Dépendance des extrêmes

1 Dépendance non-spatiale : coefficients χ et $\bar{\chi}$

On considère un couple de v. a. (X, Y), de loi jointe $K(x, y)$ et de marginale F. Dans la suite, certains des résultats ne sont vrais que pour F Fréchet standard ($F(x) = \exp(-1/x)$). Ceci n'est pas une perte de généralités puisque, si nécessaire, on peut toujours se ramener à une marginale Fréchet standard par un changement de variable du type $Z = -\frac{1}{\log F(X)}$.

1.1 Le coefficient χ

1.1.1 Définition

Joe (1993) a introduit la mesure χ (*Upper Tail Dependence Parameter (UTDP)*) :

$$\chi = \lim_{x \to x^*} \frac{\bar{K}(x, x)}{1 - F(x)} = \lim_{x \to x^*} P(Y > x \mid X > x),$$

où $x^* = \sup\{x \in \mathbb{R} \ : F(x) < 1\}$.

Il y a un lien entre χ et le domaine d'attraction du maximum de $K(\cdot, \cdot)$: si $K \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ et si χ est le UTDP de K alors χ est le UTDP de $\mathcal{G}$.

Si $\chi = 0$, on dit qu'il y a indépendance asymptotique : si $F_X \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_1)$ et $F_Y \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_2)$, la distribution asymptotique de (X, Y) vérifie alors

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i < a_n x + b_n, \max_{1 \leq i \leq n} Y_i < a_n y + b_n)\right) \to_{n \to \infty} \mathcal{G}_1(x)\mathcal{G}_2(y),$$

i.e. K appartient au domaine d'attraction de l'indépendance.

Si $\chi > 0$, on dit qu'il y a dépendance asymptotique des extrêmes.

1.1.2 Caractérisation de χ : approche copules et mesures $\chi(u)$

On a $K(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(F(X) \leq F(x), F(Y) \leq F(y)) = C(F(x), F(y))$ où C fonction sur $[0, 1]^2$. La fonction $C(\cdot, \cdot)$, de marginales uniformes, est appelée fonction copule de (X, Y) (ou de K). La fonction copule de K contient toute l'information donnée par la distribution jointe du couple (X, Y), en dehors des lois marginales ; en d'autres termes, $C(\cdot, \cdot)$ exprime la dépendance entre X et Y de façon invariante à toute transformation des marginales.

Remarque : D'après le théorème de Skar (1959), la copule est unique dès lors que l'on considère une distribution jointe de marginales continues.

Partant de (X, Y), on se ramène donc à (U, V) de même marginale uniforme et on considère

$$\chi = \lim_{u \to 1} P(V > u \mid U > u).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(V > u \mid U > u) &= \tfrac{P(U>u)-(P(V<u)-P(U<u,V<u))}{P(U>u)} \\ &= 2 - \tfrac{1-C(u,u)}{1-u} \\ &\sim 2 - \tfrac{\log(C(u,u))}{\log(u)} \end{aligned} \tag{1}$$

On pose $\chi(u) = 2 - \frac{\log(P(U<u,V<u))}{\log(P(U<u))}$ et l'on a finalement[1]

$$\chi = \lim_{u \to 1} \chi(u).$$

Remarques :

[1]on a de façon équivalente $\chi(x) = 2 - \frac{\log(P(X<x,Y<x))}{\log(P(X<x))}$ et $\chi = \lim_{x \to x^*} \chi(x)$

1. Dépendance totale : $\forall u$, $\chi(u) = \frac{P(U>u)}{P(U>u)} = 1$;
2. Indépendance : d'après sa défintion $\chi(u) \equiv 0$ et donc $\chi = 0$
3. Pour une distribution bi-variée extrême, on a le résultat suivant : $\chi(u)$ est constant[2] en u ; si l'on considère par exemple le modèle logistique de paramètre α (Coles (2001)), on a $\chi(u) = 2 - 2^{\alpha}$.
4. En général, $\chi(u)$ est une fonction complexe de u ... Par exemple (Coles, Hefferman et Tawn (1999)), pour un couple gaussien de corrélation ρ, $\chi(u)$ augmente avec ρ, mais quand $u \to 1$, l'effet de dépendance diminue et $\chi(u) \to 0$ quand $u \to 1$ pour $\rho < 1$; pour $\rho > 0$, la convergence est très lente et ultimement abrupte ... pour u proche de 1, $\chi(u)$ peut être considérablement plus grand que 0 et "foncer" d'un seul coup s'écraser vers 0, i.e. *indépendance extrême qui pourrait facilement passer inaperçue* ! ... **Possibilité de conclure à tort à une dépendance asymptotique des extrêmes**. Cette remarque est importante car les modèles d'extrêmes multivariés ne sont pas adaptés au cas de l'indépendance asymptotique et reflète donc mal le comportement des extrêmes en dehors d'une dépendance asymptotitque.

D'où l'idée d'introduire une autre caractérisation de la dépendance : $\bar{\chi}(\cdot)$

1.2 Le coefficient $\bar{\chi}(\cdot)$

L'idée est de travailler avec la fonction de survie de la distribution (ou de la copule). D'une façon générale, si F_X et F_Y désignent les marginales, on a : $P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + K(x,y) = \bar{C}(F_X(x), F_Y(y))$ avec $\bar{C}(u,v) = 1 - u - v + C(u,v)$, où $C(\cdot,\cdot)$ copule associée à K.

Pour $0 \leq u \leq 1$, on considère alors le paramètre suivant :

$$\bar{\chi}(u) = \frac{2 \log P(U > u)}{\log P(U > u, V > u)} - 1 \equiv \frac{2 \log(1-u)}{\log \bar{C}(u,u)} - 1$$

Propriétés :

1. Si indépendance au-delà de u, $\bar{\chi}(u) = 0$;
2. Si dépendance totale au-delà de u, $\bar{\chi}(u) = 1$;
3. $\forall\ 0 \leq u \leq 1$, $-1 < \bar{\chi}(u) \leq 1$ (-1 est impossible de par la définition de $\bar{\chi}(u)$) ;
4. Si $\bar{\chi}(u) \in]0,1[$, alors $P(V > u | U > u) > P(U > u)$: les extrêmes sont associés positivement au sens où l'on a une plus grande probabilité de dépassement que sous l'indépendance.
   En effet, si $\bar{\chi}(u) = \epsilon > 0$, on a $2\log(P(U > u)) = (1+\epsilon)\log P(U > u, V > u)$ d'où $P(U > u)^{\frac{2}{1+\epsilon}} = P(U > u, V > u)$. On en déduit $P(V > u|U > u) = P(U > u)^{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} > P(U > u)$.

   Pour $\bar{\chi}(u) \in]-1, 0[$, on aura une association "négative" : $P(V > u|U > u) < P(U > u)$
5. D'après ce qui précède, $\bar{\chi}(u)$ augmente en valeur absolue avec la dépendance

Par analogie avec l'approche UTDP précédente, on définit :

$$\bar{\chi} = \lim_{u \to 1} \bar{\chi}(u)$$

Propriétés de $\bar{\chi}$:

1. $-1 < \bar{\chi} \leq 1$;
2. Si dépendance asymptotique des extrêmes, $\bar{\chi} = 1$.
   En effet, d'après (1)
   $P(V > u|U > u) = \frac{\bar{C}(u,u)}{1-u}$ et donc $\chi = \lim_{u\to 1} \frac{\bar{C}(u,u)}{1-u}$. Si dépendance asymptotique, $\chi = \epsilon > 0$ et on a donc $\bar{C}(u,u) \sim \epsilon(1-u)$, d'où $\frac{2\log(1-u)}{\log \bar{C}(u,u)} \to 2$ et $\bar{\chi} = 1$.

[2] Avec les résultats et notations de la section sur les lois extrêmes bi-variées, on peut montrer que $\chi(u) = 2 - \frac{-V(x,x)}{-\frac{1}{x}} = 2 - V(1,1) = 2 - \theta$.

3. $\bar{\chi} < 1$ correspond donc à l'indépendance asymptotique des extrêmes,.

4. Le coefficient $\bar{\chi}$ permet de mieux caractériser que χ une éventuelle indépendance asymptotique, et donne une information complémentaire à celle donnée par χ. Par exemple, pour un couple gaussien, $\bar{\chi} = \rho$ et $\bar{\chi}(u)$ est approximativement linéaire pour $u > 0.5$ et $u < 1$: on conclut donc à une indépendance asymptotique (contrairement à ce qu'aurait pu laisser croire une interprétation directe de χ) et on a une mesure de la dépendance pour des quantiles élevés (grandes valeurs de u).

1.3 Le couple $(\chi, \bar{\chi})$

En résumé : le couple $(\chi, \bar{\chi})$ permet de caractériser la dépendance des extrêmes

$$\begin{array}{lll} \chi \in [0,1] & ; &]0,1] \text{ correspond à la dépendance asymptotique.} \\ \bar{\chi} \in]-1,1] & ; &]-1,1[\text{ correspond à l'indépendance asymptotique.} \end{array}$$

On voit que

$(\chi > 0, \bar{\chi} = 1) \rightsquigarrow$ dépendance asymptotique (*et χ détermine la force de la dépendance*) ;
$(\chi = 0, \bar{\chi} < 1) \rightsquigarrow$ indépendance asymptotique (*et $\bar{\chi}$ donne une mesure de la force de dépendance*).

En pratique, les mesures $(\chi(u), \bar{\chi}(u))$ peuvent être utilisées de manière exploratoire, en construisant empiriquement les coefficients $\chi(u)$ et $\bar{\chi}(u)$. On se ramène d'abord à des marginales uniformes : à partir des observations (x_i, y_i) on construit les couples $u_i = \widehat{F_X}(x_i), v_i = \widehat{F_Y}(y_i)$, réalisations indépendantes dont la loi est approchée par $C(\cdot,\cdot)$; on s'intéresse alors aux grandes valeurs des u_i et v_i : calculs empiriques de $\chi(u)$ et $\bar{\chi}(u)$ pour des u grands.

2 Liens entre χ, $\bar{\chi}$, θ (coefficient extrêmal) et η (coefficient de dépendance de queue)

2.1 Lien entre χ et θ

Soit (X, Y) un couple de loi bivariée extrême, de marginale F (F est donc une distribution des extrêmes ou GEV) ; on a par définition de θ, (Fougères, (?))

$$P(\max(X, Y) < x) = F(x)^{\theta}.$$

On a alors :

$$\boxed{\chi = 2 - \theta} \tag{2}$$

En effet, si l'on revient à la définition de χ, (sans passer par les copules)
$\chi(x) = 2 - \frac{\log P(X<x, Y<x)}{\log F(x)} = 2 - \frac{\log P(\max(X,Y)<x)}{\log F(x)} = 2 - \frac{\theta \log F(x)}{\log F(x)} \equiv 2 - \theta$

2.2 Marginale Fréchet standard : coefficient de dépendance de queue

Ledford et Tawn ((1996), (1997)) ont proposé la modélisation suivante pour la loi jointe d'un couple de marginales Fréchet standards :

$$P(X > x, Y > y) \underset{\substack{x \to \infty, \\ y \to \infty}}{\sim} \mathcal{L}(x, y) x^{-c_1} y^{-c_2}$$

avec $\mathcal{L}$ fonction à variation lente[3], $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_1 + c_2 \geq 1$. Le coefficient $\eta = \frac{1}{c_1 + c_2}$ est appelé *coefficient de dépendance de queue* ; $\eta \in (0, 1]$.

Prenant $x = y \equiv z$, on peut écrire :

$$P(X > z, Y > z) \sim_{z \to \infty} \mathcal{L}(z) z^{-1/\eta} \tag{3}$$

et puisque $P(X > z) = 1 - \exp(-1/z) \sim 1/z$ pour z grand, on a aussi

$$P(X > z, Y > z) \sim_{z \to \infty} \mathcal{L}(z) \left[P(X > z)\right]^{1/\eta}$$

[3]Une fonction $\mathcal{L}$ est dite à variation lente à l'infini si $\forall t > 0$, $\lim_{x \to \infty} \frac{\mathcal{L}(tx)}{\mathcal{L}(x)} = 1$.

où $\mathcal{L}(\cdot)$ est une fonction à variation lente et $0 < \eta \leq 1$.

Soit $C(\cdot,\cdot)$ la copule associée à K. On a

$$\bar{C}(u,u)) \sim_{u\to 1} \mathcal{L}((1-u)^{-1})(1-u)^{1/\eta}$$

d'où[4],

$$\bar{\chi}(u) \sim \frac{2\log(1-u)}{\log \mathcal{L}\{(1-u)^{-1}\} + \frac{1}{\eta}\log(1-u)} - 1 \to_{u\to 1} 2\eta - 1$$

On a donc,

$$\boxed{\bar{\chi} = 2\eta - 1} \tag{4}$$

Remarques :

1. Si $\eta = 1$ et $\mathcal{L}(z) \to c$, $0 < c \leq 1$ alors
   (a) $\chi = c$. En effet, $\chi = \lim_{u\to 1} \frac{\bar{C}(u,u)}{1-u} = \lim_{u\to 1} \mathcal{L}(1-u)^{-1} = c$.
   (b) $\bar{\chi} = 1$

   Les variables sont alors asymptotiquement dépendantes, de degré c. Si $c = 1$, la dépendance est complète.
2. si $\eta = \frac{1}{2}$, $\bar{\chi} = 0$ donc indépendance asymptotique.

3 Inférence paramétrique pour χ et $\bar{\chi}$

On suppose la marginale F Fréchet standard.

3.1 Coefficient de dépendance de queue η

Soit $T = \min(X,Y)$. Utilisant (3), on a :

$$P(T > x) = P(X > x, Y > x) \sim \mathcal{L}(x)x^{-1/\eta}$$

En d'autres termes, η est le paramètre de forme d'une queue de distribution univariée et les techniques usuelles d'estimation univariées peuvent être utilisées pour estimer η , dont on déduit une estimation pour $\bar{\chi}$.
Dans le cas d'une dépendance asymptotique ($\bar{\chi} = 1$) ou $\eta = 1$, si l'on suppose $\mathcal{L}(x) \to c$ quand $x \to \infty$, on peut alors estimer χ comme le paramètre d'échelle de la loi de T, i.e. $\mathcal{L}(x) = \chi$ pour x grand.

3.2 Loi bi-variée du maximum

Soit $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ couples i.i.d., de loi jointe K et de marginale F. On suppose que (X,Y) est dans le domaine d'attraction d'une loi extrême $G(\cdot,\cdot)$:

$$P(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq nx, \max_{1\leq i\leq n} Y_i \leq ny) = (K(nx,ny))^n \to_{n\to\infty} G(x,y)$$

avec $G(x,y) = \exp(-V(x,y))$, où $V(x,y) = 2\int_0^1 \max\left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y}\right) dH(\omega)$ pour des distributions H sur $[0,1]$ vérifiant $2\int_0^1 \omega dH(\omega) = \frac{1}{2}$ (en d'autres termes : *la dépendance dans la représentation limite se traduit par V ou H*). La fonction $V(\cdot,\cdot)$ est nécessairement homogène d'ordre -1 : $V(tx,ty) = \frac{1}{t}V(x,y)$.

Remarques :

[4]en utilisant le résultat suivant (Resnick (1987), proposition 0.8) : Si $\mathcal{L}$ est à variation lente à l'infini, $\frac{\log \mathcal{L}(x)}{\log x} \to_{x\to\infty} 0$

1. Indépendance totale mise à part, toutes les lois bi-variées des extrêmes sont asymptotiquement dépendantes : pour toutes ces lois $\bar{\chi} = 1$. En effet :

   $\bar{\chi}(x) = \frac{2 \log P(X>x)}{\log P(X>x, Y>x)} - 1 = \frac{2 \log(1-\exp(-\frac{1}{x}))}{\log\left(1-2\exp(-\frac{1}{x})+\exp(-\frac{V(1,1)}{x})\right)} - 1$; utilisant $1 - \exp(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ et $1 - 2\exp(-\frac{1}{x}) + \exp(-\frac{V(1,1)}{x}) = \frac{2-V(1,1)}{x} + o(\frac{1}{x})$, on a $1 + \bar{\chi}(x) \sim \frac{2\log(\frac{1}{x})}{\log(\frac{1}{x})+\log(2-V(1,1))} \to 2$

   Une estimation $\widehat{\bar{\chi}}$ significativement différente de 1 est donc le signe d'une inadéquation aux lois bi-variées ! On peut alors se poser la question d'une indépendance asymptotique, d'une taille de bloc insuffisante pour extraire les maxima, ...

2. Dépendance asymptotique : $\bar{\chi} = 1$ et $\chi > 0$. La valeur de χ d'autant plus proche de 1 que la dépendance est forte.

3. $\chi(x)$ est constant pour les lois bi-variées extrêmes :

   $$\chi(x) = 2 - \frac{\log P(X < x, Y < x)}{\log P(X < x)} = 2 - \frac{-V(x,x)}{-1/x} = 2 - V(1,1)$$

   Une estimation de $\chi(x)$ clairement non-constante est donc le signe d'une mauvaise modélisation par extrême bi-varié.

4. De $\chi = 2 - V(1,1)$ on déduit $\chi = 2 - 2\int_0^1 \max(\omega, 1-\omega)dH(\omega) = \int_0^1 \min(\omega, 1-\omega)dH(\omega)$. Le paramètre χ résume donc V et/ou H.

   D'après (2), on a aussi $\theta = V(1,1)$ (ce que l'on pouvait voir directement puisque $\exp(-V(x,x)) = \exp(-\frac{1}{x}V(1,1)) \equiv \exp(-\frac{\theta}{x})$).

Caractérisation lois bi-variées ? :

Approche non paramétrique ... à voir (il existe des choses !).

Approche paramétrique : on cherche $\hat{\eta}$ d'où à tester $\bar{\chi} \neq 1$? Si $\bar{\chi} = 1$ gardé, on spécifie un modèle extrême et estimation des paramètres correspondants par max de vraisemblance.

3.3 Approche dépassements de niveaux

Soit $\mathbb{X}_1 = (X_1, Y_1), \ldots, \mathbb{X}_n = (X_n, Y_n)$ couples i.i.d., de loi jointe K et de marginale F.

Soit $P_n = \left\{\left(\frac{X_i}{n}, \frac{Y_i}{n}\right), 1 \leq i \leq n\right\}$.

$$P_n \to_{n\to\infty} P \text{ , sur } \mathbb{R}_+^2/\{(0,0)\},$$

avec P processus de Poisson.

L'intensité ν du processus P est particulière : si l'on fait la transformation de coordonnées $R = \frac{X+Y}{n}$ et $W = \frac{X}{X+Y}$, on a

$$\nu(dr \times d\omega) = \frac{dr}{r^2} 2dH(\omega)$$

où H est la mesure de dépendance de la loi bi-variée extrême. On a alors la propriété suivante : si $A = [0, (x_1, x_2)]^c$, $P(\max_i X_i < nx, \max_i Y_i < ny) = P(\mathbb{X}_j/n \notin A) \to \exp(-\mu(A))$, où $\mu(A) = \int_A 2r^{-2} dr dH(\omega)$.
L'inférence pour le processus limite P peut être faite de différentes manières ; on peut, par exemple, adopter une famille paramétrique pour H et inférer ses paramètres via max de vraisemblance.

Attention : problèmes en cas d'indépendance asymptotique, H est dégénérée et ne charge que 0 et 1.

3.4 Approche Pickands : la fonction de dépendance $A(\cdot)$ pour extrêmes bivariés

Pickands (1981) a donné une autre caractérisation pour les lois bi-variées extrêmes :
G est une distribution extrême bi-variée ssi

$$G(x,y) = exp\left\{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)A\left(\frac{x}{x+y}\right)\right\}$$

où $A(\cdot)$ est une fonction convexe de $[0,1]$ dans $[1/2,1]$ vérifiant :

1. $A(0) = A(1) = 1$;
2. $-1 \leq A'(0) \leq 0$; $0 \leq A'(1) \leq 1$;
3. $A''(\omega) \geq 0$; $\max(\omega, 1-\omega) \leq A(\omega) \leq 1$, $\omega \in [0,1]$;
4. $A(\omega) \equiv 1$ implique indépendance ; $A(\omega) = \max(\omega, 1-\omega)$ implique dépendance totale

La mesure H et le fonction $A(\cdot)$ sont liées par

$$A(u) = 2\int_0^1 \max((u(1-\omega),(1-u)\omega)dH(\omega)$$

En effet, pour une telle expression on a :
$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)A\left(\frac{x}{x+y}\right) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\int_0^1 \max\left\{\omega\frac{y}{x+y},(1-\omega)\frac{x}{x+y}\right\}dH(\omega) = \int_0^1 \max\left(\frac{\omega}{x},\frac{1-\omega}{y}\right)dH(\omega)$

Pour une marginale F Fréchet standard, $G(x,x) = \exp(-\frac{\theta}{x})$; on en déduit :

$$\boxed{\theta = 2A\left(\tfrac{1}{2}\right)} \quad \text{(où } \theta \text{ coefficient extrêmal)}$$

Remarque : Il existe des estimateurs non-paramétriques de $A(\cdot)$ et on pourrait être tenté de retrouver θ via une telle estimation ... mais ça se discute, sachant que θ n'est qu'un "résumé" de la loi bivariée alors que $A(\cdot)$ la caractérise complètement ...

4 Cadre spatial

4.1 Quelle adaptation des mesures de dépendance précédentes ?

On considère un processus spatial $\{Y(s), s \in V \subset \mathbb{R}^2\}$, de marginale $F_Y(\cdot)$, tel que le processus marginal standardisé $U(\cdot) \equiv F_Y(Y(\cdot))$ soit stationnaire.
Idée : caractériser la dépendance ou l'indépendance asymptotique des couples $(U(s), U(s+h))$. Typiquement, si $P(U(s+h) > u \mid U(s) > u) = 1-u$, on peut appliquer les mesures de la section non-spatiale en considérant la dépendance pour des couples distant de h : $\chi_h(u) = 1-u$ et $\chi_h = \lim_{u\to 1}\chi_h(u) = 0$, c'est-à-dire indépendance asymptotique des extrêmes à distance h.
Si on dispose de répétitions indépendantes à distance h, on peut appliquer directement les notions de dépendances extrêmes précédemment introduites.

4.2 Variogramme extrême (Ancona-Navarette, Tawn (2002))

Soit $Z(\cdot)$ un processus spatial stationnaire tel que $Z(s) = -1/\log F_Y(Y(s))$ ($Z(\cdot)$ est alors de marginale Fréchet standard). Du fait de la stationarité, $P(Z(s+h) \leq x, Z(s) \leq y) \equiv F_h(x,y)$. Soit $\bar{F}_h(x,y)$ la fonction de survie jointe. D'après la section précédente, $\bar{F}_h(x,x) \sim \mathcal{L}(x)x^{-1/\eta_h}$.

Définition (Ancona-Navarette, Tawn (2002))
On appelle *variogramme des extrêmes* la mesure de dépendance extrême des couples à distance h définie par : $\gamma(h) = 2(1-\eta_h)$.

Remarques :

1. Variogramme ??? ... conditions vérifiées ? (rien dans l'article)

2. Si on introduit $\bar{\chi}_h$, on a d'après la section 1, $\bar{\chi}_h = 2\eta_h - 1$ et $\boxed{\gamma(h) = 1 - \bar{\chi}_h}$

Propriétés immédiates

1. $\gamma(\cdot)$ est invariante à la marginale (on peut toujours se ramener à Fréchet) ;

2. $\gamma(h) \in [0, 2)$ (rappel : $\bar{\chi} \in (-1, 1]$) ;

3. $\gamma(h) = 1$: indépendance à distance h ; plus $\gamma(h)$ sera proche de 1, moins forte sera la dépendance à distance h ;

4. (a) $\gamma(h) = 0$: paire asymptotiquement dépendante (il faut aussi $\mathcal{L}_h(x) \not\to 0$) ;

   (b) $\gamma(h) \neq 0$: paire asymptotiquement indépendante et

      i. si $\gamma(h) \in]0, 1[$, association positive des extrêmes au-dessus d'un t_h : il existe une valeur t_h telle que pour tout $t > t_h$ la probabilité $P(X(s+h) > t | X(s) > t)$ est plus grande que le cas indépendant $P(X(s) > t)$;

      ii. si $\gamma(h) \in]1, 2[$, association négative des extrêmes au-dessus d'un t_h : il existe une valeur t_h telle que pour tout $t > t_h$ la probabilité $P(X(s+h) > t | X(s) > t)$ est plus petite que le cas indépendant $P(X(s) > t)$;

   On voit donc que $\gamma(\cdot)$ nous renseigne sur le comportement des extrêmes là où χ est non-informatif ($\chi = 0$).

Remarque : $\gamma(h) \equiv 1 - \bar{\chi}_h$ est un variogramme qui est intéressant dans le cas d'une indépendance asymptotique (car nul sinon et sans caractérisation aucune de la dépendance) ; $1 - \chi_h = \theta_h - 1$ est aussi un variogramme (et c'est cette fois-ci démontré dans l'article de Schlather et Tawn (2003)) qui lui est intéressant dans le cas d'une dépendance asymptotique. On retrouve le rôle complémentaire des deux informations ...

4.3 Dépendance au "second ordre"

la fonction $\mathcal{L}_h(t)$ caractérise aussi la dépendance quand $t \to \infty$: on l'a vu dans le cas non-spatial lorsque $\eta = 1$, $\mathcal{L}_h(t) \to \chi$.
Pour des distances h *de même* $\gamma(h)$, plus $\mathcal{L}_h(t)$ est grande, plus la dépendance est forte.

Exemples : (Ancona-Navarrete, Tawn (2002))

1. Processus indépendant sur V : $P(Z(s) < u, Z(s+h) < v) = P(Z(s) < u)P(Z(s) < v)$
   On a (équivalences) $\bar{\chi}_h = 0$, $\eta_h = 1/2$, $\gamma(h) = 1$.
   $\bar{F}_h(x, x) \sim \mathcal{L}_h(x)[P(Z(s) > x)]^{1/\eta_h} = \mathcal{L}_h(x)[P(Z(s) > x)]^2$, i.e. $\mathcal{L}_h(x) \sim 1$.

2. Dépendance complète sur V : $P(Z(s) < u, Z(s+h) < u) = P(Z(s) < u)$
   On a $\bar{\chi}_h = 1$, $\eta_h = 1$, $\gamma(h) = 0$ et $\mathcal{L}_h(x) \sim 1$ car $\bar{F}_h(x, x) \sim \mathcal{L}_h(x)P(Z(s) > x)$.

3. Processus gaussien $Y(\cdot)$, de fonction de corrélation $\rho(h)$.
   Alors $Z(\cdot)$ est tel que $\gamma(h) = 1 - \rho(h)$ et $\mathcal{L}_h(x) \sim (1+\rho(h))^{3/2}(1-\rho(h)^{-1/2}(4\pi)^{\frac{\rho(h)}{1+\rho(h)}}(\log x)^{\frac{\rho(h)}{1+\rho(h)}}$.
   Soit $\gamma_Y(h)$ le variogramme (usuel) de $Y(\cdot)$. Alors

   $$\gamma_Y(h) = \rho(0) - \rho(h) = 1 - \rho(h) = \gamma(h)$$

   On a ici $\bar{\chi}_h = \rho(h)$, ie $\bar{\chi}_h < 1$ pour $h > 0$, ce qui traduit une indépendance asymptotique des extrêmes. Un processus gaussien est donc l'exemple d'un processus où l'on peut avoir des h tels que $\theta_h = 2$ sans pour autant avoir l'indépendance stricte. Lorsque $\gamma(h)$ est non nul, sa valeur par rapport à 1 nous renseigne sur le fait que les dépassements d'un niveau $t > t_h$ en l'un des sites sachant qu'il y a dépassement en l'autre site (distant de h) va tendre vers 0 plus ou moins vite que sous l'indépendance, c'est-à-dire avec une probabilité plus faible ou plus élevée que $P(Z(s) > t_h)$.

4. Processus max-stable $X(\cdot)$, Fréchet marginale.

   On suppose $P(X(s) \leq x, \forall s \in V) = \exp\left[-\int_S \max_{v \in V}\left\{g(u,v)\frac{1}{x}\right\} d\nu(u)\right]$ (lien avec écriture $\exp(-V(x,y))$, où S est un ensemble mesurable arbitraire, ν une mesure sur S et $\{g(u,v), u \in S, v \in V\}$ fonction non négative vérifiant $\int_S g(u,v)d\nu = 1$.

   Pour des paires distantes de h, $P(X(s) \leq x, X(s+h) \leq x)) = \exp\left[-\int_S \max_{v=s,s+h}\left\{g(u,v)\frac{1}{x}\right\} d\nu(u)\right]$, et $\theta(h) = \int_S \max\{g(s,v), g(s,v+h)\}d\nu(s)$ (lien avec $V(1,1)$).

   On a $\theta(h) \in [1,2]$; $\theta(h) = 2$ correspond à l'indépendance et $\theta(h) < 2$ à la dépendance asymptotique.

$$\begin{array}{rcl}\bar{F}_h(x,x) & = & 1 - 2F(x) + F_h(x,x) \\ & = & 1 - 2\exp(-1/x) + \exp(-\theta(h)/x) \\ & \sim & \frac{1}{x}(2-\theta(h)) - \frac{1}{2x^2}(2-\theta^2(h)) + \ldots\end{array}$$

   On voit que :

   (a) Si $\theta(h) < 2$, $\bar{F}_h(x,x) \sim x^{-1/\eta_h}\mathcal{L}_h(x) \equiv x^{-1}\mathcal{L}_h(x)$ et $\mathcal{L}_h(x) \sim 2 - \theta(h) \equiv \chi_h$. On a donc dépendance asymptotique, ($\gamma(h) = 0$, $\eta_h = 1$).
   (b) Si $\theta(h) = 2$, alors $\bar{F}_h(x,x) \sim -\frac{1}{2x^2}(2-\theta^2(h)) \equiv x^{-2}$ et $\mathcal{L}_h(x) = 1$, i.e. $\eta = \frac{1}{2}$, $\gamma(h) = 1$ et $\mathcal{L}_h(x) = 1$. On a indépendance stricte. On a vu précédemment que lorsque $\eta = \frac{1}{2}$ ($\gamma = 1$), $\mathcal{L}_h(t) \to \chi$ donc ici on retrouve bien $\chi = 1$.

   Pour toute paire de sites, le processus max-stable est donc soit indépendant ($\theta(h) = 2$) soit asymptotiquement dépendant ($\theta(h) < 2$) mais la notion d'indépendance asymptotique n'existe pas ! A h fixé, $\theta(h)$ est constant et lorsqu'il n'est pas exactement égal à 2, on a toujours $\bar{F}_h(x,x) \sim x^{-1}\mathcal{L}_h(x)$, ie $\eta = 1$ donc dépendance.

   Pour un processus max-stable, $\gamma(h)$ ne prend donc que les valeurs 0 (dépendance asymptotique) et 1 (indépendance) et la distance h_0 pour laquelle $\gamma(h)$ saute de 0 à 1 renseigne sur la distance nécessaire pour l'indépendance des extrêmes.

   Note : Il y a donc nécessairement une discontinuité en h_0 de la fonction $\mathcal{L}_h(t)$ pour t grand. Lorsque $\theta(h_0) = 2$, $\mathcal{L}_{h_0}(t) \sim 1$ et pour $\theta(h) < 2$, $\mathcal{L}_h(t) \sim 2 - \theta(h)$.

   Quand $\gamma(h) = 0$, $\mathcal{L}_h$ mesure le degré de dépendance asymptotique des extrêmes.

4.4 Inférence

On suppose avoir des observations dans le temps du processus $X(\cdot)$: $X_{t_1}(\cdot), \ldots X_{t_n}(\cdot)$. Pour chaque site s_i, $X_{t_1}(s_i), \ldots, X_{t_n}(s_i)$ sont supposés indépendants. On peut donc considérer $\gamma(h_{ij})$ et $\mathcal{L}_{h_{ij}}(z)$ pour $h_{ij} = s_j - s_i$, $\forall i,j$ et z grand.

Estimer $\gamma(h) \rightsquigarrow$ estimer η_h.
Estimer $\mathcal{L}_{h_{ij}}(z)$: *impossible !* et l'on va considérer $\mathcal{L}_h(\cdot)$ comme constante pour z grand : $\mathcal{L}_h(z) = c$, $z > u_h$.

Soit $T(h) = \min\left[-1/\log F_{X(\cdot)}(X(s)), -1/\log F_{X(\cdot)}(X(s+h))\right]$ (se ramener à une marginale Fréchet standard) ; la loi F_X étant inconnue, il faut l'estimer et on dispose donc en pratique de $\tilde{T}(h)$. On a : $P(\tilde{T}(h) > z) = c_h z^{-1/\eta_h}$, $z > u_h$. Par maximum de vraisemblance, on obtient alors : (n_{u_h} nombre de dépassements de u_h)

$$\begin{array}{rcl}\widehat{c_h} & = & \dfrac{n_{u_h}}{n} u_h^{1/\widehat{\eta_h}} \\ \widehat{\eta_h} & = & \dfrac{1}{n_{u_h}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_{u_h}} \log\left\{\dfrac{\tilde{T}_h - u_h}{u_h}\right\} \quad \text{(estimateur de Hill, cas univarié)}\end{array}$$

On en déduit $\widehat{\gamma}(h) = 2(1 - \widehat{\eta_h})$, et utilisant les propriétés de l'estimateur de Hill, les IC asymptotiques $\widehat{\gamma}(h) - 1.96\frac{2\widehat{\eta_h}}{\sqrt{n_{u_h}}}$.

En pratique, on s'intéresse typiquement aux dépendances à courte ou longue portée, i.e. on cherche à tester des dépendances à h fixé : tester à $||h||$ petit pour voir s'il peut y avoir simultanément de grandes valeurs du processus et à $||h||$ grand pour voir si les extrêmes sont non corrélés à grandes distances.

Deux approches possibles pour tester :

1. approche IC pour $\gamma(h)$;
2. approche test de rapport de vraisemblance peut être envisagée mais Ancona-Navarrete et Tawn signalent des particularités (non explicitées) du fait de distribution limite non régulière (renvoi à la thèse de Ancona-Navarrete).

Références

Ancona-Navarrete, M.A. et Tawn, J.A. (2002). "Diagnostics for pairwise extremal dependence in spatial processes", *Extremes*, 5, 271-285.

Coles, S.G., (2001). *An introduction to statistical modeling of extrem values.* Springer, London.

Coles, S.G., Hefferman, J.E., et Tawn, J.A. (2000). "Dependence measures for extreme value analyses". *Extremes*, 2, 339-365.

Fougères, A.L. (?). "Multivariate extremes". *??*, ??. (on a un pré-print mais article final a du sortir qqe part . . .)

Joe, H. (1993). "Parametric family of multivariate distributions with given margins". *J. Multivariate Anal.*, 46, 262-282.

Ledford, A.W., et Tawn, J.A. (1996). "Statistics for near independence in multivariate extreme values", *Biometrika*, 83, 169-187.

Ledford, A.W., et Tawn, J.A. (1997). "Modelling dependance within joint tail regions", *J. R. Statist. Soc.*, B 59, 475-499.

Pickands, J. (1981). "Multivariate extreme value distributions". *Bull. Int. Statist. Inst.*, 859-878.

Resnick, S. (1987). *Extreme values, regular variation and point processes*, Springer.

Schlather, M., et Tawn, J.A. (2003). "A dependance measure for multivariate and spatial extreme values: Properties and inference", *Biometrika*, 90, 139-156.