l'égalité

$$\mu(H) = \mu(A_H) = \cup_{w \in W} (wA_H \cap A^+)$$

Si il existe w dans W tel que wA_H contient B^+ alors $\mu(H)$ contient B^+ et notre affirmation résulte du théorème 3.3 et du corollaire 4.1.

Sinon, on peut trouver un cône ouvert convexe Ω^\bullet de A^* invariant par ι dont l'adhérence rencontre trivialement chacun des \mathbb{R} -sous-espace vectoriels de A^\bullet engendré par $wA_H \cap A^\circ$. On pose $\Omega := \Omega^\bullet \cap A^+$. On choisit alors un sous-groupe Γ discret, libre et Zariski dense de G tel que $\mu(\Gamma) \subset \Omega \cup \{1\}$ (théorème 7.4). Le corollaire 5.2 prouve que ce groupe Γ agit proprement sur G/H .

Pour les semigroupes, la même démonstration fournit l'énoncé suivant.

Proposition. Soient \mathbf{G} un k -groupe semisimple, \mathbf{H} un k -sous-groupe réductif de \mathbf{G} , G et H les k -points. On suppose que $\text{rang}_k(\mathbf{H}) \neq \text{rang}_k(\mathbf{G})$.

Alors il existe un sous-semigroupe libre discret et Zariski dense de G qui agit proprement sur G/H .

Remarque.([Kob1]) Lorsque $\text{rang}_k(\mathbf{H}) = \text{rang}_k(\mathbf{G})$, les seuls semigroupes discrets qui agissent proprement sur G/H sont finis.

7.6 Démonstration des corollaires de l'introduction.

Le corollaire 1 est un cas particulier du corollaire suivant.

Corollaire. ($\text{car}k = 0$) On garde les notations du théorème 7.5.

Si il existe w dans W tel que wA_H contient B^+ , alors G/H n'a pas de quotient compact.

Démonstration. Cela résulte du théorème 7.5 et du corollaire 4.1.

Pour montrer le corollaire 2, il suffit de vérifier, d'après ([Kob2] 1.9) que les exemples suivants n'ont pas de quotients compacts:

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}} &= \text{SO}(4n+2, \mathbb{C})/\text{SO}(4n+1, \mathbb{C}) \quad (n \geq 1), \\ &\text{SL}(2n, \mathbb{C})/\text{Sp}(n, \mathbb{C}) \quad (n \geq 2) \text{ et} \\ &\text{E}_{6, \mathbb{C}}/\text{F}_{4, \mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Pour montrer le corollaire 3, on doit vérifier que

$$G/H = \mathrm{SO}(2n+1, 2n+1)/\mathrm{SO}(2n, 2n+1) \quad (n \geq 1)$$

n'a pas de quotients compacts.

On vérifie dans chacun de ces cas que pour un bon choix de A^+ , B^+ est inclus dans H et on applique le corollaire précédent.

Références.

[A-M-S] **H.Abels, G.Margulis, G.Soifer** - Semigroups containing proximal linear maps, preprint (1994).

[Be] **Y.Benoist** - Actions propres de groupes libres sur les espaces homogènes réductifs, C.R.A.S. 319 (1994) p.937-940.

[B-L1] **Y.Benoist, F.Labourie** - Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes, Publ. Math. I.H.E.S. 76 (1992) p.99-109.

[B-L2] **Y.Benoist, F.Labourie** - Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, Inv. Math.111 (1993) p.285-308.

[Bor] **A.Borel** - Linear algebraic groups, GTM 126 Springer (1991).

[B-T1] **A.Borel, J.Tits** - Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S. 27 (1965) p.659-755.

[B-T2] **A.Borel, J.Tits** - Homomorphismes "abstraites" de groupes algébriques simples, Ann. Math. 97 (1973) p.499-571.

[Bou] **N.Bourbaki** - Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 7 et 8, CCLS Paris (1975).

[C-M] **E.Calabi- L.Marcus** - Relativistic space forms, Ann. Math. 75 (1962) p.63-76.

[C-R] **C.Curtis, I.Reiner** - Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience (1962).

[Fr] **S.Friedland** - Properly discontinuous groups on certain matrix homogeneous spaces, preprint (1993).

[G-M] **I.Gol'dsheid, G.Margulis** - Lyapounov indices of a product of random matrices, Russ. Math. Surv. 44 (1989) p.11-71.

[He] **S.Helgason** - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Acad. Press (1978).

[Kob1] **T.Kobayashi** - Proper action on a homogeneous space of reductive type, Math. Ann. 285 (1989) p.249-263.

[Kob2] **T.Kobayashi** - A necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive type, Duke Math. Jour. 67 (1992) p.653-664.

[K-O] **T.Kobayashi, K.Ono** - Note on Hirzebruch's proportionality principle, Jour. Fac. Sc. Univ. Tokyo 37 (1990) p.31-87.

[Kos] **B.Kostant** - On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition, Ann. Sc. ENS. 6 (1973) p.413-455.

[Ku] **R.Kulkarni** - Proper actions and pseudo-Riemannian space forms, Adv. in Math. 40 (1981) p.10-51.

[Mac] **I.Macdonald** - Spherical functions on a group of p-adic type, Publ. Ramanujan Inst. (1971).

[Mar1] **G.Margulis** - Free totally discontinuous groups of affine transformations, Soviet. Math. Dokl. 28 (1983) p.435-439.

[Mar2] **G.Margulis** Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Springer (1991).

[Ti1] **J.Tits** Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, Journ. Reine Angw. Math. 247 (1971) p.196-220.

[Ti2] **J.Tits** - Free subgroups in linear groups, Jour. of Algebra 20 (1972) p.250-270.

[Wo] **J.Wolf** - The Clifford-Klein space forms of indefinite metric, Ann. of Math. 75 (1962) p.77-80.

[Zi] **R.Zimmer** - Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces, Jour. of Amer. Math. Soc. 7 (1994) p.159-168.

CNRS, Université Paris 7, Paris, France
benoist@mathp7.jussieu.fr