1 Généralités

Définition 1 *Une chronique (série chronologique, série temporelle) est une suite d'observations d'un même phénomène, ordonnées dans le temps.*

Exemples

séries économiques (ventes, chomage, PIB, inflation,...)
physique (température, vent, pollution de l'air, crues du Nil,...)
médical (encéphalogramme ...)

Traitement du signal : une chronique est un signal

$$\begin{array}{ccc} t & \longmapsto & x(t) \\ t \in \mathbb{R} & \text{analogique} & \\ t \in \mathbb{N} & \text{(discret)} & \end{array}$$

Les outils du traitement du signal sont proches de ceux des séries chronologiques.

Exemples

courant électrique, son,...

Remarque Si $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{N}^2$ ou $\mathbb{R}^2$, $t_1, t_2) \longmapsto x(t_1, t_2)$, on obtient une image : x niveau de gris, ou couleur.

2 Signaux périodiques

Définition 2 *$X = (x(t) = x_t)$ est périodique de période T et de fréquence $f = \frac{1}{T}$ si T est le plus petit réel positif tel que $\forall t \quad x(t+T) = x(t)$. La fréquence est le nombre de périodes par unité de temps.*

Définition 3 *Si $\forall t \quad y(t) = x(t+\tau)$, on dit que Y est décalé par rapport à X le décalage étant t. Si $t > 0$, Y est en avance sur X, si $t < 0$, Y est en retard sur X.*

Définition 4 *Soit X une trajectoire périodique de période T de fréquence $f = \frac{1}{T}$, soit k un entier, Y défini par $\forall t \quad Y(t) = X(kt)$. Y est périodique de période $\frac{T}{k}$ de fréquence kf. La trajectoire Y est appelée la k-ème harmonique de X qui est l'harmonique de base ou harmonique fondamentale.*

Polynomes trigonométriques

$e_n(t) = e^{2i\pi n\omega t}$ est un signal périodique de fréquence ω de période $T = \frac{1}{\omega}$. Tout signal de la forme $p(t) = \sum_{n\in I} c_n e^{2i\pi n\omega t} \quad I$ fini, $c_n \in \mathbb{C}$, est aussi périodique de période $\frac{1}{\omega}$.

On peut écrire $p(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2i\pi n\omega t}$ polynome trigonométrique de degré N.

On peut écrire $p(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos 2\pi\omega t + b_n \sin 2\pi\omega t$

Propriété 1 *On a*

$$\int_0^{\frac{1}{\omega}} e_n(t)\overline{e}_m(t) = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m \\ \frac{1}{\omega} & si \quad n = m \end{cases}$$

L'espace des polynomes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N a pour base $\{e_n\}_{n=-N,N}$ (les e_n sont indépendants), est de dimension $2N+1$, il est muni du produit scalaire $\langle p, q\rangle = \int_0^{\frac{1}{\omega}} p(t)\overline{q}(t)dt$ et si $p(t) = \sum_{n-N}^{N} c_n e^{2i\pi n\omega t}$, $c_n = \omega \int_0^T p(t)e^{-2i\pi n\omega t} = \frac{1}{T}\langle p, e_n\rangle$ (formule de Fourier).

On a $\sum_{n-N}^{N} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |p(t)|^2 dt$.
Si p *est pair* $c_{-n} = c_n$ $(b_n = 0)$, *si* p *est impair* $c_{-n} = -c_n$ $(a_n = 0)$.

On se place dans l'ensemble des signaux périodiques de période T de carré intégrable $\mathrm{L}_p^2(0,T)$

$$f \in \mathrm{L}_p^2(0,T) \Rightarrow \int_0^2 |f(t)|^2 dt < +\infty$$

f de période T.

Théorème 2 *Il existe un seul polynome trigonométrique* p_N *de degré* N *de période* T *qui réalise le minimum de*

$$\|f - p_N\|_t^2 = \int_0^T |f(t) - p_N(t)|^2 dt$$

$p_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2i\pi n\omega t}$ *avec* $c_n = \omega \int_0^T f(t) e^{-2i\pi n\omega t}$

Corollaire 3

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Exemple

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi \\ -1 & \text{si} \quad \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

$p_1(t) = \frac{4}{\pi}\sin t$, $p_2(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \sin 3t)$, $p_3(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t)$

Théorème 4 *Soit* $f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2i\pi n\omega t}$, $f_N \to f$ *i.e.*

$$\int_0^T |f_N(t) - f(t)|^2 dt \rightarrow_{N \to +\infty} 0$$

Corollaire 5

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Propriété 6 *Si f est réelle $c_n = \overline{c}_{-n}$, (a_n et b_n réels)*
Si f est paire $c_n = c_{-n}$, ($b_n = 0$)
Si f est impaire $c_n = -c_{-n}$, ($a_n = 0$)

Définition 5 *Soit f un signal de période T, de fréquence ω*

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n\omega t}$$

le spectre de f est l'ensemble des couples $(\frac{n}{T}, c_n)$.

Représentation du spectre
spectre d'amplitude : (fréquences, module) $(\frac{n}{T}, |c_n|)$, $d_n = 20log_10|c_n|$ en décibels (dB).
Ce sont des raies régulièrement espacées, de la fréquence $\omega = \frac{1}{T}$. Pour $n = 1$ et $n = -1$ on a les raies qui correspondent à la fréquence fondamentale. Les autres sont les harmoniques du signal.
Spectre de phase: (fréquences, argument) $(\frac{n}{T}, \arg(c_n) = \theta_n)$, $\theta_n \in]-\pi, \pi[$.

3 Transformée de Fourier discrète

Cadre : on connait la période T de la fonction f et un nombre fini N de ses valeurs régulièrement espacées (échantillonage)

$$f(k\frac{T}{N}) = y_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

N données $\rightarrow$ N coefficients c_n.
Si N est pair on prendra $n = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1$.
Si N est impair on prendra $n = -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{N-1}{2}$.
Il faut calculer

$$c_n = \omega \int_0^T f(t) e^{-2i\pi n\omega t} dt$$

f n'est pas connue.
Par approximation (méthode des trapèzes)

$$c'_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi n \frac{k}{N}}$$

c'est la transformée discrète d'ordre N de f.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ (y_k) & \longmapsto & (Y_n)_{n=0,\ldots,N-1} \quad Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi n\frac{k}{N}} \end{array}$$

Sa réciproque est

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ (Y_n) & \longmapsto & (y_k)_{k=0,\ldots,N-1} \quad y_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} Y_n e^{2i\pi n\frac{k}{N}} \end{array}$$

c'est une transformation linéaire de matrice

$$\Omega_N = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & e^{-2i\pi n\frac{1}{N}} & \ldots & e^{-2i\pi n\frac{N-1}{N}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ldots & e^{-2i\pi n 2\frac{k}{N}} & \ldots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 7 *Soit* $y_k = f(k\frac{T}{N})$, y_k *est une suite périodique de période* N.

Démonstration

Attention : Y_k n'est pas une approximation de la transformée de Fourier de f sur $\mathbb{R}$.

Propriété 8 *On note* $\mathcal{F}_N(y_k) = Y_n$. *On a*

$\mathcal{F}_N(y_{-k}) = Y_{-n}$
$\mathcal{F}_N(\overline{y}_k) = \overline{Y}_{-n}$
$\mathcal{F}_N(\overline{y}_{-k}) = \overline{Y}_n$
(y_k) *paire (impaire)* $\Leftrightarrow (Y_n)$ *paire (impaire)*
(y_k) *réelle* $\Leftrightarrow (Y_n) = (\overline{Y}_n)$, *même module, argument opposé*
(y_k) *réelle, paire* $\Leftrightarrow (Y_n)$ *réelle paire*
(y_k) *réelle, impaire* $\Leftrightarrow (Y_n)$ *imaginaire pure, impaire*

Théorème 9 *Soit* (x_k), (y_k) *deux suites périodiques de période* N *de transformées de Fourier discrètes* X_n *et* Y_n. *Soit* z_k *défini par* $z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q}$ *a pour transformée de Fourier discrète* $Z_n = N X_n Y_n$ *(produit des transformées de Fourier discrètes). La suite produit* $p_k = x_k y_k$ *a pour transformée discrètre* $P_n = \sum_{q=0}^{N-1} X_q Y_{n-q}$, *et* $\sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2$

4 Transformée de Fourier rapide

Le calcul de Y_0, Y_1, Y_{n-1} en utilisant la matrice Ω nécessite $(N-1)^2$ multiplications complexes et $N(N-1)$ additions complexes si on stocke les $e^{2i\pi\frac{jk}{N}}$ ($\cos 2\pi\frac{jk}{N}$ et $\sin 2\pi\frac{jk}{N}$) pour $j = 0, \ldots, N-1$, $k = 0, \ldots, N-1$.
Si $N = 1000 \longrightarrow 10^6$ opérations.
Algorithme de Cooley et Tuckey FFT (65)
On suppose que $N = 2m$

$$Y_n = \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1} y_{k+N} e^{-2i\pi n\frac{k}{N}}$$

On regroupe les termes pairs et impairs

$$\begin{aligned}
Y_n &= \frac{1}{N}\Big[y_0 e^{-2i\pi 0} + y_2 e^{-2i\pi n\frac{2}{N}} + \ldots + y_{N-2} e^{-2i\pi n\frac{2(m-1)}{N}} \\
&\quad + y_1 e^{-2i\pi n\frac{1}{N}} + \ldots + y_{N-1} e^{-2i\pi n\frac{2m-1}{N}}\Big] \\
&= \frac{1}{2m}\Big[y_0 + y_2 e^{-2i\pi n\frac{2}{N}} + \ldots + y_{N-2} e^{-2i\pi n\frac{2(m-1)}{N}}\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2m} e^{-2i\pi\frac{n}{N}}\Big[y_1 + y_3 e^{-2i\pi n\frac{2}{N}} + \ldots + y_{N-1} e^{-2i\pi n\frac{2(m-1)}{N}}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[P_n + I_n e^{-2i\pi\frac{n}{N}}\Big]
\end{aligned}$$

On a les relations

$$\begin{aligned}
P_{n+M} &= y_0 + y_2 e^{-2i\pi n\frac{2}{N}} e^{-2i\pi\frac{2m}{N}} + \ldots + y_{N-2} e^{-2i\pi n\frac{2(m-1)}{N}} e^{-2i\pi\frac{2m}{N}} \\
&= P_n
\end{aligned}$$

et $I_{n+M} = I_n$.

$$\begin{aligned}
Y_{n+M} &= \frac{1}{2}(P_{n+m} + I_{n+m} e^{-2i\pi\frac{n+m}{N}}) \\
&= \frac{1}{2}(P_{n+m} + e^{-\frac{2i\pi}{2}} I_{n+m} e^{-2i\pi\frac{n}{N}}) \\
&= \frac{1}{2}(P_{n+m} - I_{n+m} e^{-2i\pi\frac{n}{N}})
\end{aligned}$$

Il suffit donc d'en calculer la moitié.

Etape 1 : on calcule P_n et $I_n e^{-2i\pi\frac{n}{N}}$.

Etape 2 : on calcule $Y_n = \frac{1}{2}(P_n + I_n e^{-2i\pi\frac{n}{N}})$

Etape 3 : on en déduit $Y_{n+M} = \frac{1}{2}(P_{n+m} - I_{n+m} e^{-2i\pi\frac{n}{N}})$

Shéma

$P_0 \quad P_1 \quad \ldots \quad P_{m-1} \quad I_0 \quad I_1 \quad \ldots \quad I_{m-1}$

$Y_0 \quad Y_1 \quad \ldots \quad Y_{m-1} \quad Y_m \quad Y_{1+m} \quad \ldots \quad Y_{2m-1}$

Etape 1 : $2(m-1)^2 + m + 1 \simeq \frac{1}{2}N^2$ multiplications

Etapes 2 et 3 : 0 multiplications

Transformée de Fourier discrète de la suite $y_0, y_2, \ldots, y_{N-2} = \widetilde{y}_0, \widetilde{y}_1, \ldots \widetilde{y}_{m-1}$.

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_n &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \widetilde{y}_k e^{-2i\pi k\frac{n}{N}} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \widetilde{y}_{2k} e^{-2i\pi 2k\frac{n}{N}} = P_n \end{aligned}$$

et la transformée de Fourier discrète de la suite $y_1, y_3, \ldots, y_{2m-1}$ est I_n. On recommence (il faut que $m = 2m_1$ soit pair) et ainsi de suite. Si $N = 2^p$ est une puissance de 2 on recommence jusqu'à n'avoir plus que deux données: y_0 et y_1.

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1 e^{-2i\pi 0}) = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \\ Y_1 &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1 e^{-2i\pi\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(y_0 - y_1) \end{aligned}$$

Exemple $N = 8$

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	
y_0	y_2	y_4	y_6	y_1	y_3	y_5	y_7	regroupe pairs et impairs
y_0	y_4	y_2	y_6	y_1	y_5	y_3	y_7	prend un sur deux
P_0	I_0	P_0	I_0	P_0	I_0	P_0	I_0	$P_0 = y_0 \quad I_0 = y_1$

$Y_0 \quad Y_1 \quad Y_0 \quad Y_1 \quad Y_0 \quad Y_1 \quad Y_0 \quad Y_1 \quad Y_0 = \frac{1}{2}(P_0 + P_1) \quad Y_0 = \frac{1}{2}(P_0 - P_1)$

Passage d'une suite de longueur m à une suite de longueur $2m$.

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{1}{2}(P_n + e^{-2i\pi\frac{n}{N}} I_n) \\ Y_{n+m} &= \frac{1}{2}(P_n - e^{-2i\pi\frac{n}{N}} I_n) \end{aligned}$$

Récapitulation

$$\begin{array}{cccccccc} y_0 & y_4 & y_2 & y_6 & y_1 & y_5 & y_3 & y_7 \\ P_0 & I_0 & P_0 & I_0 & P_0 & I_0 & P_0 & I_0 \\ \\ Y_0 & Y_1 & Y_0 & Y_1 & Y_0 & Y_1 & Y_0 & Y_1 \\ P_0 & P_1 & I_0 & I_1 & P_0 & P_1 & I_0 & I_1 \\ \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & I_0 & I_1 & I_2 & I_3 \\ \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 & Y_7 \end{array}$$

Cout de l'algorithme : pour $N = 2^p$, $\frac{N}{2}(\log_2 N - 2) + 1$ multiplications
$N \log_2 N$ additions.
Pour $N = 1024$: 4097 multiplications, 10240 additions. Rapport 250.

5 Transformée de Fourier des fonctions

Définition 6 *Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de f est définie par*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x)dx$$

La transformée de Fourier inverse de f est définie par

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x} f(x)dx$$

Exemple

$$f = 1\!\!\!\!1_{[a,b]} \qquad ; \qquad \widehat{f} = \begin{cases} b-a & \text{si } \xi = 0 \\ \dfrac{\sin\pi(b-a)\xi}{\pi\xi} e^{-i\pi(a+b)\xi} & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété 10 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_1 \ \textit{et} \lim_{|\xi|\to+\infty} = 0$$

Proposition 11 *Si $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$*
$\widehat{f}^{(k)}(\xi) = \widehat{(-2i\pi x)^k f(x)}$
$\widehat{f^{(k)}} = (2i\pi\xi)^k \widehat{f}(\xi)$
Si f est à support borné, $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Propriété 12 *On a les propriétés suivantes:*
$\overline{\mathcal{F}(f)} = \overline{\mathcal{F}}(\overline{f})$
$\widehat{f}(-x) = \widehat{f(-x)}$
Si f est paire, $\widehat{f}$ est paire.
Si f est réelle paire (impaire), $\widehat{f}$ est réelle paire (impaire).
$\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-2i\pi a\xi} \widehat{f}(\xi)$
$\tau_a \widehat{f}(\xi)(\xi) = \widehat{e^{2i\pi ax} f(x)}$

Exercice Soit $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Calculer les transformées de Fourier de

$$e^{-ax}H(x) \ ; \ e^{ax}H(-x) \ ; \ \frac{x^k}{k!}e^{-ax}H(x) \ ; \ \frac{x^k}{k!}e^{ax}H(-x)$$

$$\frac{x^k}{k!}e^{ax}H(-x) \ ; \ e^{-a|x|} \ ; \ sign(x)e^{-a|x|}$$

Exemple Cacul de f par une équation différentielle.
$f(x) = e^{-ax^2}$, $f'(x) = -2axe^{-ax^2}$
$\Rightarrow 2i\pi\xi\widehat{f}(\xi) = \dfrac{a}{\pi}\widehat{f}'(\xi) \Rightarrow \widehat{f}'(\xi) = -\dfrac{2\pi^2}{a}\xi\widehat{f}(\xi) \Rightarrow \widehat{f}(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$
Application $a = \pi$, $\widehat{f} = f$.

Théorème 13 *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ on a $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}(t)) = f(t)$ partout où f est continue.*

Proposition 14 *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ on a $\mathcal{F}(\widehat{f}(x)) = f(-x)$.*

Proposition 15 *Soit f telle que*

$$\forall p \lim_{|x|\to\infty} |x^p f(x)| = 0 \ (f \text{ à décroissance rapide})$$

alors $\widehat{f}$ est à décroissance rapide et

$$f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f)$$

$\mathcal{F}$ est une bijection de l'espace des fonctions à décroissance rapide dans lui-même ($\mathcal{S}$).

Convolution

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$$

Définition 7 *Si f et $g \in L^1(\mathbb{R})$,*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$$

Si $f \in L^1((\mathbb{R})$ *et* $g \in L^2(\mathbb{R})$, $f * g$ *existe et est dans* $L^2(\mathbb{R})$,

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$$

Proposition 16 *Si* g *est continue et dérivable* k *fois,* $f * g$ *est continue et dérivable* k *fois,* $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$. *La convolution régularise.*

5.1 Transformée de Fourier dans $\mathbf{L}^2$

Proposition 17 $\mathcal{S}$ *est dense dans* L^2.

Définition 8 *Soit* $f \in L^2$, $(f_n)_n$ *une suite qui converge vers* f *dans* L^2, $f_n \in \mathcal{S}$.

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{F}(f_n)$$

Si $f \in L^1 \cap L^2$ *les deux définitions coincident.*

Proposition 18 *Si* $f, g \in L^1$, $f, g \in L^2$, *ou* $f \in L^1$, $g \in L^2$

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \qquad ; \qquad \widehat{f.g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) * \widehat{g}(\xi)$$

6 Fourier glissant

6.1 Principe d'incertitude d'Heisenberg

Donne la relation entre la localisation d'un signal et celle de son spectre.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que f, xf, $\xi\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

$$\sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx \qquad \text{dispersion d'énergie en temps}$$

$$\sigma_{\widehat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2|f(\xi)|^2d\xi \qquad \text{dispersion d'énergie en fréquence}$$

$$E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2dx \qquad \text{énergie de} f$$

On appelle durée utile du signal f, Δt tel que

$$\Delta t^2 = \frac{\sigma_f^2}{E_f}$$

bande utile du signal $\Delta\lambda$ tel que

$$\Delta\lambda^2 = \frac{\sigma_{\widehat{f}}^2}{E_f}$$

On ne peut pas localiser finement le signal et sa fréquence, i.e. avoir simultanément Δt et $\Delta\lambda$ petits.

Proposition 19 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, telle que f, xf, $\xi\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. On a*

$$\sigma_f^2\sigma_{\widehat{f}}^2 \geq \frac{E_f}{4\pi} \qquad i.e. \qquad \Delta t\Delta\lambda \geq \frac{1}{4\pi}$$

Démonstration

Proposition 20 *Soit $\Delta\lambda$ une bande utile fixée. Le signal*

$$f(t) = \alpha e^{-(2\pi\Delta\lambda)^2t^2}$$

minimise la durée utile.

Démonstration

6.2 Fourier glissant

Inconvénient de Fourier : pour des signaux périodiques, quelques coefficients permettent de caractériser le signal, les c_n tendent rapidement vers 0. Mais si le signal devient irrégulier, on a beaucoup de coefficients significatifs, et il faut en garder beaucoup pour reconstruire le signal. Tous les aspects temporels disparaissent, et pour connaitre le contenu fréquentiel du signal il faut connaitre tout le signal du début à la fin (principe d'incertitude). Si le comportement fréquentiel du signal change au cours du temps, on ne saura pas à quel moment le changement est intervenu.

6.2.1 Les fenêtres

1ère idée : tronquer le signal en ne regardant que sur l'intervalle [-A,A]
Le spectre devient $\widehat{g}(\lambda) = \widehat{r_A f}(\lambda) = \dfrac{\sin(2\pi A\lambda)}{\pi\lambda} * \widehat{f}(\lambda) = (s_A * \widehat{f})(\lambda)$
sinus cardinal

s'amortit très lentement, présente des lobes importants à l'origine.
Autres fenêtres
triangulaire

Fenêtre de Hamming et Hanning

$$w(t) = (\alpha + (1-\alpha)\cos(2\pi\frac{t}{A}))r(t)$$

Hamming: $\alpha = 0.54$, Hanning: $\alpha = 0.5$

Fenêtre de Gauss : $w(t) = Ae^{-\alpha t^2}$, $\widehat{w}(\lambda) = A\sqrt{\dfrac{\pi}{\sigma}}e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\lambda^2}$

On fait glisser la fenêtre devant le graphe du signal pour prendre en compte toutes les valeurs. On obtient une famille de coefficients à deux paramètres réels λ et b

$$W_f(\lambda, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{w}(t-b)e^{-2i\pi\lambda t}dt$$

λ joue le role d'une fréquence localisée autour de l'abscisse b du signal temporel. C'est la transformée de Fourier à fenêtre glissante.

Théorème 21 *Soit* $w(t) = \pi^{-1/4} e^{-1/2tt^2}$ *et* $w_{\lambda b}(t) = w(t-b) e^{2i\pi\lambda t}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, *on considère les coefficients*

$$W_f(\lambda, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{w}_{\lambda b}(t) dt$$

On a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |W_f(\lambda, b)|^2 d\lambda db = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \qquad \textit{conservation de l'énergie}$$

$$f(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(\lambda, b) w_{\lambda b}(x) d\lambda db \qquad \textit{formule de reconstruction}$$

Comparaison entre Fourier et Gabor

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi \qquad f(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(\lambda, b) w_{\lambda b}(x) d\lambda db$$

décomposition de f sur une famille de fonctions jouant un rôle analogue à celui d'une base, les sommes étant remplacées par des intégrales.

Fourier : fonctions sinusoidales

Gabor : sinusoides fortement amorties

Dans l'espace des fréquences

Fourier : fonctions de base totalement concentrées en fréquence (impulsion Dirac) et totalement réparties dans le temps (sinusoides de $-\infty$ à $+\infty$). dans l'espace des fréquences on perd totalement l'information en temps.

Gabor : compromis temps fréquence (limité par la relation d'incertitude) sur la localisation.

Inconvénient de Gabor : la fenêtre est de taille fixe, certains signaux ont des variations d'ordre de grandeur très variables.

son : attaque de la note très brève siège de hautes fréquences. reste de la note fréquences beaucoup plus basses. mécanique des fluides échelles macroscopique et microscopiques.

Morlet (83) : la fenêtre varie par translation dilatation ou contraction, début des ondelettes.