**Examen du 15 juin 2012**

- Le sujet comporte deux parties indépendantes (A et B), à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées. En particulier, les calculettes ne sont pas autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

# Partie A

**Exercice 1**

Soit $X = L^2([0,1],\mathbb{R})$, $V = \{f \in X; \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt = 0\}$ et $g$ un point de $X$. On considère le problème suivant:

$$\begin{aligned} &\min \|f-g\|^2 \\ &f \in V \end{aligned}$$

**1.1.** Ecrire les conditions d'optimalité correspondantes. (On pourra mettre le problème sous la forme

$$\begin{aligned} &\min a(f) \\ &b_i(f) = 0, i = 1,2 \end{aligned}$$

où $a$ et $b_i$ sont des fonctions réelles définies sur $X$.)

**1.2.** On prend $g(t) = t^3$. Résoudre explicitement le problème de minimisation.

**Exercice 2**

Soit $C$ un convexe fermé dans un espace de Hilbert $H$.
On rappelle que le cône tangent à $C$ en $x \in C$ est défini par

$$T(C,x) = \{d \in H; \exists t_n > 0, t_n \to 0, \exists d_n \in H, d_n \to d, x + t_n d_n \in C, \forall n \in I\!N\}$$

et forme un cône convexe fermé.
Si $K$ est un convexe fermé on note $p_K$ la projection sur K, qui est un opérateur 1-Lipschitz.

Le but de l'exercice est de montrer la propriéte suivante, pour tout $x \in C$:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{p_C(x+tw) - p_C(x)}{t} = p_{T(C,x)}(w) \tag{1}$$

**2.1.** Soit $\{t_n\}$ une suite de réels strictement positifs et tendant vers 0. On pose

$$u_n = \frac{p_C(x+t_n w) - x}{t_n}.$$

Vérifier que $\|u_n\| \leq \|w\|$ et en déduire l'existence d'une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ avec $u_{n_k} \rightharpoonup u \in H$. Montrer que $u \in T(C,x)$.

**2.2.** Posons $v_{n_k} = w - u_{n_k}$ et $v = w - u$. Vérifier que

$$\langle v_{n_k}, c - p_C(x + t_{n_k} w)\rangle \leq 0, \quad \forall c \in C$$

et en déduire que

$$\langle v, c - x\rangle \leq 0, \quad \forall c \in C \tag{2}$$

Montrer que $x \in C$ implique

$$\langle v_{n_k}, u_{n_k}\rangle \geq 0 \tag{3}$$

et en déduire

$$\langle w, u\rangle \geq \|u\|^2$$

puis

$$\langle u, v\rangle \geq 0.$$

Utiliser (2) pour établir

$$\langle v, z\rangle \leq 0, \forall z \in T(C,x)$$

puis montrer que $u = p_{T(C,x)}(w)$.

**2.3.** En déduire que la suite $u_n$ converge faiblement vers $u$.

**2.4.** Utiliser (3) pour montrer $\lim \|u_n\|^2 = \|u\|^2$ et en déduire la convergence forte de $\{u_n\}$ vers $u$.

**2.5.** Conclure.

# Partie B

**Exercice 1.** Soit $f \in L^2(0,1)$. On s'intéresse au problème suivant : trouver $u$ dans $H^2(]0,1[)$ tel que

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans } L^2(]0,1[), \\ u'(0) = u'(1). \end{cases} \tag{4}$$

**1.1.** Montrer que si

$$\int_0^1 f(x)dx \neq 0, \tag{5}$$

alors il n'existe pas de $u$ dans $H^2(]0,1[)$ tel que (4) soit satisfait.

**1.2.** On suppose que $f = 0$. Donner les solutions $u \in H^2(]0,1[)$ de (4).

**1.3.** Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left(u \in H^1(]0,1[) \text{ et } \int_0^1 u(x)dx = 0\right) \Rightarrow \left(\int_0^1 u^2(x)dx \leqslant C \int_0^1 (u'(x))^2 dx\right). \tag{6}$$

**1.4.** Soit $V$ le sous-espace vectoriel de $L^2(0,1)$ défini par

$$V := \{u \in L^2(0,1);\ \int_0^1 u(x)dx = 0\}. \tag{7}$$

**1.4.1.** Soit $a : H^1(]0,1[) \times H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall (u,v) \in H^1(]0,1[),\ a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx. \tag{8}$$

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall u \in H^1(]0,1[) \cap V,\ a(u,u) \geqslant \delta \|u\|^2_{H^1(]0,1[)}. \tag{9}$$

Montrer qu'il existe un et un seul $\bar{u}$ dans $H^1(]0,1[) \cap V$ tel que

$$\forall v \in H^1(]0,1[) \cap V,\ a(\bar{u},v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{10}$$

**1.4.2.** On suppose maintenant que

$$\int_0^1 f(x)dx = 0. \tag{11}$$

Montrer $\bar{u}$ (défini dans la question ci-dessus) est dans $H^2(]0,1[)$ et qu'il est solution de (4). Donner $\bar{u}$ quand $f = 0$.

**Exercice 2.** Le but de cet exercice est de montrer l'existence de $u \in C^2([0,1])$ tel que

$$\begin{cases} -u'' + \cos(u) = 0 \text{ dans } C^0([0,1]), \\ u(0) = 0 \text{ et } u'(1) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

**2.1.** Soit $H := \{u \in H^1(]0,1[);\ u(0) = 0\}$. On définit $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$ par

$$\forall u \in H,\ \forall v \in H,\ (u,v)_H = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx. \tag{13}$$

Montrer l'existence de $C > 0$ tel que

$$\forall u \in H,\ \int_0^1 u(x)^2 dx \leqslant C(u,u)_H. \tag{14}$$

Montrer que $(\cdot,\cdot)_H$ est un produit scalaire sur $H$. Montrer que, muni de ce produit scalaire, $H$ est un espace de Hilbert. On note

$$\|u\|_H = \sqrt{(u,u)_H} \tag{15}$$

la norme associée au produit scalaire.

**2.2.** Soit $J : H \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall u \in H,\ J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx + \int_0^1 \sin(u(x))dx. \tag{16}$$

Montrer que $J$ est de classe $C^1$. Donner, pour $u \in H$ et $v \in H$, $J'(u)v$.

**2.3.** Soit $u \in H$. Montrer que $J'(u) = 0$ si et seulement si $u$ est dans $C^2([0,1])$ et vérifie (12).

**2.4.** Montrer que

$$\lim_{\|u\|_H \to +\infty} J(u) = +\infty. \tag{17}$$

**2.5.** Montrer l'existence de $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H,\ J(u) \leqslant J(v). \tag{18}$$

**2.6.** Montrer l'existence de $u \in C^2([0,1])$ vérifiant (12).