

# Modèles and propriétés

C. Lantuéjoul

christian.lantuejoul@ensmp.fr

*Centre de Géostatistique  
Ecole des Mines de Paris*

# Plan général

## Processus ponctuels

- processus de Poisson
- processus de Cox

## Ensembles aléatoires

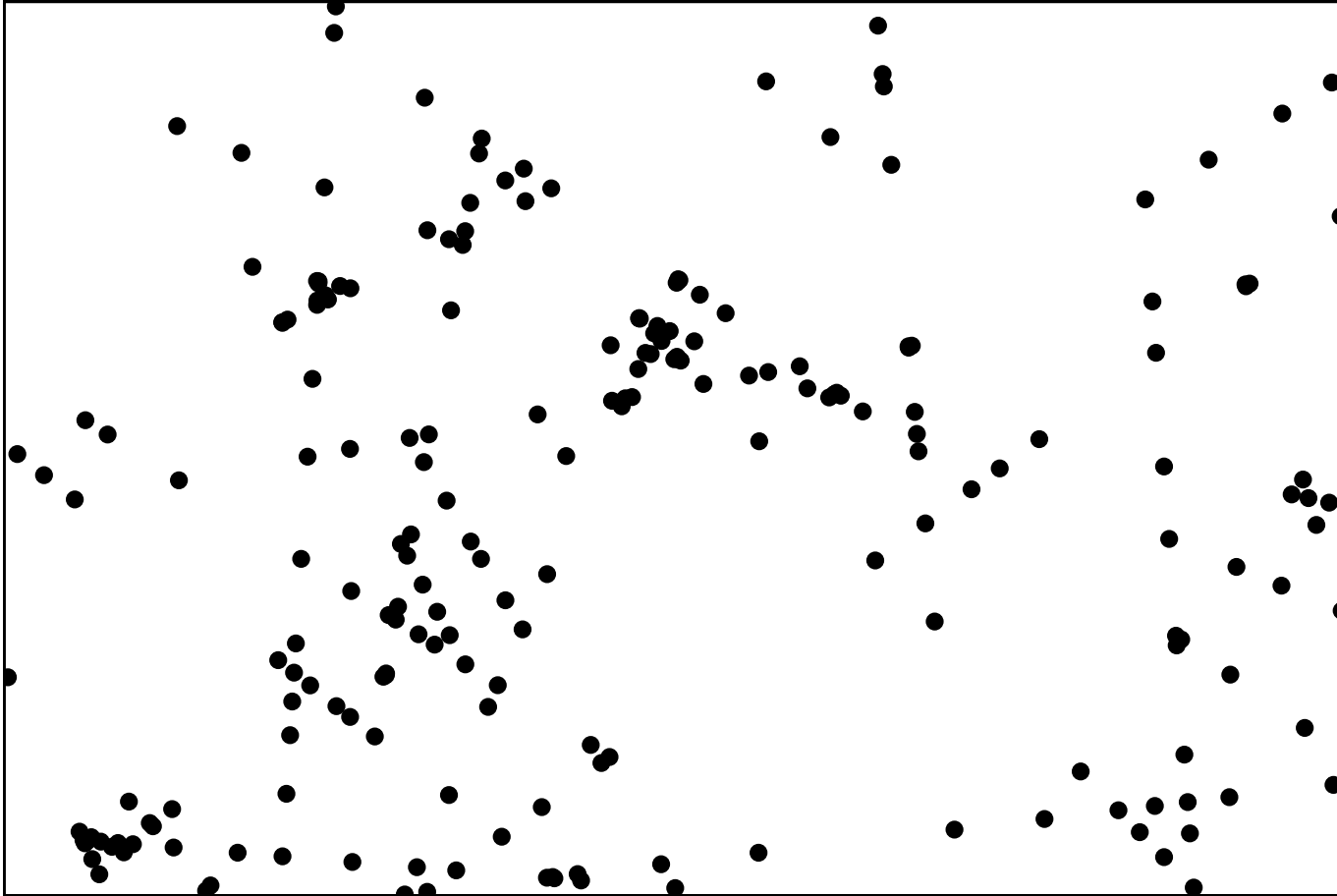
- schéma booléen
- ensemble d'excursion d'une fonction gaussienne

## Fonctions aléatoires

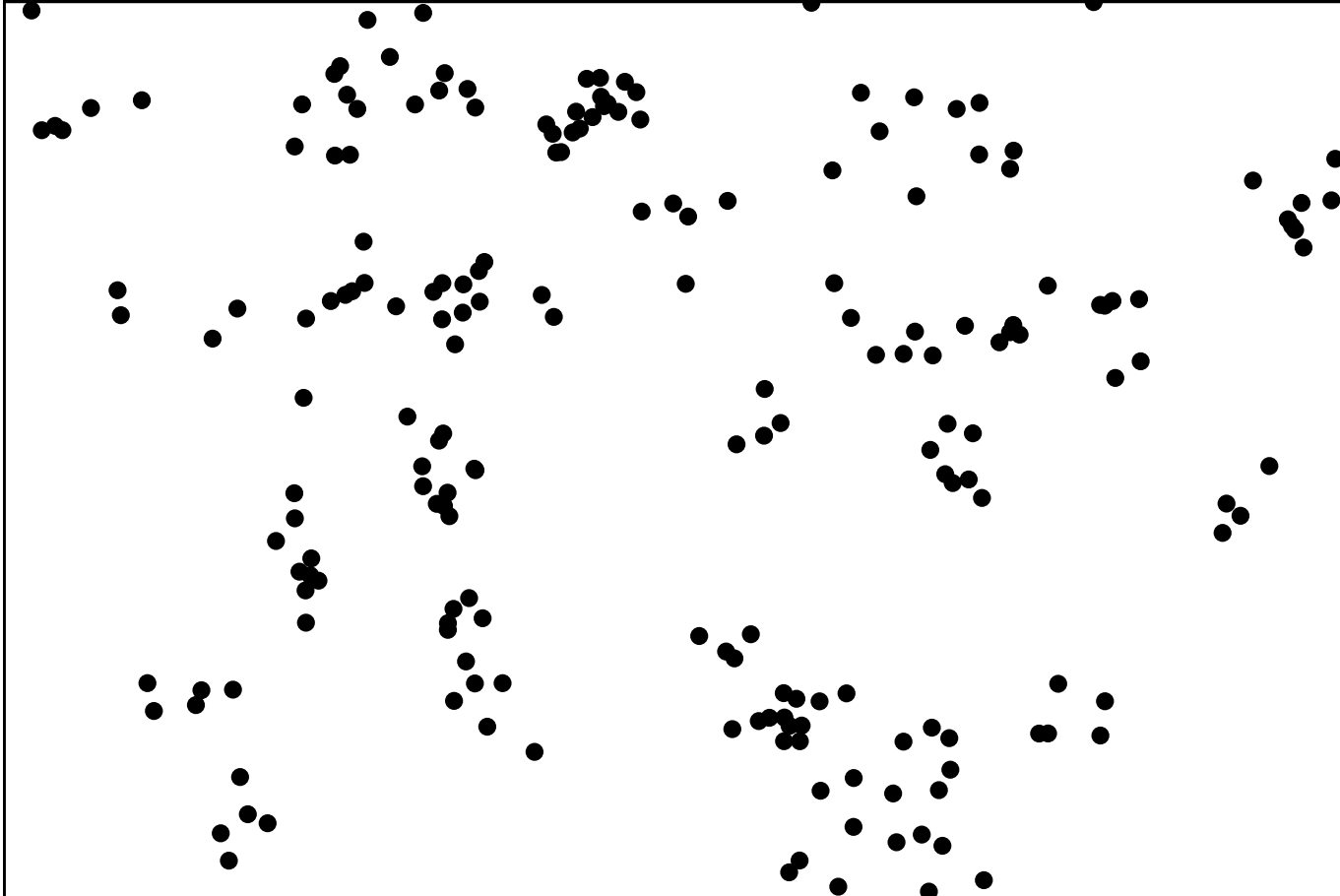
- fonction aléatoire gaussienne
- fonction de dilution
- fonction booléenne

# Processus ponctuels

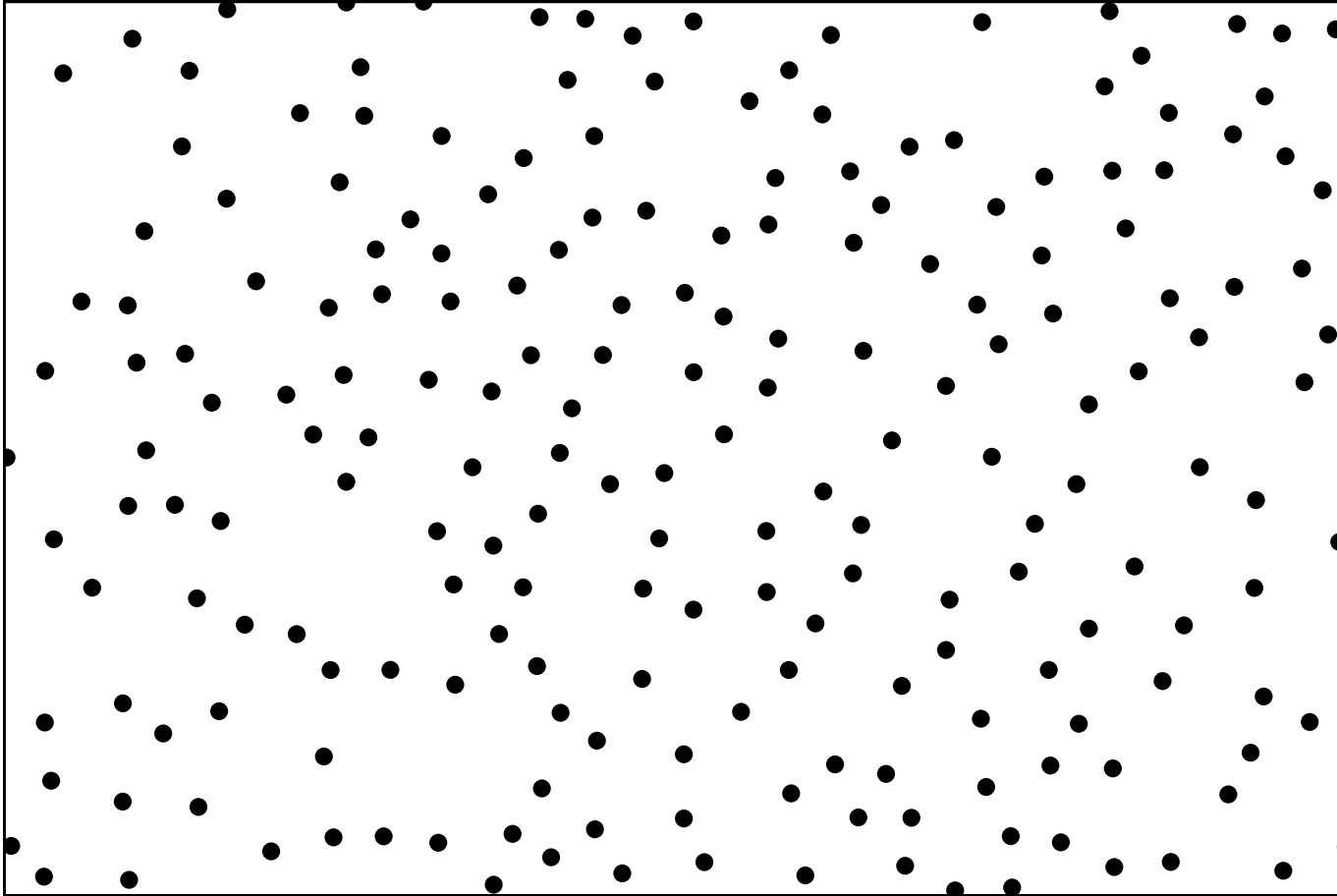
# Exemple 1



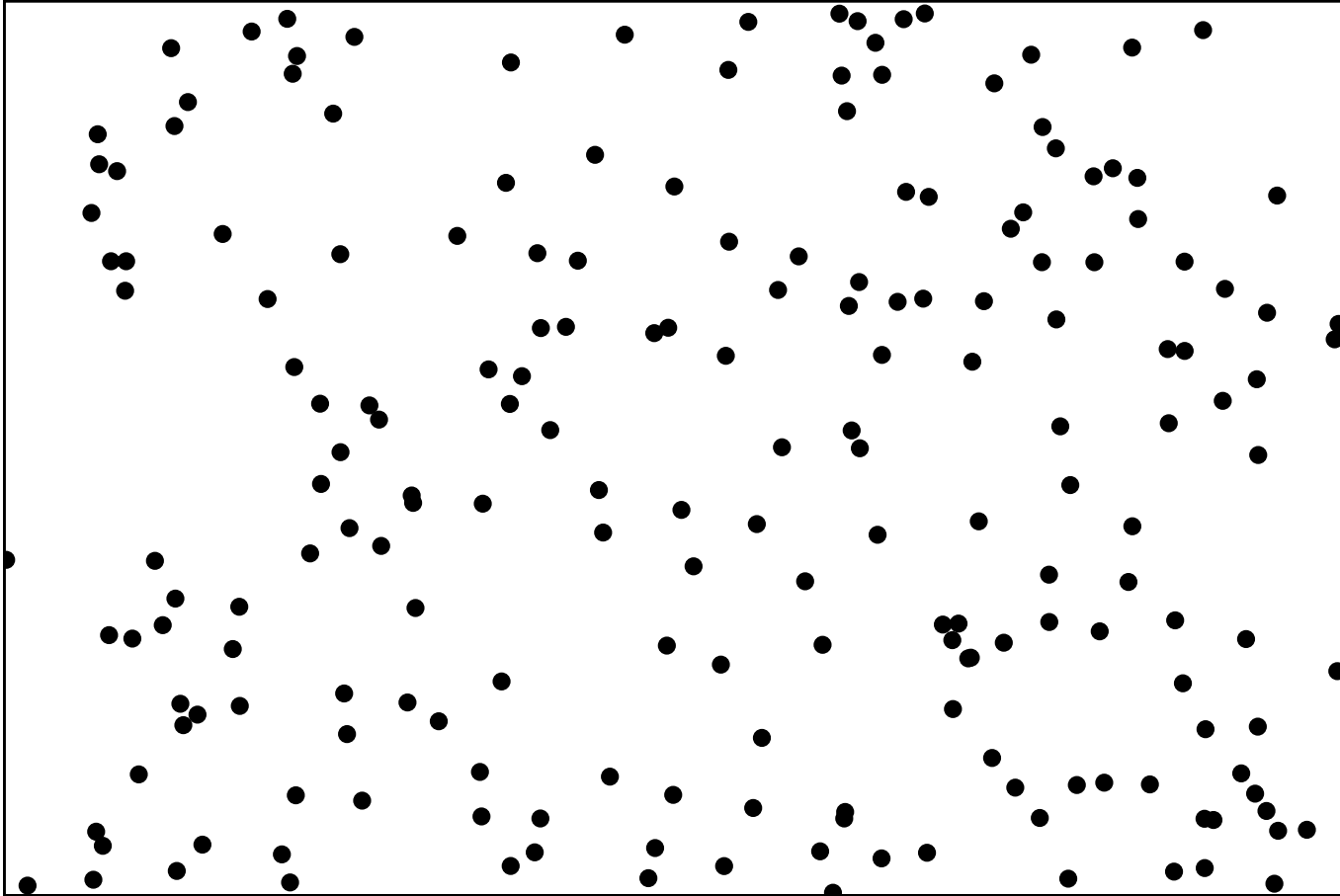
## Exemple 2



## Exemple 3



## Exemple 4



# Processus de Poisson homogène

## Définition

i) le nombre de points  $N(A)$  tombés dans un domaine  $A \subset \mathbb{R}^d$  de volume  $|A|$  fini suit une **loi de Poisson** de moyenne  $\theta |A|$

$$P\{N(A) = n\} = \exp(-\theta|A|) \frac{(\theta|A|)^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

ii) les nombres de points  $N(A_1), \dots, N(A_p)$  tombés dans des domaines deux à deux disjoints  $A_1, \dots, A_p$  sont **mutuellement indépendants**

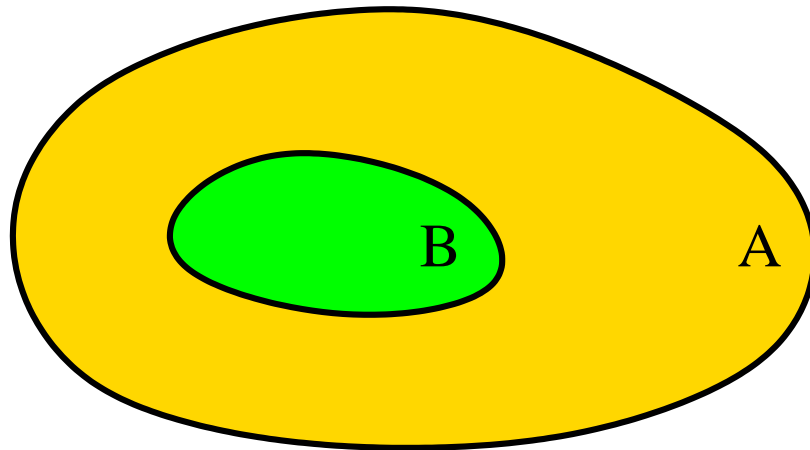
$\theta$  est appelé la **densité** du processus



# Processus de Poisson homogène

## Propriété fondamentale

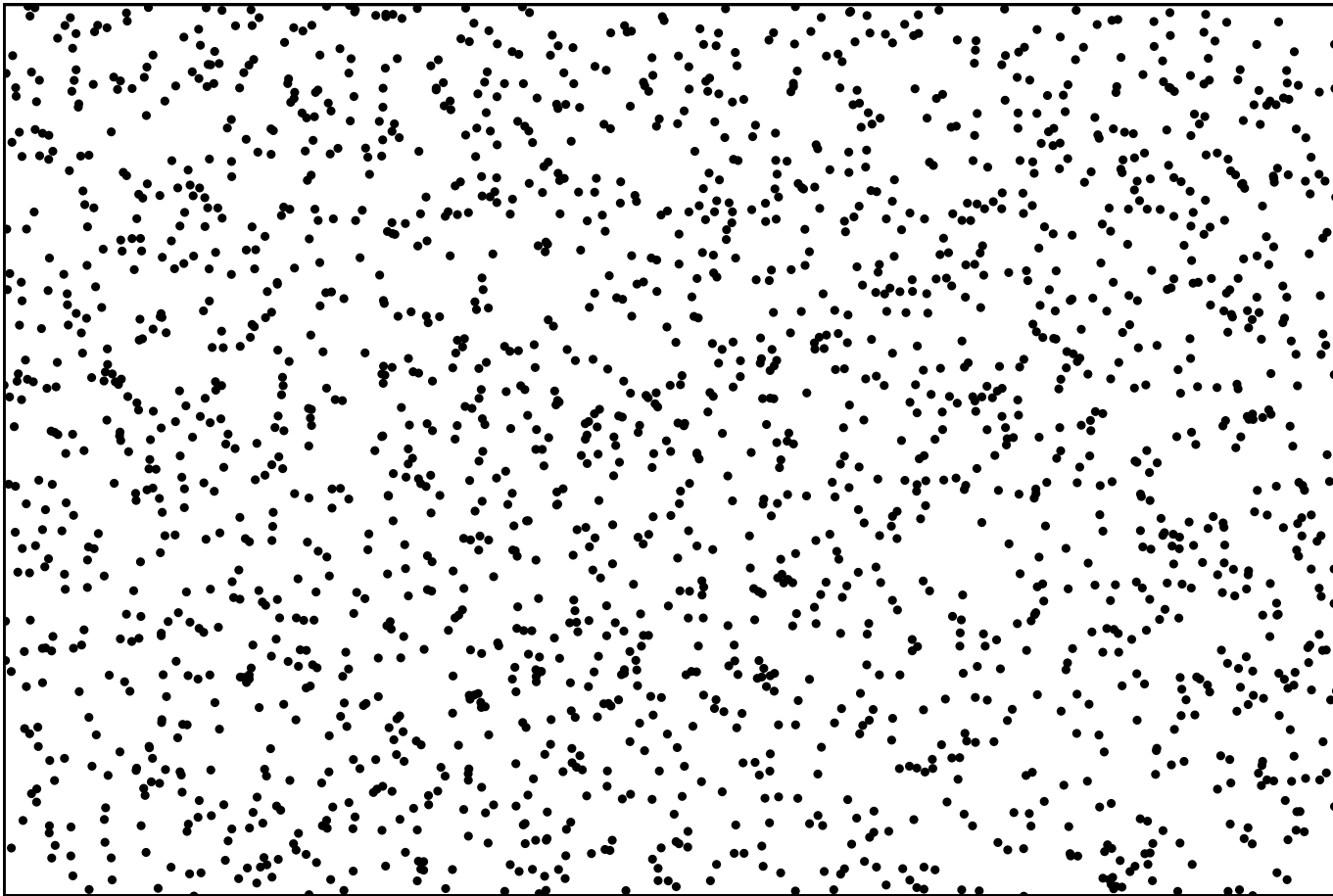
Si  $N(A) = n > 0$ , les  $n$  points sont disposés de façon **indépendante et uniforme** in  $A$ .



$$P\{N(B) = i \mid N(A) = n\} = \binom{n}{i} \left(\frac{|B|}{|A|}\right)^i \left(1 - \frac{|B|}{|A|}\right)^{n-i}$$

# Processus de Poisson homogène

## Exemple



# Processus de Poisson hétérogène

## Définition

La densité du processus  $\theta = (\theta(x), x \in \mathbb{R}^d)$  **varie** dans l'espace.

i) le nombre de points  $N(A)$  tombés dans le domaine  $A$  suit une loi de Poisson de moyenne

$$\theta(A) = \int_A \theta(x) dx \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

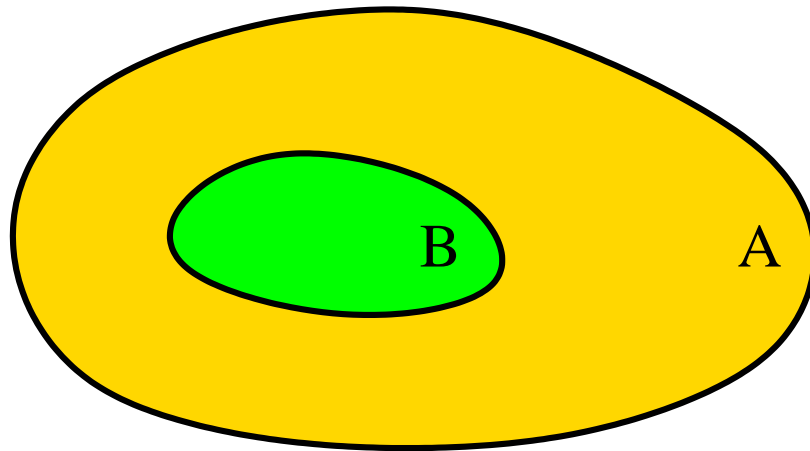
ii) les nombres de points  $N(A_1), \dots, N(A_p)$  tombés dans des domaines deux à deux disjoints  $A_1, \dots, A_p$  sont **mutuellement indépendants**.

# Processus de Poisson hétérogène

## Propriété fondamentale

Si  $N(A) = n > 0$ , les  $n$  points sont disposés **indépendamment** les uns des autres selon la densité

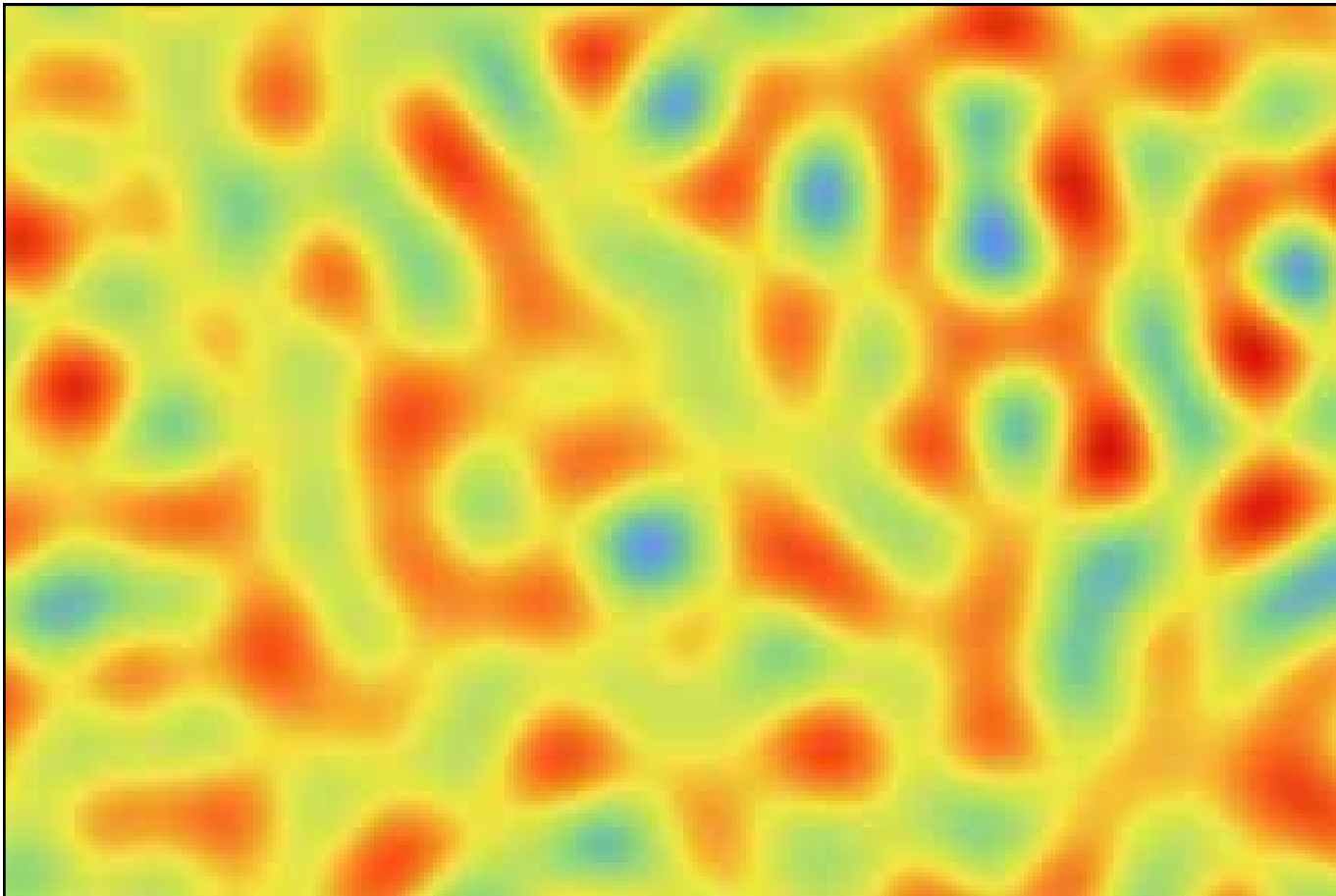
$$f(x) = \frac{\theta(x)}{\theta(A)} \quad x \in A$$



$$P\{N(B) = i \mid N(A) = n\} = \binom{n}{i} \left(\frac{\theta(B)}{\theta(A)}\right)^i \left(1 - \frac{\theta(B)}{\theta(A)}\right)^{n-i}$$

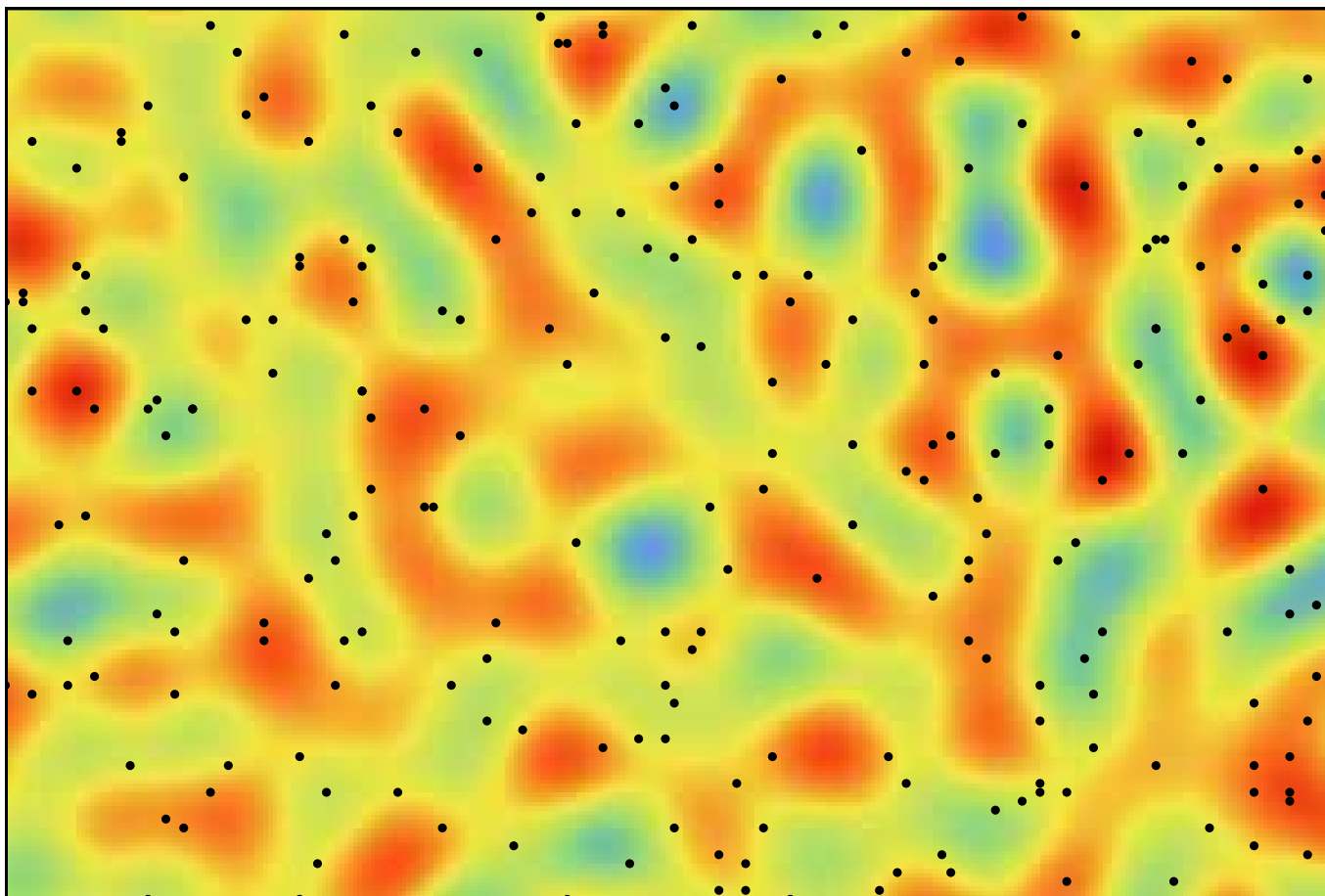
# Processus de Poisson hétérogène

## Exemple



# Processus de Poisson hétérogène

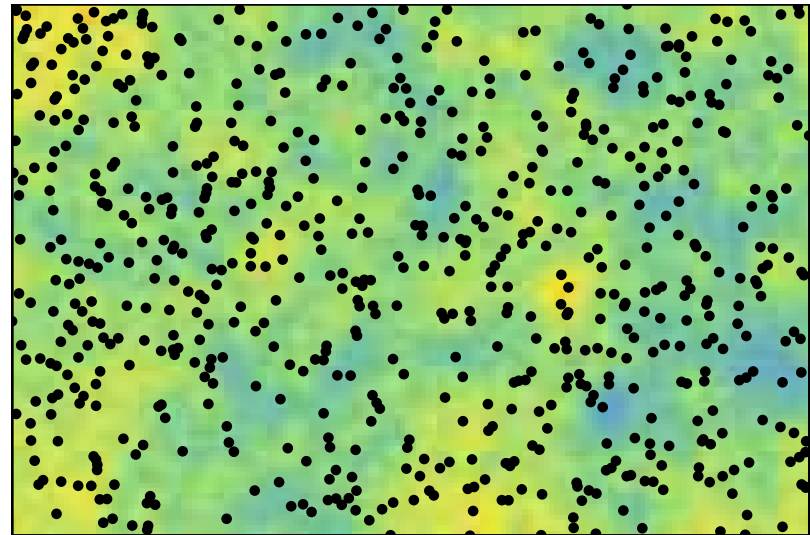
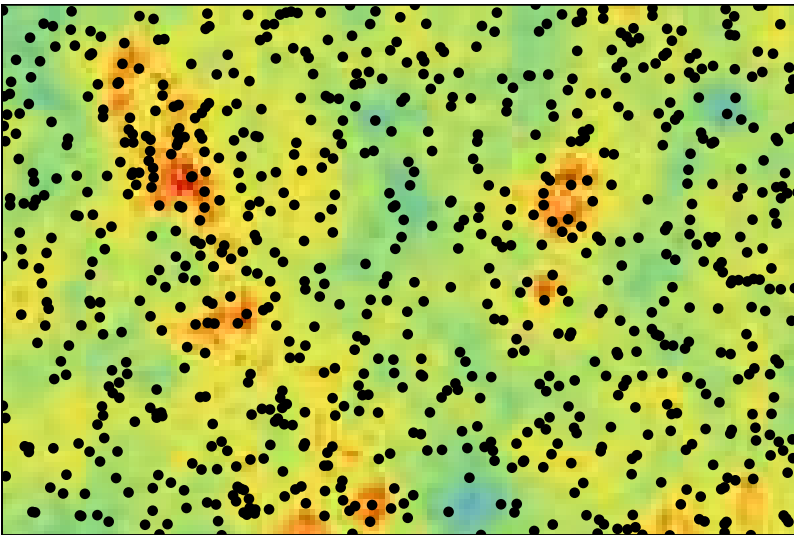
## Exemple



# Processus de Cox

## Definition

Un processus de Cox est un processus de Poisson à densité **aléatoire**



Densité aléatoire  $\Theta = (\Theta(x), x \in \mathbb{R}^d)$

# Processus de Cox

## Loi de $N(A)$

$N(A)$  suit une loi de Poisson de paramètre **aléatoire**  $\Theta(A)$

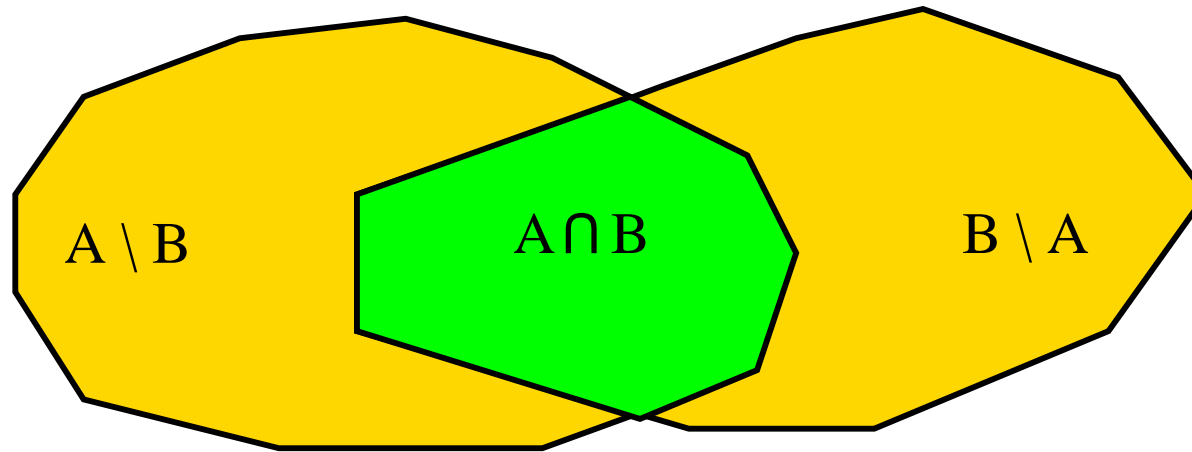
$$P\{N(A) = n\} = E \left\{ \exp(-\Theta(A)) \frac{(\Theta(A))^n}{n!} \right\} \quad n \in \mathbb{N}$$

**Moyenne**  $E\{N(A)\} = E\{\Theta(A)\}$

**Variance**  $Var\{N(A)\} = E\{\Theta(A)\} + Var\{\Theta(A)\}$



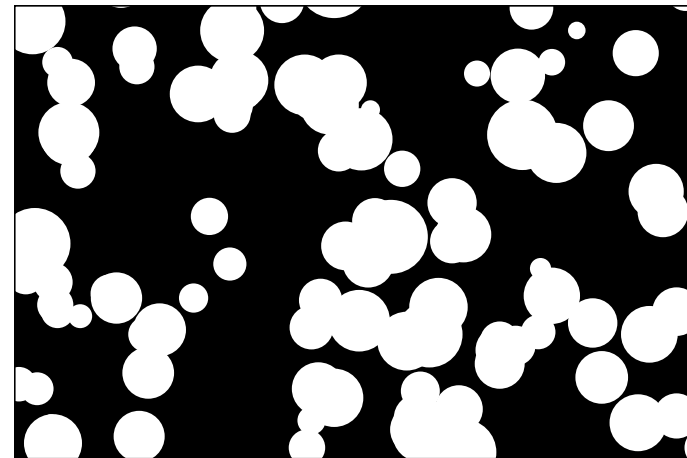
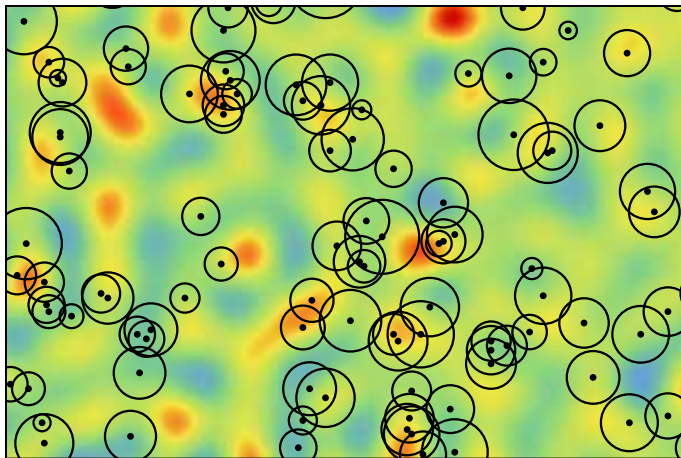
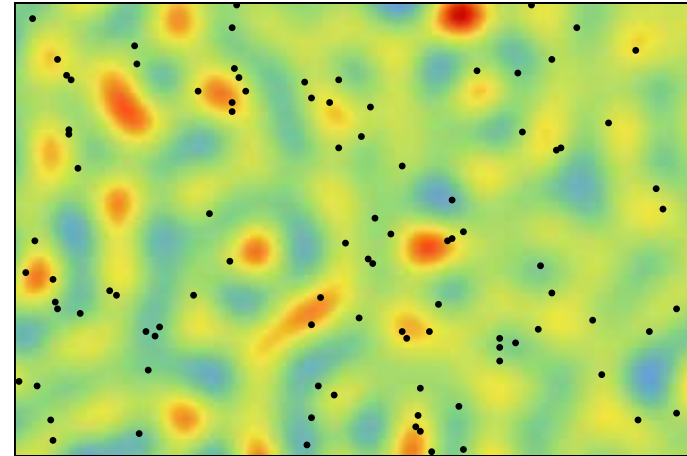
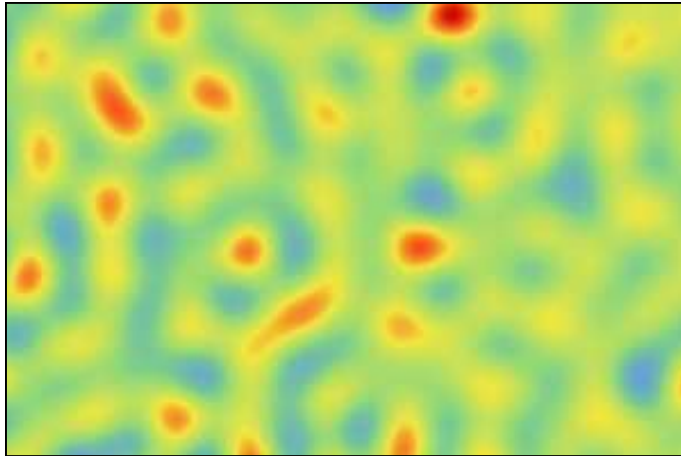
# Processus de Cox Covariance



$$Cov\{N(A), N(B)\} = E\{\Theta(A \cap B)\} + Cov\{\Theta(A), \Theta(B)\}$$

# Schéma booléen

# Le schéma booléen



## Le schéma booléen (2)

Ingredients de base:

- un processus de Poisson  $\mathcal{P}$  de densité  $\theta = (\theta(x), x \in \mathbb{R}^d)$ ;
- une famille  $(A(x), x \in \mathbb{R}^d)$  de compacts aléatoires indépendants.

Définition:

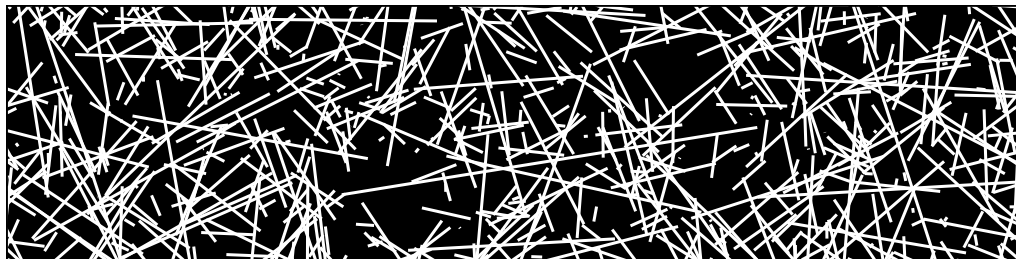
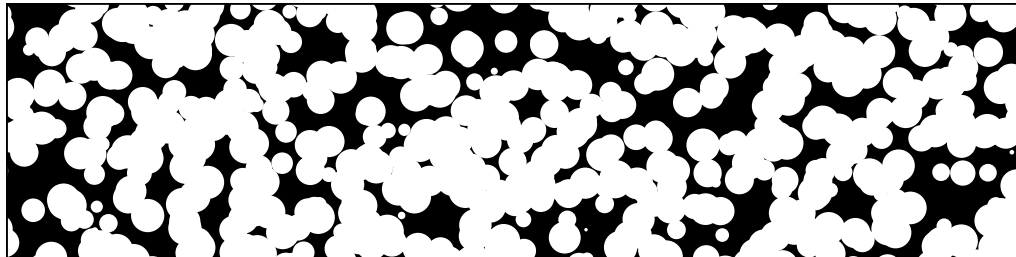
Un schéma booléen est l'union des compacts implantés aux points poissonniens:

$$X = \bigcup_{x \in \mathcal{P}} A(x)$$

$X$  = les objets

$X^c$  = les pores

## Exemples de schéma booléen



# Fonctionnelle d'évitement d'un schéma booléen

Le nombre moyen d'objets rencontrant le compact  $K$  de  $\mathbb{R}^d$  est

$$\vartheta(K) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x) P\{A(x) \cap K \neq \emptyset\} dx \leq \infty$$

Si  $\vartheta < \infty$ , le schéma booléen est dit **localement fini**.

Dans ce cas, le nombre  $N(K)$  d'objets rencontrant  $K$  suit une **loi de Poisson** de moyenne  $\vartheta(K)$ :

$$P\{N(K) = n\} = \exp(-\vartheta(K)) \frac{\vartheta(K)^n}{n!}$$

En particulier, la **fonctionnelle d'évitement** du schéma booléen est

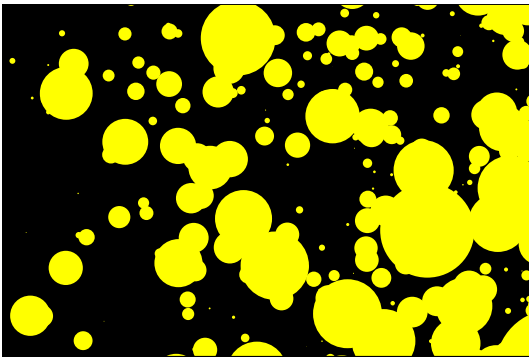
$$P\{K \cap X = \emptyset\} = P\{N(K) = 0\} = \exp(-\vartheta(K)) \quad K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$$

## Stabilité par union indépendante

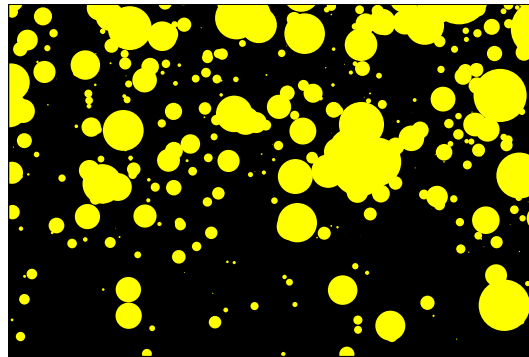
Soient  $X'$  et  $X''$  deux schémas booléens indépendants de paramètres  $(\theta', A')$  and  $(\theta'', A'')$ .

Alors  $X' \cup X''$  est un schéma booléen de paramètres  $(\theta, A)$

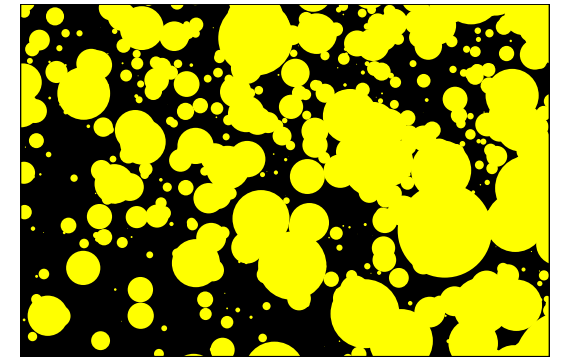
$$\begin{cases} \theta(x) &= \theta'(x) + \theta''(x) \\ A(x) &\stackrel{\mathcal{L}}{=} A'(x) \left( \text{prob. } \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} \right) \text{ ou bien } A''(x) \left( \text{prob. } \frac{\theta''(x)}{\theta(x)} \right) \end{cases}$$



$X'$



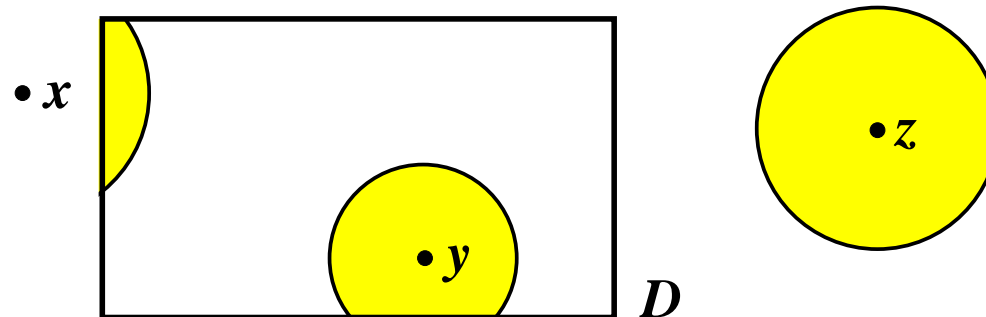
$X''$



$X' \cup X''$

## Stabilité par intersection

Soit  $X$  un schéma booléen de paramètres  $(\theta, A)$ , et soit  $D$  une partie compacte ou fermée de  $\mathbb{R}^d$ .



Alors  $X \cap D$  est aussi un **schéma booléen** de paramètres  $(\theta^{(D)}, A^{(D)})$

$$\begin{cases} \theta^{(D)}(x) & = & \theta(x) P\{A(x) \cap D \neq \emptyset\} & x \in \mathbb{R}^d \\ A^{(D)}(x) & \stackrel{\mathcal{L}}{=} & A(x) \cap D \mid A(x) \cap D \neq \emptyset \end{cases}$$



# Modèles à base d'objets

# Fonction de dilution

Ingredients de base:

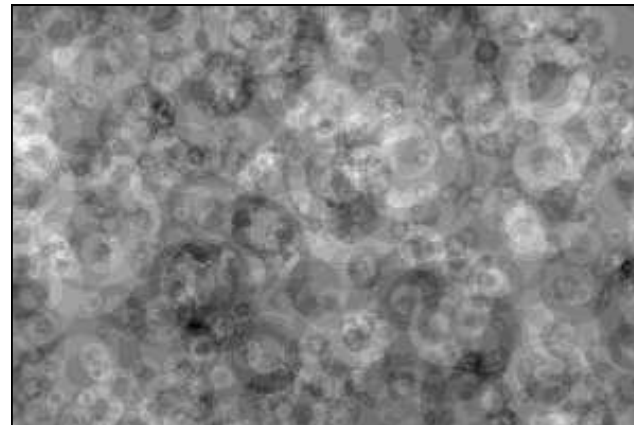
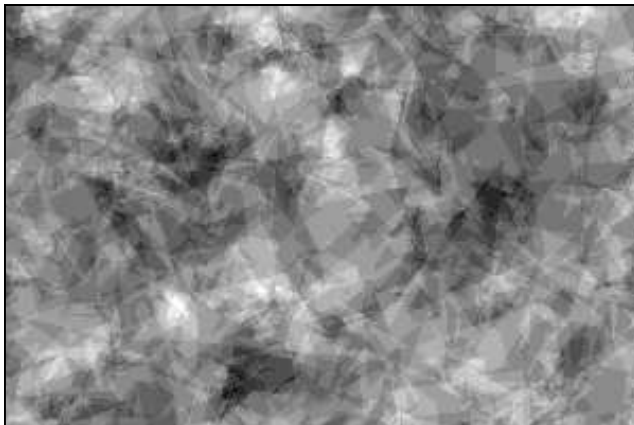
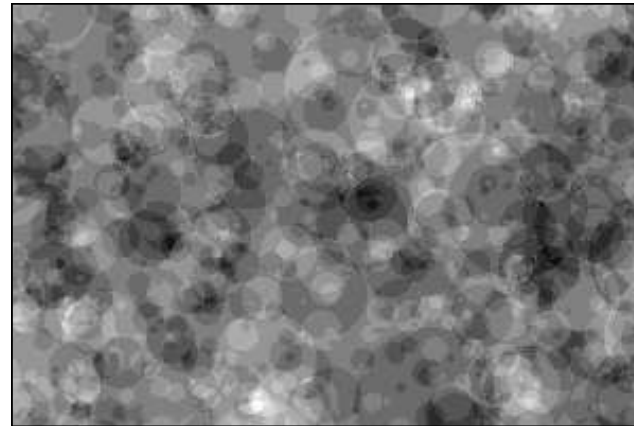
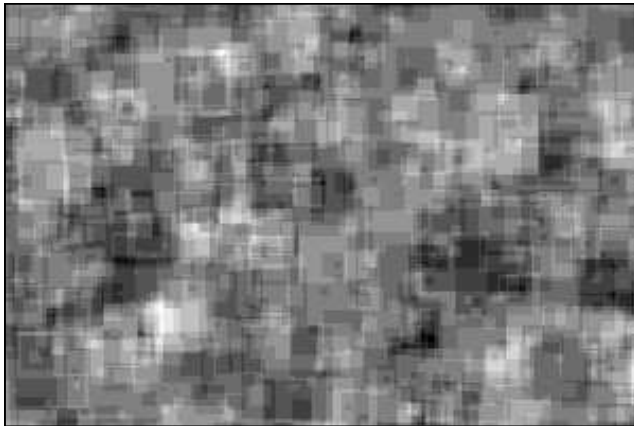
- un **processus de Poisson** de densité  $\theta$  dans  $\mathbb{R}^d$ ;
- une famille  $(A(x), x \in \mathbb{R}^d)$  d'**objets** indépendants;
- une famille  $(\varepsilon(x), x \in \mathbb{R}^d)$  de **poids** indépendants et uniformément distribués sur  $\{-1, +1\}$ .

**Definition:**

Une fonction de dilution attribue à chaque point la somme des poids des objets poissonniens qui le contiennent.

$$Z(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \varepsilon(p) 1_{x \in A(p)}$$

## Exemples de fonctions de dilution



Réalisations de 4 fonctions de dilution avec pour objets des carrés (HG), des polygones poissonniens (HD), des disques (BG) et des anneaux (BD).

# Covariance d'une fonction de dilution

Cas général:

$$\text{Cov}\{Z(x), Z(y)\} = \int_{\mathbb{R}^d} \theta(p) P\{x, y \in A(p)\} dp$$

Cas stationnaire:

- densité constante
- la loi des objets ne depend pas de leur point d'implantation

$$\text{Cov}\{Z(x), Z(y)\} = \theta E|A_x \cap A_y|$$

$(K(h) = E|A \cap A_h|$  est le **covariogramme géométrique** de  $A$ )

# Fonction booléenne

Ingredients de base:

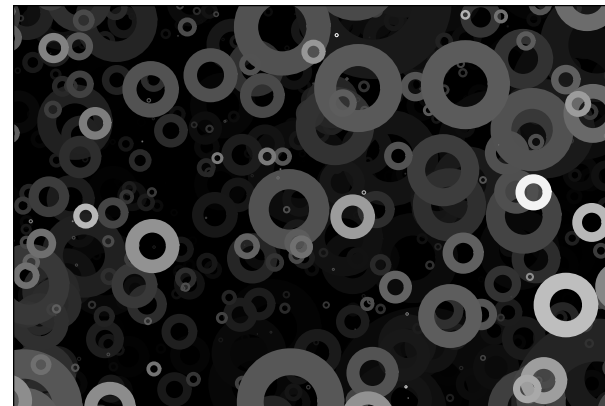
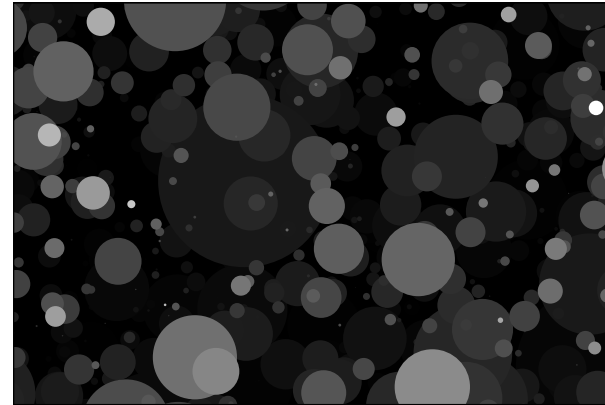
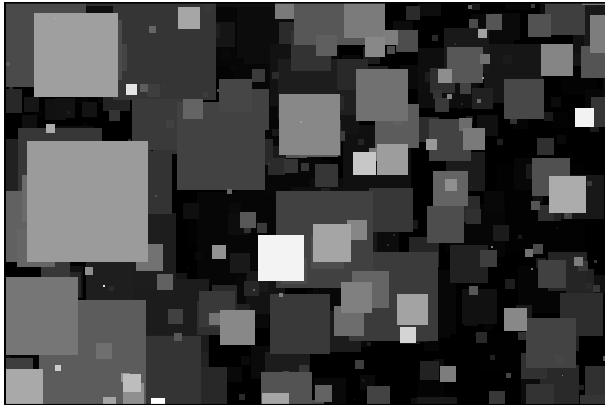
- un processus de Poisson de densité  $\theta$  dans  $\mathbb{R}^d$ ;
- une famille  $(A(x), x \in \mathbb{R}^d)$  d'objets indépendants;
- une famille  $(\varepsilon(x), x \in \mathbb{R}^d)$  de poids indépendants de loi  $F(x, \cdot)$ .

Definition:

Une fonction booléenne attribue à chaque point le maximum des poids des objets poissonniens qui le contiennent.

$$Z(x) = \max_{p \in \mathcal{P}} \varepsilon(p) 1_{x \in A(p)}$$

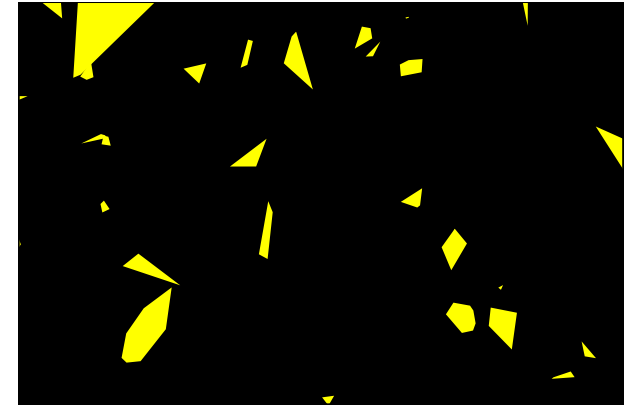
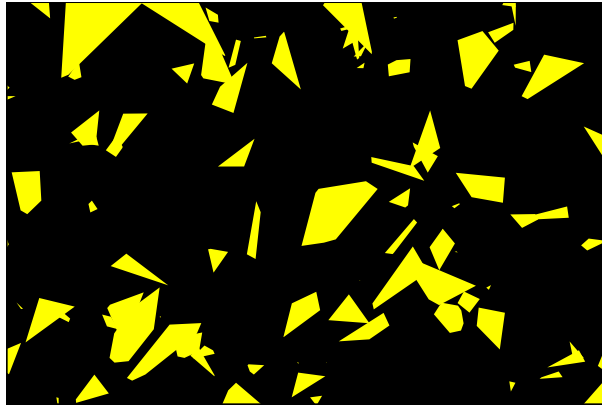
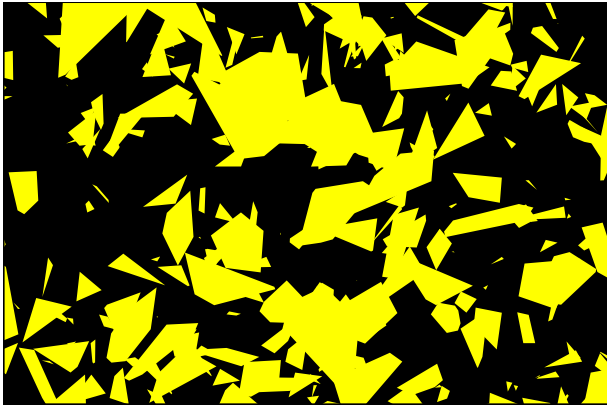
## Exemples de fonctions booléennes



Réalisations de 4 fonctions booléennes avec pour objets des carrés (HG), des polygones poissonniens (HD), des disques (BG) et des anneaux (BD).

# Propriété principale d'une fonction booléenne

Les ensembles d'excursion d'une fonction booléenne au dessus de tout seuil sont des schémas booléens



$X_\lambda = \{Z \geq \lambda\}$  est un schéma booléen de paramètres  $(\theta[1 - F(., \lambda)], A)$

Conséquence:

On sait calculer la loi du maximum d'une fonction booléenne dans n'importe quel domaine.

# Le schéma des feuilles mortes

Ingredients de base:

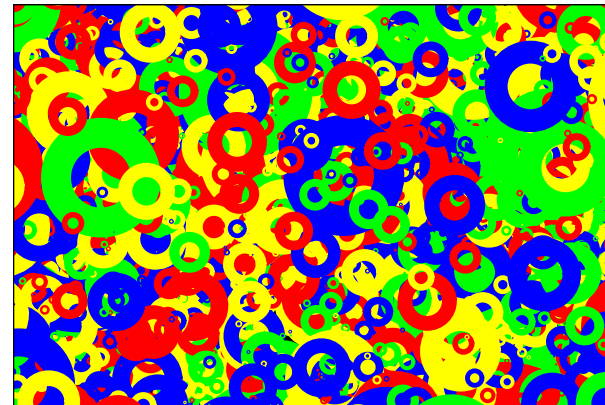
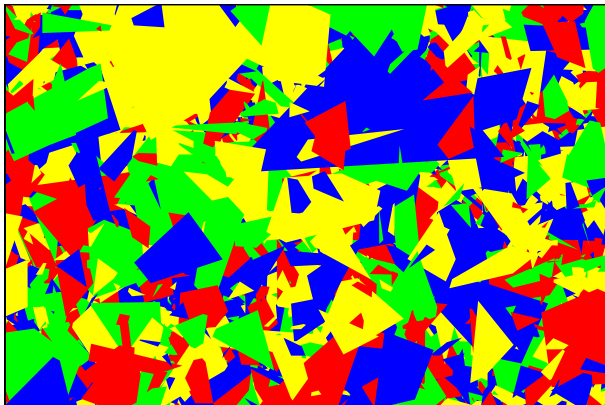
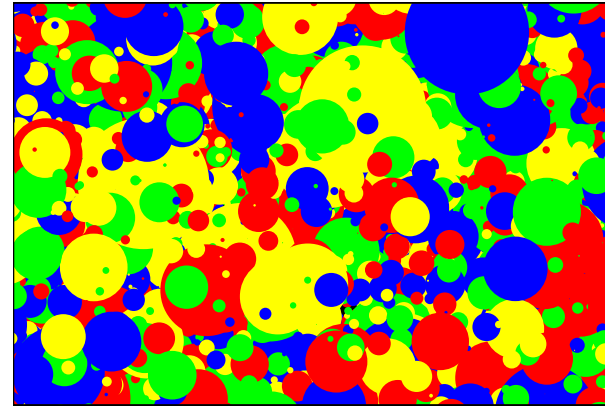
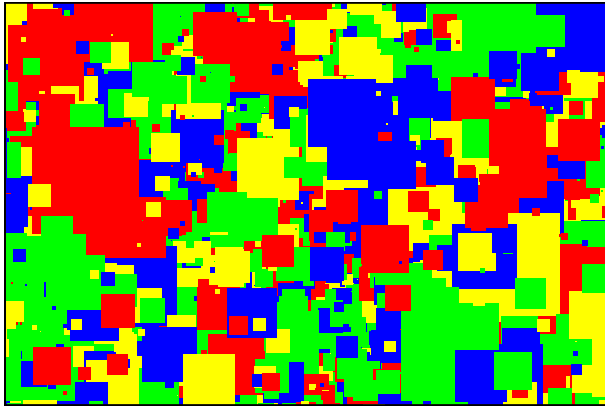
- un **processus de Poisson** de densité  $\theta$  dans  $\mathbb{R}^d \times ]-\infty, 0[$ ;
- une famille  $(A(x), x \in \mathbb{R}^d)$  d'**objets** indépendants;
- à chaque objet est attaché une **couleur**. La probabilité pour que  $A(x)$  ait la couleur  $i$  est  $\alpha_i(x)$ . Des objets différents ont des couleurs indépendantes.

Definition:

Un schéma des feuilles mortes attribue à chaque point la couleur de l'objet **le plus récent** qui le recouvre.



## Exemples de schéma des feuilles mortes



Réalisations de 4 schémas des feuilles mortes avec pour objets des carrés (HG), des polygones poissonniens (HD), des disques (BG) et des anneaux (BD).

# Fonctions aléatoires gaussiennes

# Fonction aléatoire gaussienne

Définition:

Une fonction aléatoire  $Y = (Y(x), x \in \mathbb{R}^d)$  est dite **gaussienne** si toute combinaison linéaire de ses variables suit une loi gaussienne.

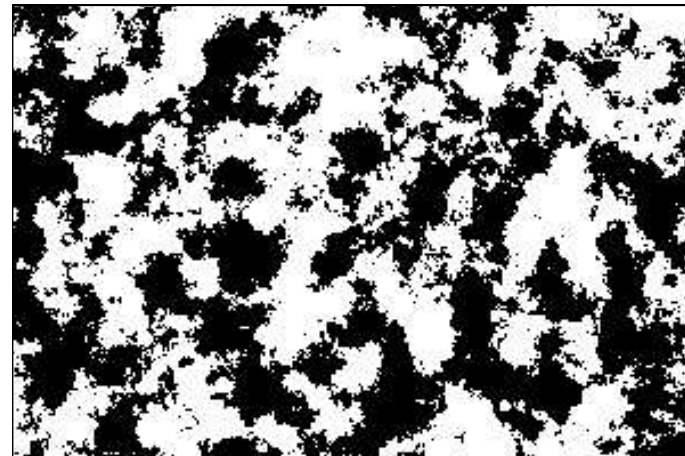
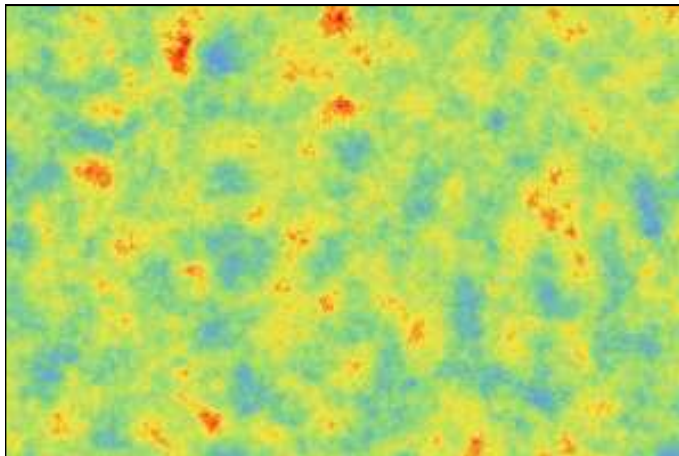
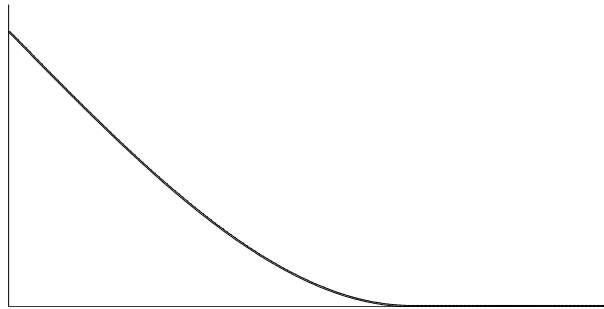
$$\sum_{i=1}^n a_i Y(x_i) \sim \mathcal{G} \left( \sum_{i=1}^n a_i m(x_i), \sum_{i,j=1}^n a_i a_j C(x_i, x_j) \right)$$

Propriété:

La **loi spatiale** de  $Y$  est totalement caractérisée par sa **moyenne** et sa **fonction de covariance**.

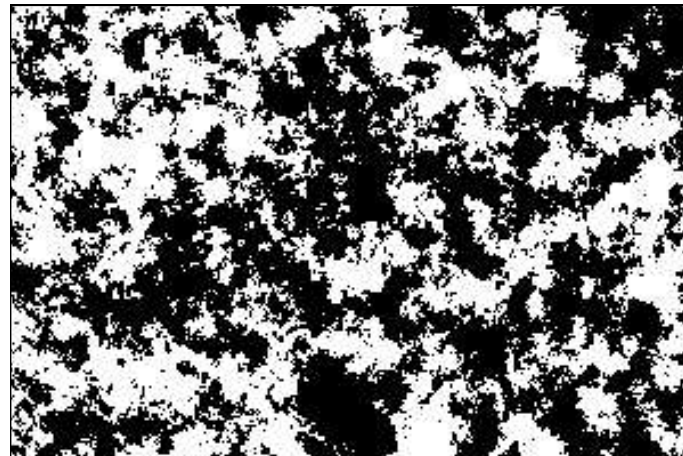
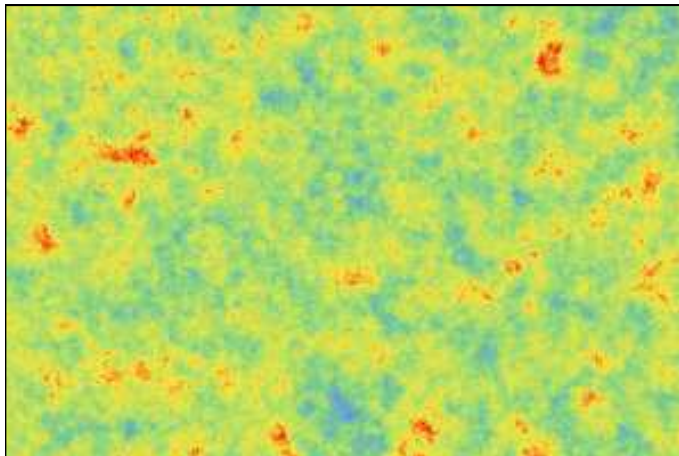
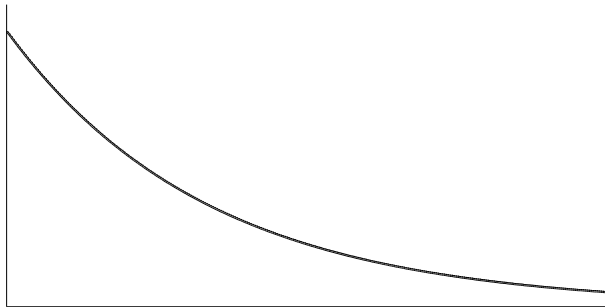
## Covariance sphérique

$$C(h) = \left(1 - \frac{3|h|}{2a} + \frac{1|h|^3}{2a^3}\right) \mathbf{1}_{|h| \leq a}$$



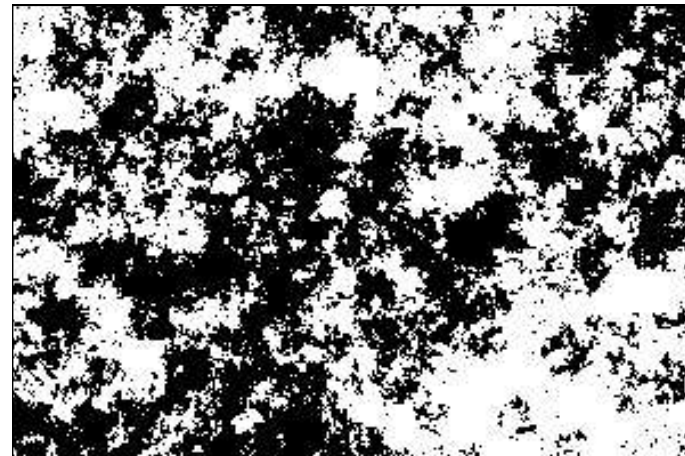
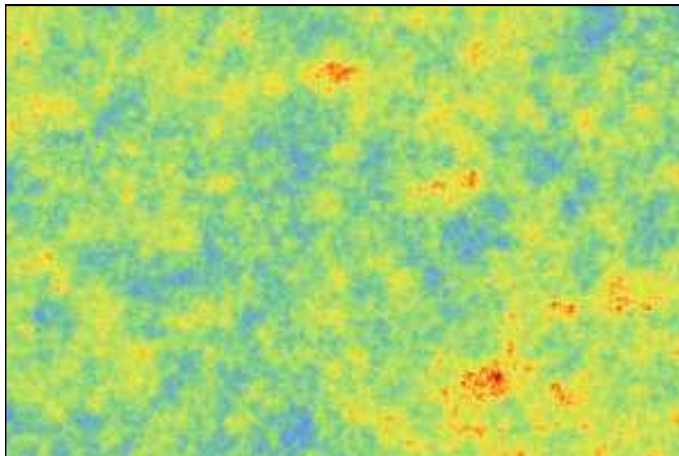
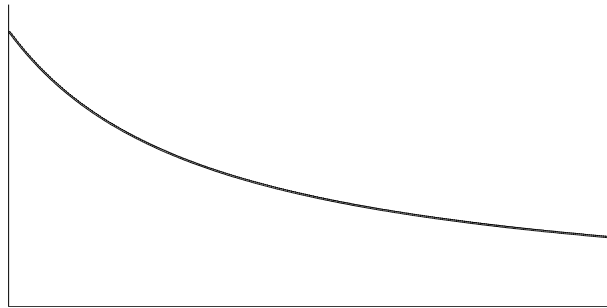
# Covariance exponentielle

$$C(h) = \exp \left\{ -\frac{|h|}{a} \right\}$$



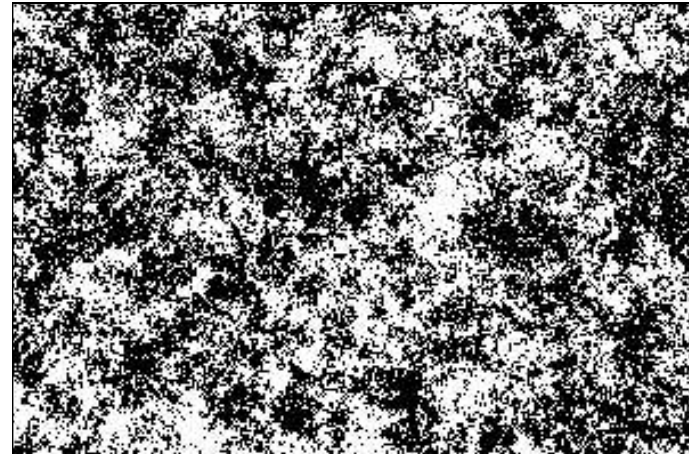
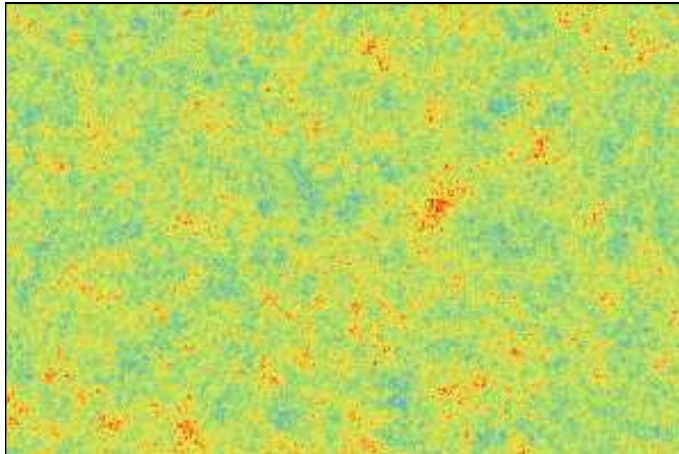
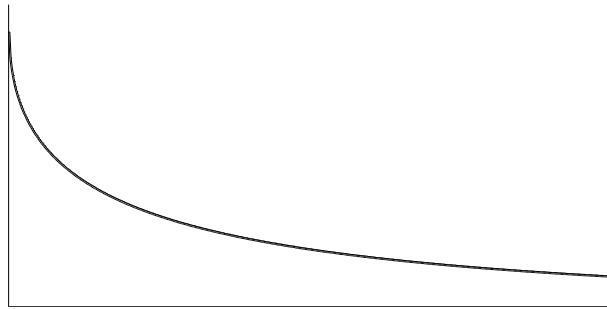
# Covariance hyperbolique

$$C(h) = \frac{1}{1 + \frac{|h|}{a}}$$



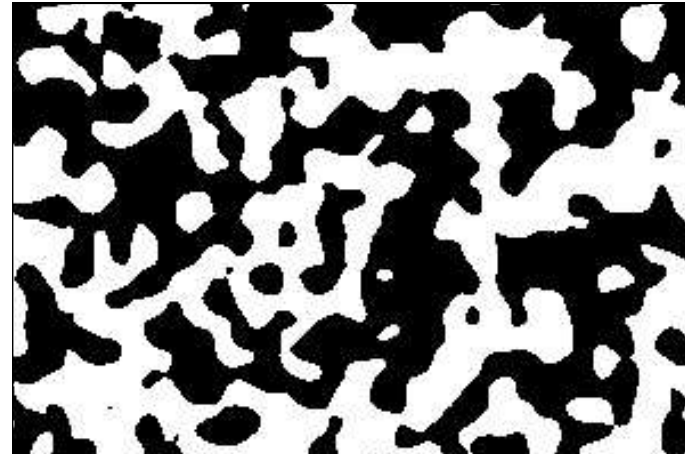
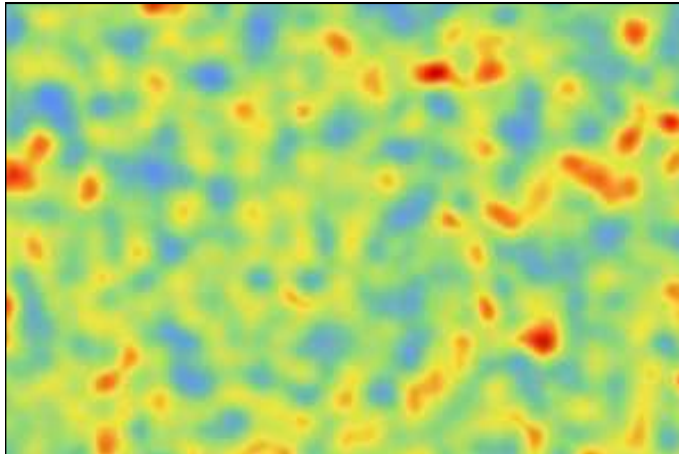
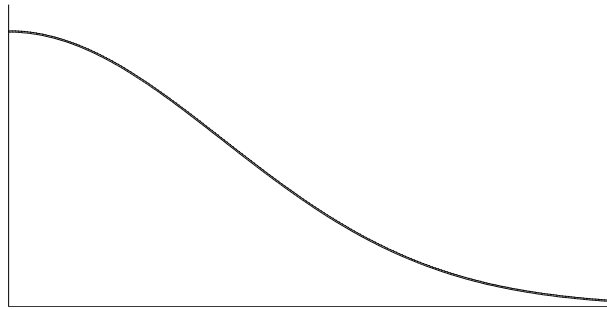
## Covariance stable

$$C(h) = \exp \left\{ -\sqrt{\frac{|h|}{a}} \right\}$$



# Covariance gaussienne

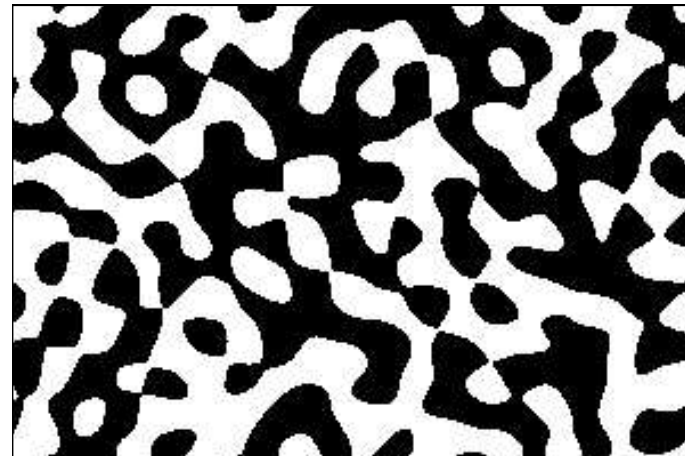
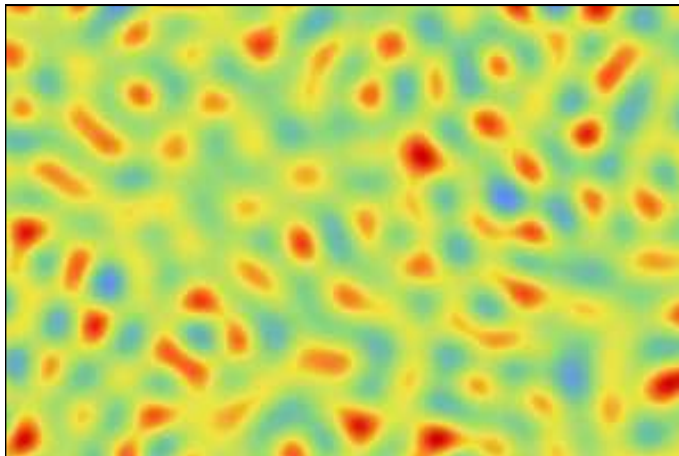
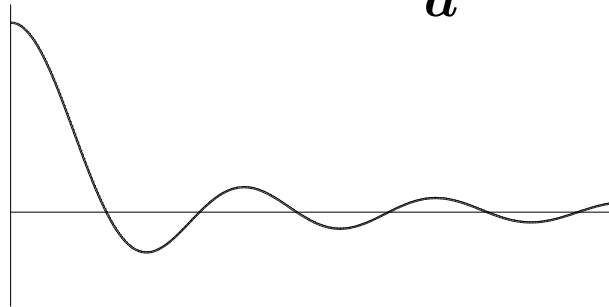
$$C(h) = \exp \left\{ -\frac{|h|^2}{a^2} \right\}$$





# Covariance sinus cardinal

$$C(h) = \frac{\sin \frac{|h|}{a}}{\frac{|h|}{a}}$$



# Ensembles d'excursion gaussiens

# Ensemble d'excursion gaussien

Ingrédients de base:

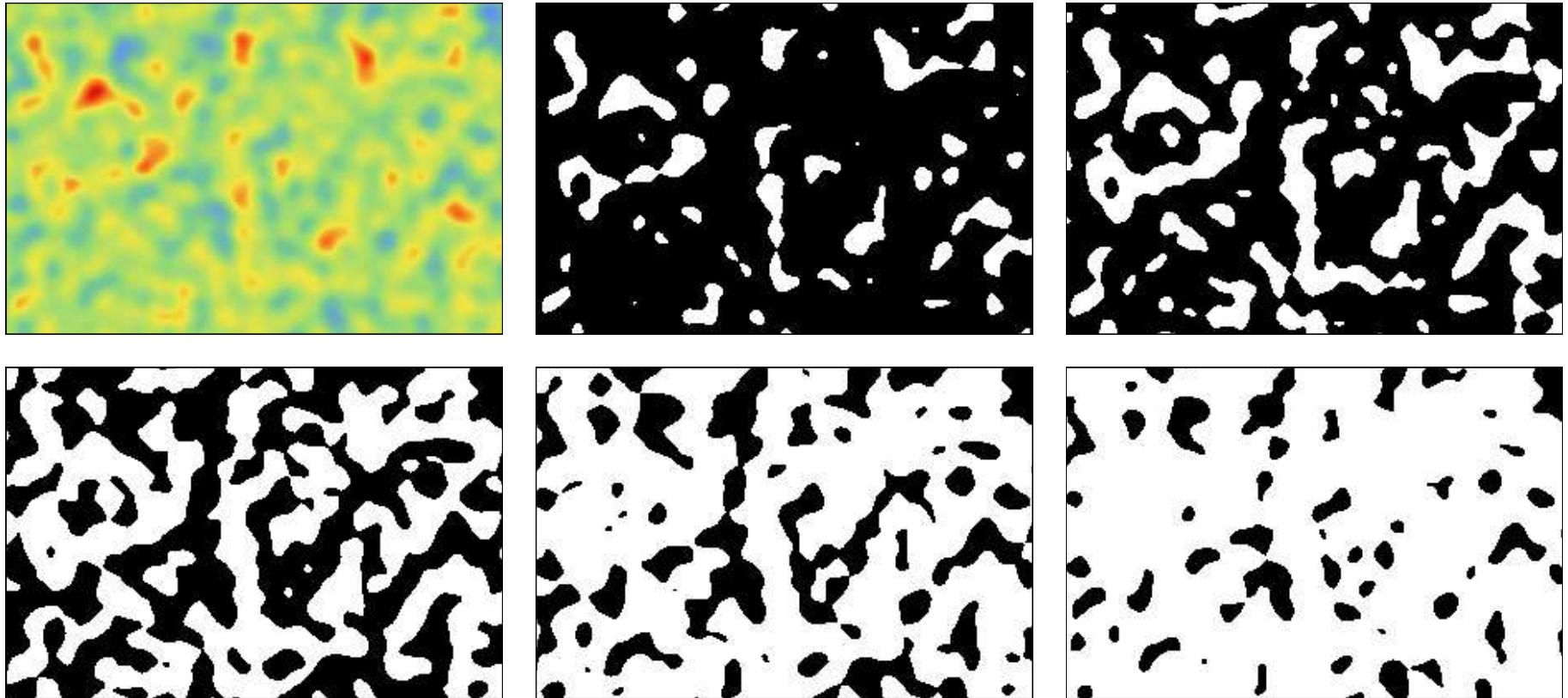
- une fonction aléatoire gaussienne  $Y$ , centrée, normée et de covariance  $C$ .
- une valeur numérique  $\lambda$ .

Définition:

Les points de valeur gaussienne supérieure ou égale à  $\lambda$  constituent l'ensemble d'excursion gaussien de base  $Y$  et de niveau  $\lambda$ .

$$X_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Y(x) \geq \lambda\}$$

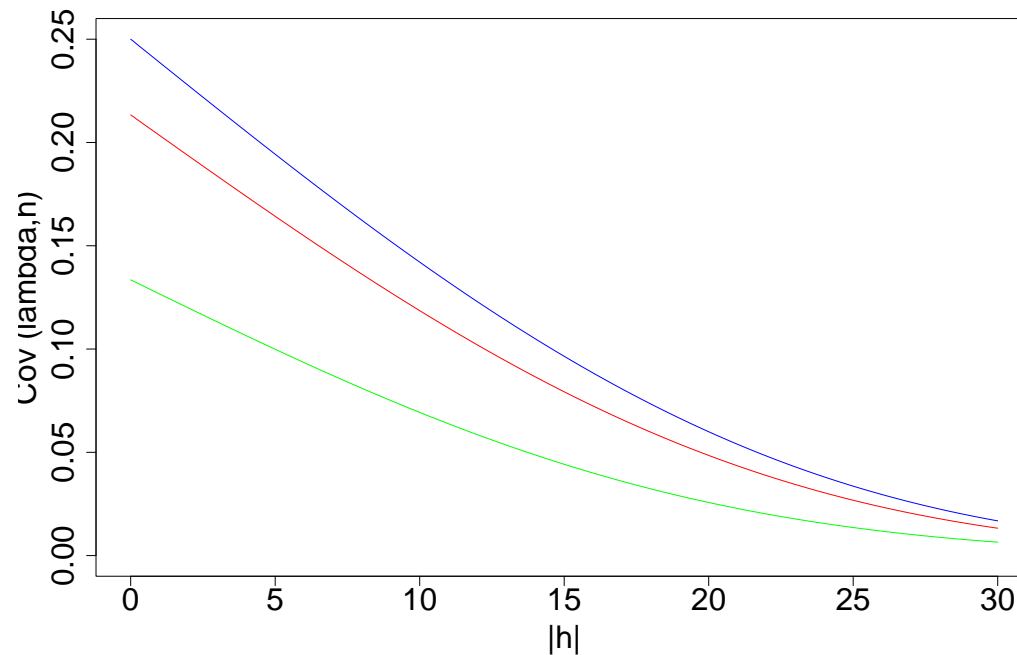
## Exemples d'ensembles d'excursion gaussiens



Réalisation d'une fonction aléatoire gaussienne et ses ensembles d'excursion aux niveaux  $-1$ ,  $-0.5$ ,  $0$ ,  $0.5$  et  $1$ .

# Sur la covariance des ensembles d'excursion gaussiens

$$C_\lambda(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{C(h)} \exp\left(\frac{-\lambda^2}{1+x}\right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad h \in \mathbb{R}^d$$



Covariance des ensembles d'excursion aux niveaux 0,  $\pm 0.5$  et  $\pm 1$ .

## Quelques références bibliographiques

- Armstrong M., Galli A., Le Loch G., Geffroy F. et Eschard R. (2002) Plurigaussian simulations in geosciences. Springer (Berlin).
- Chilès J.P. et Delfiner P. (1999) Geostatistics. Modeling spatial uncertainty. Wiley (New York).
- Cressie N. (1993) Statistics for spatial data. Wiley (New York).
- Hall P. (1988) Introduction to the theory of coverage processes. Wiley (New York).
- Lantuéjoul C. (2002) Geostatistical simulation; models and algorithms. Springer (Berlin).
- Matérn B. (1986) - Spatial variations; stochastic models and their applications to some problems in forest surveys and other sampling investigations. Springer (Berlin).

## Quelques références bibliographiques (2)

- [Matheron G.](#) (1975) Random sets and integral geometry. Wiley (New York).
- [Molchanov I.S.](#) (1997) Statistics of the Boolean model for practitioners and mathematicians. Wiley (Chichester).
- [Stoyan D., Kendall W.S. and Mecke J.](#) (1995) - Stochastic geometry and its applications. Wiley (New York).
- [van Lieshout M.N.M.](#) (2000) - Markov point processes and their applications. Imperial College Press (London).