SYSTEMES et FILTRES

Définition Un système est un opérateur qui transforme un signal d'entrée en signal de sortie.

Exemples

amplificateur : $y(t) = kx(t)$

retard : $y(t) = x(t-a) = x_a(t)$

dérivateur : $y(t) = x'(t)$

discret d'ordre 1 : $y_k = x_k - ay_{k-1}$

échantillonneur : transforme un signal analogique en signal numérique.

Propriétés Soit $X = (x(t), t \in \mathbb{R})$ un signal, $\mathcal{S}$ un sytème, $Y = (y(t), t \in \mathbb{R}) = \mathcal{S}(X)$.

1. Linéarité : $\mathcal{S}(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda \mathcal{S}(X_1) + \mu \mathcal{S}(X_2)$ principe de superposition.

2. Causalité : $\forall t < t_0 \quad x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow y_1(t) = y_2(t)$

3. Invariance (stationnarité) $Y_a = \mathcal{S}(X_a)$.

4. Continuité : X_n suite de signaux, si $X_n \to X$ alors $Y_n = \mathcal{S}(X_n) \to Y = \mathcal{S}(X)$ pour une notion de convergence bien définie.

Définition Un filtre est un système linéaire continu et invariant.

Exemples

* $e_\lambda(t) = e^{2i\pi\lambda t}$, signal monochromatique, $\mathcal{F}$ un filtre.

$$\mathcal{F}(e_\lambda) = f_\lambda(0)e_\lambda = H(\lambda)e_\lambda$$

Soit X un signal tel que

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi\lambda n t} \Rightarrow \mathcal{F}(x(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H(\lambda) e_\lambda(t)$$

* Filtre discret du premier ordre

$$y_k = a y_{k-1} + x_k$$

$\mathcal{F}(X) = Y$, $y_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{k-n} x_n$ que l'on note $h * x$

$$h_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 0 \\ a^n & \text{si} \quad n \geq 0 \end{cases} \qquad H(z) = \frac{z}{z-a} \text{ fonction de transfert}$$

SPECTRE d'un SIGNAL FILTRE

x signal périodique de période $T = \frac{1}{T}$.

$$\mathcal{F}x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \mathcal{F}(e^{2i\pi n\omega t}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n H(n\omega) e^{2i\pi n\omega t}$$

L'emplacement des raies n'est pas modifié.
L'amplitude devient $|c_n H(n\omega)| = |c_n||H(n\omega)|$.
La phase devient $\arg(c_n H(n\omega)) = \arg(c_n) + \arg(H(n\omega))$

FILTRES ANALOGIQUES

$\mathcal{H}$ filtre analogique, f entrée, g sortie, équation différentielle à coefficients constants:

$$g = \mathcal{H}(f) \qquad \sum_{k=0}^{q} b_k g^{(k)} = \sum_{j=0}^{p} a_j f^{(j)}$$

Soit $P(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j$, $Q(x) = \sum_{k=0}^{q} b_k x^k$.
Si degré(P) $<$ degré(Q), $H(\lambda) = \frac{P(2i\pi\lambda)}{Q(2i\pi\lambda)} = \widehat{h} \in \mathrm{L}^2$

$$\widehat{g} = \widehat{h}\widehat{f} \text{ et } g = f * h$$

h est appelée la réponse impulsionnelle du filtre.

Définition Un système analogique est stable si

$$\|\mathcal{S}(f)\|_\infty \leq M\|f\|_\infty, \forall f \in \mathsf{L}^\infty$$

Proposition Si degré(P) $<$ degré(Q), et $Q(i\xi) \neq 0, \xi \in \mathbb{R}$, le filtre est stable.

Définition Un système est réalisable (ou causal) si deux signaux d'entrée identiques pour $t < t_0$ donnent des sorties identiques pour $t < t_0$.

Proposition Le filtre $\mathcal{H}$ est réalisable si et seulement si

$$\text{Supp}(h) \subset [0; +\infty[$$

Exemples

Intégrateur $g' = f$

Dérivateur $g = f'$

Filtre passe-bas Les fréquences de l'entrée et de la sortie sont liées par

$$\widehat{g}(\lambda) = H(\lambda)\widehat{f}(\lambda)$$

passe-bas idéal

$$H(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\lambda| < \lambda_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

filtres de Butterworth $|H(\lambda)|^2 = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{2n}}$.

ECHANTILLONNAGE des SIGNAUX

Question : quel est le spectre d'un signal échantillonné? (ce n'est pas l'échantillonné du spectre)
Comment échantillonner sans perte d'information?

Théorème (Formule de Poisson)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\frac{n}{T}) e^{2i\pi n \frac{t}{T}}$$

Soit f un signal quelconque, avec Supp$(\widehat{f}) \subset [-\lambda_c; \lambda_c]$. f est à bande limitée.

Soit $\delta_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (masse de Dirac en a).

Le peigne de Dirac $\Delta_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}$ de maille T.

Le signal échantillonné de f s'écrit : $T f \Delta_T = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta_{nT}$

$$\mathcal{F}(T f \Delta_T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda - \frac{n}{T})$$

C'est un spectre de période $\frac{1}{T}$.

C'est la somme de tous les translatés du spectre de f, les translations étant des multiples de $\frac{1}{T}$.

1er cas : $T > \frac{1}{2\lambda_c}$. Il y a chevauchement des lobes.

2ème cas : $T < \frac{1}{2\lambda_c} < \dfrac{1}{T}$. Les lobes se séparent.

La cadence critique $T = \frac{1}{2\lambda_c}$ est appelée cadence de Nyquist.

Théorème de Shannon

f un signal à bande limitée, $\mathrm{Supp}(\widehat{f}) \subset [-\lambda_c; \lambda_c]$.

$$f(t) \;=\; T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nt) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\frac{\pi}{T}(t - nT)}$$

Remarques

Si on suppose que f est à bande limitée, cela entraine que f est analytique et que son support est $\mathbb{R}$.

Si on suppose que f est à support compact cela entraine que son spectre ne peut être à support borné.

Pour calculer un spectre il faut auparavant enlever le bruit du signal (filtrer) sinon on a un recouvrement du spectre.

Si on observe aux instants nT, $L = 2NT$ est la longueur du signal observé $\frac{1}{L}$ est la finesse du spectre calculé.

FILTRES DISCRETS et CONVOLUTION

Définition Un filtre discret est une application D de l'ensemble des signaux échantillonnés au pas T sur lui-même, linéaire, continue et invariante par les translations $\tau_{kT}, k \in \mathbb{Z}$.

Exemples
retard : $Dx = y, y_n = x_{n-k}$
moyenne : $Dx = y, y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}), y_n = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2}$
autorégressif d'ordre 1 : $y_n = ay_{n-1} + x_n$
système de convolution : $Dx = h * x, y_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_i x_{n-i}$

Proposition D filtre discret, $h = D\delta$, alors

$$Dx = h * x$$

si h est fini ou si h est causal.
Si h est fini ou si h et x sont à support limité à gauche

Propriétés Si (h_k) est une suite à décroissance rapide et (x_n) une suite à croissance lente $h * x$ est bien définie et à croissance lente. On a

$$\widehat{h * x} = \widehat{h}\widehat{x}$$

le filtre D est stable $\Longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_k| < +\infty$

le filtre D est réalisable $\Longleftrightarrow \forall n < 0 \quad h_n = 0$

Transformée en z d'un signal discret

x un signal discret, $x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \delta_{nkT}$ de spectre la suite périodique

$$\widehat{x}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda nT}$$

On pose $z = e^{2i\pi\lambda T}$, $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n}$ transformée en z. Série de Laurent de la variable z.

$$\widehat{x}(\lambda) = X(e^{2i\pi\lambda T})$$

Exemple

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 0 \\ 1 & \text{si} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Propriétés La transformée en z est linéaire,
$\tau_T x$ a pour transformée $z^{-1}X(z)$,
$\tau_{kT} x$ a pour transformée $z^{-k}X(z)$,
la transformée d'une convolution est le produit des transformées.
Soit D un filtre discret que l'on peut représenter par une convolution $Dx = h * x$.
La transformée $H(z)$ de h s'appelle la fonction de transfert du filtre.

Théorème Soit D un filtre discret de fonction de transfert H.
Pour que le filtre D soit stable il faut et il suffit que la couronne de convergence de $H(z)$ contienne le cercle unité.
Si le filtre est réalisable il est stable si et seulement si les poles de $H(z)$ sont situés à l'intérieur du disque unité.

Exemples

$$\frac{H(z)}{z-r}$$

Equation aux différences à coefficients constants

$$\sum_k b_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^{p} a_j x_{n-j}$$